TUGAS AKHIR

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN MENGGUNAKAN FORMALISME NEWMAN-PENROSE

Stevanus Setiawan

NPM: 2015720010

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

2019

FINAL PROJECT

SEPARABILITY OF THE KLEIN-GORDON EQUATION ON THE KERR-NEWMAN GEOMETRY USING NEWMAN-PENROSE FORMALISM

Stevanus Setiawan

NPM: 2015720010

DEPARTMENT OF PHYSICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY

2019

LEMBAR PENGESAHAN

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN MENGGUNAKAN FORMALISME NEWMAN-PENROSE

Stevanus Setiawan

NPM: 2015720010

Bandung, 15 Juli 2019

Menyetujui,

Pembimbing utama

Haryanto Siahaan, Ph.D.

Ketua Tim Penguji	**Anggota Tim Penguji**
Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D.	**Reinard Primulando, Ph.D.**

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Philips Nicolas Gunawidjaja, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul:

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN MENGGUNAKAN FORMALISME NEWMAN-PENROSE

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 15 Juli 2019

Meterai
Rp. 6000

Stevanus Setiawan
NPM: 2015720010

ABSTRAK

Formalisme Newman-Penrose merupakan sekumpulan notasi yang dimaksudkan untuk memperlakukan relativitas umum dalam notasi spinor. Dalam tugas akhir ini, saya menurunkan persamaan radial dan angular serupa Teukolsky untuk geometri Kerr-Newman menggunakan formalisme Newman-Penrose. Metrik Kerr-Newman menggambarkan massa yang berputar, bermuatan, dan solusi dari persamaan Einstein-Maxwell. Dalam pekerjaan ini, saya menggunakan metode separasi variabel untuk menunjukkan persamaan Klein-Gordon dapat diseparasi dalam geometri Kerr-Newman dengan formalisme Newman-Penrose. Upaya untuk menelaah persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi dengan formalisme Newman-Penrose juga diberikan.

Kata-kata kunci: Formalisme Newman-Penrose, Kerr-Newman, Persamaan Teukolsky

ABSTRACT

The Newman-Penrose formalism is a set of notations collected to treat general relativity in spinor notation. In this final project, I obtain the radial and angular parts of Teukolsky-like equation for Kerr-Newman geometry using the Newman-Penrose formalism. The Kerr-Newman metric describes a very special rotating, charged mass, and solution of the Einstein-Maxwell equations. In this work, I employ the separation of variables method to show that the Klein-Gordon equation can be separated in Kerr-Newman geometry by using the Newman-Penrose formalism. Effort to study the Klein-Gordon equation in accelerating Kerr-Newman geometry by using the Newman-Penrose formalism is also given.

Keywords: Newman-Penrose Formalism, Kerr-Newman, Teukolsky's Equation

To my mother.

If you are receptive and humble,
mathematics will lead you by the hand.
(Paul Dirac)

KATA PENGANTAR

Ketertarikan penulis dengan fisika teori muncul, saat penulis secara tidak sengaja menonton sebuah video yang berjudul *Michio Kaku: Is God A Mathematician?* lewat aplikasi *Youtube*. Dalam video itu, Michio Kaku menjelaskan banyak hal dari teori gravitasi, *supersymmetry*, hingga *string theory*. Singkatnya, penulis merasa tertantang secara intelektual waktu itu. Tetapi masalahnya penulis memiliki keterbatasan pengetahuan, terutama bahasa matematika yang digunakan dalam fisika teori. Untungnya, penulis memiliki kesempatan untuk berbicara dan bertanya banyak hal tentang fisika teori dengan banyak fisikawan teori melalui media sosial dan *e-mail*. Salah satunya adalah Bapak Haryanto Siahaan, Ph.D. yang sekarang menjadi pembimbing utama pada tugas akhir ini. Penulis sendiri sadar bahwa penulis tidak dapat melakukannya sendirian, dan oleh karena itu penulis ingin berterimakasih kepada:

1. Mama dan Papa atas kesabarannya, kasih sayangnya, pengorbanannya, uangnya, waktunya, tenaganya, dan segala yang telah diberikan ke penulis. Penulis tidak akan pernah mampu membalasnya. Penulis mohon maaf atas kesalahan yang telah penulis lakukan.

