

SKRIPSI

SOLUSI MODEL EPIDEMIK *SIS* DAN *SIR* MENGGUNAKAN
METODE RANTAI MARKOV DISKRET, RANTAI MARKOV
KONTINU, DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK



SANDY CHRISTOFER SETYONO

NPM: 2015710024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2018

FINAL PROJECT

**SOLUTION OF *SIS* AND *SIR* EPIDEMIC MODELS USING
DISCRETE TIME MARKOV CHAIN, CONTINUOUS TIME
MARKOV CHAIN, AND STOCHASTIC DIFFERENTIAL
EQUATION**



SANDY CHRISTOFER SETYONO

NPM: 2015710024

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2018**

LEMBAR PENGESAHAN

SOLUSI MODEL EPIDEMIK *SIS* DAN *SIR* MENGGUNAKAN
METODE RANTAI MARKOV DISKRET, RANTAI MARKOV
KONTINU, DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK

SANDY CHRISTOFER SETYONO

NPM: 2015710024

Bandung, 12 November 2018

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Dr. Benny Yong, S.Si., M.Si.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Dr. Dharma Lesmono, Drs., S.E.,
M.Sc., M.T.

Liem Chin, S.Si., M.Si.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra, S.Si., M.Si.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**SOLUSI MODEL EPIDEMIK *SIS* DAN *SIR* MENGGUNAKAN METODE
RANTAI MARKOV DISKRET, RANTAI MARKOV KONTINU, DAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 12 November 2018

Meterai Rp. 6000

Sandy Christofer Setyono
NPM: 2015710024

ABSTRAK

Suatu penyakit menular dapat menjadi wabah pada sebuah populasi. Namun, hal ini dapat ditanggulangi secara cepat apabila perkembangannya dapat diprediksi. Model epidemik dapat digunakan untuk memprediksi perkembangan penyakit menular dari waktu ke waktu. Biasanya model epidemik yang digunakan adalah model deterministik. Pada skripsi ini, akan digunakan model epidemik stokastik *SIS* (*Susceptible Infected Susceptible*) dan *SIR* (*Susceptible Infected Recovered*). Solusi model ini akan diselesaikan dengan menggunakan metode Rantai Markov diskret, Rantai Markov kontinu, dan persamaan diferensial stokastik. Metode Rantai Markov diskret menggunakan variabel yang bersifat diskret dan satuan waktu yang bersifat diskret. Rantai Markov kontinu menggunakan variabel yang bersifat diskret dan satuan waktu yang bersifat kontinu. Untuk persamaan diferensial stokastik, variabel dan satuan waktu bersifat kontinu. Pada kedua model epidemik yang menggunakan metode Rantai Markov diskret atau kontinu, akan ditentukan bentuk peluang transisi antar keadaan. Prediksi dari banyaknya individu terinfeksi akan diperoleh dengan memanfaatkan peluang transisi. Bentuk peluang transisi model epidemik Rantai Markov kontinu digunakan untuk menghasilkan solusi model epidemik metode persamaan diferensial stokastik dengan cara menghitung nilai ekspektasi dan variansi dari variabel bebas pada model yang diberikan. Solusi model epidemik stokastik yang dihasilkan ketiga metode konvergen ke solusi model deterministik. Setelah memprediksi perkembangan penyebaran penyakit, akan dibahas bentuk peluang penyakit menjadi wabah. Pada bagian akhir skripsi ini, akan diperlihatkan dua contoh model yang merupakan bentuk lain dari model epidemik Rantai Markov diskret yang tidak lagi bergantung pada kompartemen model deterministik.

Kata-kata kunci : model *SIS*, model *SIR*, Rantai Markov diskret, Rantai Markov kontinu, persamaan diferensial stokastik

ABSTRACT

An infectious disease can be an outbreak in a population. However, this can be overcome quickly if the progression can be predicted. Epidemic models can be used to predict the progress of infectious diseases over time. Epidemic models that are often used are deterministic models. In this final project, we will use stochastic epidemic model *SIS* (*Susceptible Infected Susceptible*) and *SIR* (*Susceptible Infected Recovered*). The solution of this model will be solved using the discrete time Markov Chain method, the continuous time Markov Chain, and the stochastic differential equation. The discrete time Markov Chain method uses discrete variables and discrete time units. The continuous time Markov chain uses discrete variables and continuous time units. For stochastic differential equations, variables and time units are continuous. In both epidemic models that using discrete or continuous time Markov Chain methods, the form of transition probabilities between states will be determined. Predictions of the number of infected individuals will be obtained by using of transition probabilities. The form of transition probabilities from the continuous time Markov Chain epidemic model is used to produce a solution for the epidemic model of stochastic differential equation method by calculating the expectation and variance of the independent variables in the given model. The solution of the stochastic epidemic model produced by the three methods converges to the deterministic model solution. After predicting the progression of the spread of the disease, the form of the probability for the disease to become an epidemic will also be discussed. At the end of this final project, two examples of models that are other forms of discrete time Markov Chain epidemic models will be shown that no longer depend on deterministic model compartments.