2. Bapak Haryanto Siahaan, Ph.D. selaku pembimbing I yang telah meluangkan banyak waktu untuk penulis, dan telah bersedia menjawab banyak pertanyaan dari penulis. Beliaulah orang pertama yang memperkenalkan keindahan relativitas umum kepada penulis, serta menularkan kecintaannya terhadap fisika teori kepada penulis. Nasihat-nasihat beliau tidak akan pernah penulis lupakan.

3. Bapak Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D. selaku penguji I dalam sidang skripsi atas kritik, saran, dan nasihat-nasihatnya selama ini.

4. Bapak Reinard Primulando, Ph.D. selaku penguji II dalam sidang skripsi atas kritik, saran, dan diskusi-diskusi berharganya.

5. Para dosen fisika, Bapak Aloysius Rusli, Ph.D., Bapak Philips Nicolas Gunawidjaja, Ph.D., Bapak Janto Vincent Sulungbudi, S.Si., Ibu Flaviana, M.T., Ibu Risti Suryantari, M.Sc., Ibu Elok Fidiani, M.Sc., dan Bapak Kian Ming, M.Si. atas ilmu, waktu, dan kesabaran yang telah diberikan kepada penulis.

6. Kakek, nenek, dan seluruh keluarga besar dari keluarga bapak dan ibu, atas dukungan moril, dan materi yang telah diberikan.

7. Teman-teman angkatan 2015, Octhree Dina Margaretha Sinaga, Julia Ferenikha siwi, Clara Nisa Fanegi, Dini Widiana, Nadya Astrid, Aditya Naufal, Dirga Febrian, Rayza Theo Adisaputra, Petrus Kristianto Andi Nugroho, Darren Kikyanto, Vega Fajar, Steven Wijaya, serta teman-teman angkatan 2011, 2012, 2013, 2014, dan adik-adik angkatan 2016, 2017, dan 2018 atas pertemanan yang telah kalian berikan selama ini.

8. Teman-teman diskusi fisika teori Bernard, Michael, Arifin, Julian, dan Delvydo atas diskusi yang membangun selama ini.

9. Putri Lestari selaku Ketua Laboran Fisika Dasar dan para penghuni Laboran Fisika Dasar yang telah menemani dan meminjamkan Laboratorium Fisika Dasar selama penulis mengerjakan tugas akhir ini.

10. Bapak dan Ibu petugas Tata Usaha FTIS dan para Pekarya atas bantuan dan pertolongan dalam hal administrasi.

11. Albert Camus, Ernest Hemingway, dan Jack Kerouac atas novel-novelnya yang telah mempengaruhi pemikiran penulis.

Tentunya masih ada banyak pihak lain yang membantu penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini dan penulis tidak dapat menyebutkan mereka satu per satu. Namun dimanapun mereka berada, penulis berterima kasih.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan adanya kritik dan saran demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Bandung, Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada tahun 1915, untuk pertama kalinya Albert Einstein mempublikasikan persamaan medan gravitasinya yang dituliskan

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

dengan $R_{\mu\nu}$ adalah tensor Ricci, $g_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik, R adalah skalar Ricci, $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi-momentum, G adalah konstanta gravitasi, dan c adalah kecepatan cahaya. Persamaan medan gravitasi ini menunjukkan bahwa setiap benda bermassa mengakibatkan ruang-waktu di sekitarnya melengkung. Persamaan medan gravitasi Einstein umumnya disebut persamaan medan Einstein. Kurang dari satu tahun setelah Einstein mempublikasikan persamaannya, seorang astronom Jerman bernama Karl Schwarzschild menjadi orang pertama yang memecahkan persamaan medan Einstein secara eksak. Metrik yang didapatkan oleh Schwarzschild, atau biasa dikenal dengan metrik Schwarzschild yaitu

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right).$$

Metrik ini merupakan solusi ruang-waktu yang disebabkan oleh massa simetri bola yang bersifat statik[1]. Pada tahun 1957, John Wheeler dan Tullio Regge memulai studi pada gangguan lubang hitam (*black hole perturbations*) [1]. Tujuan mereka kala itu ialah membuktikan metrik Schwarzschild dapat menggambarkan solusi stabil terhadap gangguan linier. Metrik Schwarzschild memiliki simetris bola dan tidak bergantung pada waktu, yang mengizinkan gangguan tersebut dapat diuraikan menjadi *spherical harmonics* dan *Fourier modes*. Pada awal tahun 1970, pekerjaan ini pun dilanjutkan kembali oleh Vishveshwara [2] dan Zerilli [3, 4]. Mereka dapat membuktikan bahwa stabilitas dapat diselesaikan, dan keberhasilan mereka untuk kasus Schwarzschild membuat perhatian beralih kepada kasus Kerr [5]. Brandon Carter pun menemukan separabilitas dari persamaan gelombang skalar dalam geometri Kerr [6]. Setelah itu, persamaan Maxwell dalam geometri Kerr dipelajari oleh Fackerell dan Ipser [7]. Mereka mempelajarinya dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose, terinspirasi dari pekerjaan Price dalam gangguan Schwarzschild. Dimana Price menuliskan kembali persamaan Regge-Wheeler dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose yang membuat pekerjaannya cukup sederhana [8]. Kemudian, pada tahun 1972 seorang astrofisikawan teori bernama Saul Teukolsky telah berhasil mengembalikan minat para fisikawan dan matematikawan dalam separasi variabel. Teukolsky menunjukkan dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose (menggunakan *Kinnersley tetrad*) dalam gangguan gelombang skalar, elektromagnetik, dan gravitasi relatif mudah dalam geometri Kerr dan memiliki sifat yang dapat diseparasi [9].

[1] Istilah statik dimaksudkan bahwa tensor metriknya tidaklah bergantung waktu.

1.1 Latar Belakang Masalah

Teukolsky telah menunjukkan dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose dalam gangguan gelombang skalar, elektromagnetik, dan gravitasi di geometri Kerr relatif mudah dan dapat diseparasi [9]. Sedangkan untuk tugas akhir ini, penulis akan menunjukkan separabilitas persamaan Klein-Gordon di geometri Kerr-Newman dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose. Seperti yang kita tahu, geometri Kerr-Newman bukanlah solusi vakum Einstein, melainkan solusi persamaan Einstein-Maxwell. Separasi variabel pada persamaan Klein-Gordon di geometri Kerr-Newman tanpa menggunakan formalisme Newman-Penrose dapat ditemukan di referensi [10]. Salah satu motivasi mengapa formalisme Newman-Penrose dipelajari dan digunakan adalah mengurangi jumlah persamaan yang akan dituliskan secara eksplisit, yang sangat membantu dalam pembahasan ruang-waktu yang rumit seperti Kerr-Newman terakselerasi. Persamaan akan dituliskan tanpa menggunakan indeks dan konvensi penjumlahan[2]. Dalam tugas akhir ini juga, penulis menggunakan *Carter tetrad* untuk menggambarkan tensor metrik Kerr-Newman dan tensor metrik Kerr-Newman terakselerasi.

1.2 Tujuan

Penulisan pada tugas akhir ini bertujuan untuk menyampaikan kembali formulasi Lagrange pada ruang-waktu melengkung, geometri Kerr, formalisme Newman-Penrose, persamaan Klein-Gordon dan Maxwell dalam formalisme Newman-Penrose, menyeparasi bagian angular dan radial dalam persamaan Klein-Gordon dengan *ansatz* tertentu untuk medan skalar yang menggunakan formalisme Newman-Penrose, dan menunjukkan persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi.

1.3 Batasan masalah

Pembatasan yang dilakukan oleh tugas ini yaitu:

1. Persamaan Klein-Gordon yang digunakan adalah persamaan Klein-Gordon nirmassa dengan adanya interaksi elektromagnetik dalam ruang-waktu melengkung.
2. Persamaan Maxwell yang digunakan adalah persamaan Maxwell vakum dalam ruang-waktu melengkung.