Keywords: *SIS* model, *SIR* model, discrete time Markov Chain, continuous time Markov Chain, stochastic differential equations

Dedicated to my beloved parents

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan atas berkatNya yang melimpah, untuk penyertaan, perlindungan, dan pertolongan yang tak pernah habis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan tepat waktu. Skripsi yang berjudul "Solusi Model Epidemik *SIS* dan *SIR* Menggunakan Metode Rantai Markov Diskret, Rantai Markov Kontinu, dan Persamaan Diferensial Stokastik" disusun sebagai salah satu syarat wajib dipenuhi untuk menyelesaikan studi Strata-1, Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR), Bandung. Selama masa kuliah, penulis mendapat banyak hal dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

- Orang tua dan keluarga yang selalu mendukung penulis dalam segala situasi dan keadaan.
- Bapak Dr. Benny Yong, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah sabar membimbing penulis, memberikan ilmu, arahan, saran, semangat, dan inspirasi yang bermanfaat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
- Bapak Dr. Dharma Lesmono, Drs., S.E., M.Sc., M.T., selaku Dosen Penguji yang telah banyak memberikan arahan dan masukan untuk penulisan skripsi ini.
- Bapak Liem Chin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah banyak memberikan saran sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik.
- Seluruh dosen FTIS, terima kasih atas segala ilmu dan ajaran yang telah diberikan kepada penulis.
- Seluruh staf Tata Usaha FTIS, terima kasih atas segala bantuan administrasi selama perkuliahan penulis.
- Universitas Katolik Parahyangan, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, dan Jurusan Matematika atas segala pengalaman dan kesempatan yang telah diberikan kepada penulis sehingga sangat membuka wawasan, sudut pandang, dan pola pikir penulis dalam proses menjadi manusia yang seutuhnya.
- Teman-teman angkatan 2015 yang telah mengisi kehidupan perkuliahan dan menginspirasi penulis untuk menjadi pribadi yang lebih baik.
- Teman-teman matematika 2014, 2016, dan 2017 yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Bandung, 12 November 2018

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Penulisan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear	3
2.2 Fungsi Kepadatan Peluang	3
2.2.1 Ekspektasi, Variansi, dan Kovariansi	4
2.3 Distribusi Normal dan Binomial	5
2.4 Proses Stokastik	6
2.5 Rantai Markov	6
2.6 <i>Random Walk</i> Sederhana	6
2.7 Model Epidemik <i>SIS</i>	7
2.8 Model Epidemik <i>SIR</i>	8
2.9 Bilangan Reproduksi Dasar dengan Menggunakan Matriks Generasi	9
2.10 Proses Wiener dan Persamaan Diferensial Stokastik	10
2.11 Metode Cholesky	11
3 MODEL EPIDEMIK <i>SIS</i> DAN <i>SIR</i> DENGAN PENDEKATAN STOKASTIK	13
3.1 Peluang Transisi Model Epidemik <i>SIS</i> Menggunakan Metode Rantai Markov Diskret	13
3.1.1 Ekspektasi Model Epidemik <i>SIS</i> Menggunakan Metode Rantai Markov Diskret	14
3.2 Peluang Transisi Model Epidemik <i>SIS</i> Menggunakan Metode Rantai Markov Kontinu	16
3.2.1 Ekspektasi Model Epidemik <i>SIS</i> Menggunakan Metode Rantai Markov Kontinu	17
3.3 Peluang Transisi Model Epidemik <i>SIR</i> Menggunakan Metode Rantai Markov Diskret	17
3.4 Peluang Transisi Model Epidemik <i>SIR</i> Menggunakan Metode Rantai Markov Kontinu	18
3.5 Model Epidemik <i>SIS</i> Menggunakan Metode Persamaan Diferensial Stokastik	19
3.6 Model Epidemik <i>SIR</i> Menggunakan Metode Persamaan Diferensial Stokastik	21
3.7 Bilangan Reproduksi Dasar	22
3.8 Peluang Wabah	23
3.9 Model Epidemik Rantai Binomial	25
3.9.1 Model Greenwood	26

3.9.2	Model <i>Reed-Frost</i>	26
4	SIMULASI NUMERIK	29
4.1	Perbandingan Solusi Model Epidemik <i>SIS</i> Stokastik dan Deterministik	29
4.2	Perbandingan Solusi Model Epidemik <i>SIR</i> Stokastik dan Deterministik	31
5	SIMPULAN DAN SARAN	35
5.1	Simpulan	35
5.2	Saran	36
	DAFTAR PUSTAKA	37

DAFTAR GAMBAR

2.1	Model epidemik <i>SIS</i>	7
2.2	Model epidemik <i>SIR</i>	9
4.1	Perbandingan solusi model epidemik <i>SIS</i> stokastik dan deterministik	30
4.2	Perbandingan solusi model epidemik <i>SIR</i> stokastik dan deterministik	32