1.4 Konvensi

Perhitungan di dalam tugas akhir ini menggunakan konvensi unit $G = c = \hbar = 1$.

1.5 Metodologi

Sebagian besar penelitian pada tugas akhir ini merupakan tinjauan pustaka atau pembahasan jurnal. Formulasi Lagrange pada ruang-waktu melengkung, formalisme Newman-Penrose [11, 12, 13], konstruksi formalisme Newman-Penrose pada geometri Kerr dan persamaan Maxwell, dan memperlihatkan separabilitas persamaan Maxwell dalam geometri Kerr merupakan tinjauan ulang terhadap teori dari buku [14]. Sedangkan untuk persamaan Klein-Gordon dalam formalisme Newman-Penrose telah diperlihatkan di referensi [15]. Penulis akan mengadopsi metode dalam memperlihatkan separabilitas persamaan Maxwell dalam geometri Kerr ke persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman. Tugas akhir ini diakhiri dengan persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi yang merupakan komponen orisinal dalam tugas akhir ini.

[2] Persamaan akan bergantung oleh *spin coefficients*, dan *spin coefficients* akan dijelaskan lebih jauh di 3.2.

1.6 Sistematika pembahasan

Sistem penulisan yang dilakukan yaitu:

1. Bab 1 Pendahuluan, berisikan latar belakang masalah, metode penelitian, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan dari tugas akhir ini.
2. Bab 2 Formulasi Lagrange Pada Ruang-waktu Melengkung, berisikan teori medan skalar nirmassa, dan teori medan elektromagnetik vakum.
3. Bab 3 Konstruksi Formalisme Newman-Penrose Pada Geometri Kerr dan Persamaan Maxwell, berisikan geometri Kerr, formalisme Newman-Penrose, konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr, dan konstruksi formalisme Newman-Penrose pada persamaan Maxwell.
4. Bab 4 Separabilitas Persamaan Maxwell Dalam Geometri Kerr, berisikan persamaan Maxwell dalam geometri Kerr, reduksi pada persamaan Maxwell, dan separabilitas persamaan Maxwell.
5. Bab 5 Separabilitas Persamaan Klein-Gordon Dalam Geometri Kerr-Newman, berisikan geometri Kerr-Newman, konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr-Newman, konstruksi persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman, dan separabilitas persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman.
6. Bab 6 Persamaan Klein-Gordon Dalam Geometri Kerr-Newman Terakselerasi, berisikan geometri Kerr-Newman terakselerasi, konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi, dan persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi.
7. Bab 7 Kesimpulan, berisi tentang kesimpulan pada tugas akhir ini.

BAB 2

FORMULASI LAGRANGE PADA RUANG-WAKTU MELENGKUNG

Aksi merupakan kuantitas abstrak yang dapat menggambarkan dinamika sistem. Dari suatu aksi akan didapatkan persamaan gerak yang menggambarkan dinamika sebuah medan yang didapat dari prinsip aksi terkecil. Dari aksi, kita juga dapat mengeksplorasi simetri dalam sistem. Pada bab ini akan ditunjukkan formulasi Lagrange pada ruang-waktu melengkung.

2.1 Teori medan skalar nirmassa

Diberikannya densitas Lagrangian untuk medan skalar nirmassa yaitu

$$\mathcal{L}\left(\psi.\nabla_\mu\psi, g^{\mu\nu}\right) \equiv L\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\psi\nabla_\nu\psi, \tag{2.1}$$

dengan aksi

$$S = \int\limits_V L\left(\psi, \nabla_\mu\psi, g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x. \tag{2.2}$$