DAFTAR TABEL

3.1	Perubahan keadaan dan peluang transisi model epidemik <i>SIS</i> stokastik	20
3.2	Perubahan keadaan dan peluang transisi model epidemik <i>SIR</i> stokastik	21
3.3	Model <i>Greenwood</i> dan Model <i>Reed-Frost</i> ketika $s_0 = 3$ dan $i_0 = 1$	27
4.1	Banyaknya individu terinfeksi pada model epidemik <i>SIS</i> stokastik dan deterministik	31
4.2	Banyaknya individu terinfeksi pada model epidemik <i>SIR</i> stokastik dan deterministik	33

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam skripsi ini akan dibahas dua model matematika yang digunakan untuk melihat perkembangan suatu penyakit menular. Model pertama adalah model epidemik *SIS* (*Susceptible Infected Susceptible*). Model epidemik *SIS* merupakan model penyebaran penyakit dengan individu yang sehat namun rentan (*susceptible*) terinfeksi suatu penyakit atau terjadi interaksi dengan individu yang sakit (*infected*) kemudian, dengan pengobatan medis atau proses alam individu yang sakit tersebut sembuh, namun setelah sembuh rentan untuk terinfeksi kembali (*susceptible*). Model kedua adalah model epidemik *SIR*. Model epidemik *SIR* merupakan model penyebaran penyakit dengan individu yang sehat namun rentan (*susceptible*) terinfeksi suatu penyakit atau terjadi interaksi dengan individu yang sakit (*infected*) kemudian, dengan pengobatan medis atau proses alam individu yang sakit tersebut sembuh, namun setelah sembuh sistem kekebalannya meningkat (*recovered*) dan tidak kembali menjadi individu rentan.

Biasanya model matematika yang digunakan adalah model epidemik deterministik. Model epidemik deterministik melihat perkembangan penyakit secara jangka panjang. Pada skripsi ini akan digunakan pendekatan stokastik. Dengan adanya pendekatan stokastik, model epidemik dapat digunakan untuk melihat perkembangan penyakit secara jangka pendek sehingga pencegahan dan penanggulangan penyakit dapat dilakukan secara efektif. Pendekatan tersebut terdiri dari Rantai Markov diskret, Rantai Markov kontinu, dan persamaan diferensial stokastik. Pendekatan Rantai Markov diskret menggunakan variabel yang bersifat diskret dan satuan waktu yang bersifat diskret. Rantai Markov kontinu menggunakan variabel yang bersifat diskret dan satuan waktu yang bersifat kontinu. Persamaan diferensial stokastik menggunakan variabel dan satuan waktu bersifat kontinu. Dengan adanya 2 model epidemik yang masing-masing menggunakan pendekatan stokastik, akan dibahas enam model epidemik stokastik, yaitu model epidemik *SIS* menggunakan metode Rantai Markov diskret, model epidemik *SIS* menggunakan metode Rantai Markov kontinu, model epidemik *SIR* menggunakan metode Rantai Markov diskret, model epidemik *SIR* menggunakan metode Rantai Markov kontinu, model epidemik *SIS* menggunakan metode persamaan diferensial stokastik, dan model epidemik *SIR* menggunakan metode persamaan diferensial stokastik.

Solusi model-model epidemik stokastik akan dibandingkan dengan solusi model epidemik *SIS* atau *SIR* deterministik. Solusi model epidemik stokastik konvergen ke solusi model epidemik deterministik. Setelah memahami perkembangan penyebaran penyakit, akan dibahas bentuk peluang penyakit menjadi wabah. Dalam menentukannya, akan dilibatkan bentuk bilangan reproduksi yang dapat diperoleh dengan menggunakan matriks generasi. Pada bagian akhir skripsi ini, akan diperlihatkan dua contoh model yang merupakan bentuk lain dari model epidemik Rantai Markov diskret yang tidak lagi bergantung pada kompartemen model deterministik. Model ini bergantung pada distribusi binomial.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah :

1. Bagaimana menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode Rantai Markov diskret?
2. Bagaimana menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode Rantai Markov kontinu?
3. Bagaimana menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode persamaan diferensial stokastik?
4. Bagaimana perbandingan antara model epidemik stokastik dan model epidemik deterministik?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode Rantai Markov diskret.
2. Menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode Rantai Markov kontinu.
3. Menentukan model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode persamaan diferensial stokastik.
4. Membandingkan antara model epidemik stokastik dan model epidemik deterministik.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada skripsi ini adalah model epidemik *SIS* dan *SIR* dengan laju kelahiran yang sama besarnya dengan laju kematian.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada skripsi ini terdiri dari 5 bab, yaitu :

Bab 1 : Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab 2 : Landasan Teori

Bab ini membahas teori-teori yang mendukung dalam pengerjaan skripsi ini.

Bab 3 : Model Epidemik *SIS* dan *SIR* dengan Pendekatan Stokastik

Bab ini membahas model epidemik *SIS* dan *SIR* menggunakan metode Rantai Markov diskret, Rantai Markov kontinu, dan persamaan diferensial stokastik. Kemudian, membahas bentuk peluang wabah dan model epidemik rantai binomial.

Bab 4 : Simulasi Numerik

Bab ini memperlihatkan simulasi numerik dari setiap model dengan parameter yang telah ditentukan.

Bab 5 : Simpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari isi skripsi.