Terapkan prinsip aksi minimum, yaitu

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int\limits_V \left(\delta\psi\frac{\delta L}{\delta\psi} + \delta\left(\nabla_\mu\psi\right)\frac{\delta L}{\delta\left(\nabla_\mu\psi\right)}\right)\sqrt{-g}d^4x \\
&= \int\limits_V \nabla_\mu\left(\delta\psi\frac{\delta L}{\delta\nabla_\mu\psi}\right)\sqrt{-g}d^4x + \int\limits_V \delta\psi\left(\frac{\delta L}{\delta\psi} - \nabla_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta\nabla_\mu\psi}\right)\right)\sqrt{-g}d^4x \\
&= \oint\limits_S n_\mu\left(\delta\psi\frac{\delta L}{\delta\nabla_\mu\psi}\right)\sqrt{|h|}d^3x + \int\limits_V \delta\psi\left(\frac{\delta L}{\delta\psi} - \nabla_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta\nabla_\mu\psi}\right)\right)\sqrt{-g}d^4x = 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan h adalah determinan dari *induced metric* dan g adalah determinan dari tensor metrik. Kaitan dari *induced metric* dengan tensor metrik yaitu

$$h_{\mu v} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}, \tag{2.4}$$

dengan x^μ adalah koordinat ruang-waktu, dan y^μ adalah koordinat *hypersurface* [16]. Dari persamaan (2.3) didapatkan persamaan Euler-Lagrange yang biasa dituliskan

$$\frac{\delta L}{\delta\psi} - \nabla_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta\nabla_\mu\psi}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Terapkan persamaan (2.5) untuk Lagrangian Klein-Gordon, maka didapat

$$\begin{aligned} &\frac{\delta L_{KG}}{\delta\psi} - \nabla_\mu\left(\frac{\delta L_{KG}}{\delta\nabla_\mu\psi}\right) = 0 \\ &\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\psi) = 0 \\ &\nabla^\mu\nabla_\mu\psi = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) adalah persamaan Klein-Gordon di dalam ruang-waktu yang melengkung. Persamaaan Klein-Gordon menggambarkan persamaan gelombang untuk sebuah partikel yang memiliki spin-0, atau seringkali disebut sebagai partikel skalar. Sedangkan untuk persamaan Klein-Gordon dengan interaksi elektromagnetik bisa didapatkan dengan melakukan *minimal coupling* [17]:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu &\rightarrow \nabla_\mu + iCA_\mu, \\ \nabla^\mu &\rightarrow \nabla^\mu + iCA^\mu. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Substitusikan (2.7) ke persamaan (2.6) menghasilkan

$$\left[\left(\nabla^\mu + iCA^\mu\right)\left(\nabla_\mu + iCA_\mu\right)\right]\psi = 0 \tag{2.8}$$

dengan A_μ adalah vektor potensial yang terkait dengan medan elektromagnetik, C adalah muatan partikel, dan ψ adalah fungsi gelombang medan skalar yang terkait.

2.2 Teori medan elektromagnetik vakum

Densitas Lagrangian Maxwell bebas yaitu

$$L_M = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

dengan $F_{\mu\nu}$ dikenal sebagai tensor elektromagnetik. Dalam ruang-waktu melengkung $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, dan dapat dituliskan

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Pada tensor (2.10) memiliki medan spin-1 yaitu A^μ. Dari persamaan (2.5) dan (2.9) menghasilkan

$$0 = \frac{\delta L_M}{\delta A_\mu} - \nabla_c\left(\frac{\delta L_M}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right). \tag{2.11}$$

Masukkan persamaan (2.9) ke (2.11) menghasilkan

$$\begin{aligned} &\nabla_\nu\left(\frac{\delta L_M}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right) = \frac{1}{4}\nabla_\nu\left(\frac{\delta F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right) \\ &= \frac{2}{4}\nabla_\nu F^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_\nu F^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta\nabla_\alpha A_\beta}{\delta\nabla_\nu A_\mu} - \frac{\delta\nabla_\beta A_\alpha}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right) = \frac{1}{2}\nabla_\nu F^{\alpha\beta}\left(\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha\right) \\ &= \nabla_\nu F^{\nu\mu}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

dengan $\frac{\delta L_M}{\delta A_\mu} = 0$, maka dapat dituliskan

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.13}$$

dengan $A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$ adalah vektor potensial. Selain persamaan (2.13), medan A^μ juga harus memenuhi

$$\nabla_\alpha F_{\beta\chi} + \nabla_\beta F_{\chi\alpha} + \nabla_\chi F_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.14}$$

yang dikenal sebagai identitas Bianchi. Persamaan (2.13), dan (2.14) adalah persamaan Maxwell dalam vakum.