

SKRIPSI

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA UNTUK
PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH
MENGUNAKAN FUNGSI LYAPUNOV LOGARITMA**



SAMUEL HALOMOAN

NPM: 2014710022

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2018**

FINAL PROJECT

**STABILITY ANALYSIS IN MATHEMATICAL MODEL FOR
TRANSMISSION OF DENGUE USING LOGARITHM
LYAPUNOV FUNCTION**



SAMUEL HALOMOAN

NPM: 2014710022

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2018**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH MENGUNAKAN FUNGSI LYAPUNOV LOGARITMA

SAMUEL HALOMOAN

NPM: 2014710022

Bandung, 27 Juli 2018

Menyetujui,

Pembimbing

Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Dr. Ferry Jaya Permana, ASAI

Dr. Erwinna Chendra

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Julius Dharma Lesmono

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA UNTUK
PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH MENGGUNAKAN
FUNGSI LYAPUNOV LOGARITMA**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 27 Juli 2018

| |
|---------------------|
| Meterai Rp. 6000 |
|---------------------|

SAMUEL HALOMOAN
NPM: 2014710022

ABSTRAK

Penyakit demam berdarah (*dengue*) merupakan salah satu penyakit yang berbahaya di Indonesia, yang disebabkan oleh *Dengue Virus* (DENV). Penyakit demam berdarah dapat ditularkan oleh nyamuk *Aedes aegypti* berjenis kelamin betina yang membawa DENV. Pada skripsi ini akan membahas tiga sistem dalam penyebaran penyakit demam berdarah. Sistem I memodelkan laju pertumbuhan jentik nyamuk, kemudian akan dianalisis kestabilan dari model pertumbuhan jentik nyamuk yang berada di tiga tipe tempat, yaitu tipe pertama di tangki air, tipe kedua di ban yang tidak terpakai dan tipe ketiga di saluran air atau selokan. Seiring berjalannya waktu, jumlah jentik nyamuk akan sama dengan jumlah maksimum jentik nyamuk pada setiap tempatnya. Sistem II memodelkan laju pertumbuhan nyamuk, kemudian akan dianalisis kestabilan dari model pertumbuhan nyamuk dari jentik menuju nyamuk dewasa yang berjenis kelamin jantan dan betina. Sistem III memodelkan penyebaran populasi manusia dari penyakit demam berdarah, kemudian akan ditentukan kestabilannya secara lokal maupun global. Dalam menganalisis kestabilan global akan digunakan fungsi Lyapunov. Akan ditentukan juga bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan matriks generasi, jika bilangan reproduksi dasar lebih kecil dari pada satu, maka seiring berjalannya waktu, sistem akan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit. Sebaliknya, jika bilangan reproduksi dasar lebih besar dari pada satu, maka sistem akan menuju titik kesetimbangan endemik. Kemudian pada Sistem III juga akan dianalisis sensitivitas parameternya guna mencari tahu perubahan perilaku dinamik terhadap penyebaran penyakit demam berdarah. Hasil dari analisis sensitivitas menunjukkan perubahan laju penularan virus dan laju penyembuhan memiliki dampak besar bagi nilai R_0 pada Sistem III. Selain itu hasil lain dari analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit maupun endemik, memiliki sifat kestabilan asimtotik global.

Kata-kata kunci: Model Matematika, demam berdarah, model SIR (*Supceptible – Infected – Recovery*), titik kesetimbangan, kestabilan, bilangan reproduksi dasar, *Aedes aegypti*, fungsi Lyapunov

ABSTRACT

Dengue fever is one of the serious disease in Indonesia which is caused by the Dengue Virus (DENV). Dengue fever disease is spread by the species of the mosquito of *Aedes aegypti*, specifically the female ones that carried out the DENV. In this final project, there will be an explanation about three systems in spread of dengue fever. System I will model the growth rate the breeding sites, then will be coming up with stability analysis of mosquito larvae in three different places, covering: (1) water tank, (2) unused rubber tires, and (3) waterways. Overtime, the number of mosquito larvae will be equal to the minimum number of mosquito larvae in each place. System II will model the growth rate of the mosquito, then coming up with stability analysis of mosquito's growth rate from a larvae to become a mosquito in both female and male species. System III will model the spread of dengue fever population, then will be determined its stability both locally and globally. In analyzing the global stability Lyapunov function will be used. We will also determine the basic reproduction number by using the generation matrix, if the basic reproduction number is less than one then over time the system will go to the point of disease-free equilibrium. Conversely, if the basic reproduction number is greater than one then the system will toward the equilibrium endemic point. Then on System III there will also be an analyzed parameter sensitivity to find out the dynamic behaviour change to the spread of the dengue fever. The results of the sensitivity analysis show that the rate of transmission virus and rate of change of healing has a major impact on the value R_0 in System III. In addition, other results of the sensitivity analysis show that the equilibrium point of disease-free and endemic, has a global asymptotic stability.

Keywords: Mathematical Model, dengue, SIR (Susceptible - Infected - Recovery), equilibrium point, stability, basic reproduction number, *Aedes aegypti*, Lyapunov function

Kupersembahkan skripsi ini kepada orang tua ku

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas penyertaan-Nya selama penulis menyelesaikan penulisan skripsi ini. Skripsi yang berjudul "Analisis Kestabilan Model Matematika Untuk Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Menggunakan Fungsi Lyapunov Logaritma" disusun sebagai syarat untuk menyelesaikan studi Strata-I, Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR), Bandung. Penulis berharap skripsi ini dapat berguna bagi mahasiswa maupun pembaca lainnya.

Selama masa kuliah, penulis mendapat banyak pembelajaran dan pengalaman hidup dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

- Bapak, Mama, Bang Dodo, Bang Sabar, dan Lia yang selalu memberikan nasihat, mendukung penulis dalam segala keadaan, dan bimbingan untuk menyelesaikan skripsi dan tentunya selama perkuliahan.
- Keluarga Tulang dan Nantulang Omi yang sudah membantu dan memberi dukungan kepada penulis selama perkuliahan.
- Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. selaku Dosen Wali, Dosen Pembimbing, dan Dosen Koordinator Skripsi atas tenaga, waktu dan pikiran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan perkuliahan, memberikan saran, arahan, serta didikan yang bermanfaat bagi penulis sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dan studi dengan baik.
- Bapak Dr. Ferry Jaya Permana, ASAI dan Ibu Dr. Erwinna Chendra, selaku Dosen Penguji, terima kasih atas waktu dan saran yang diberikan untuk penulis dalam perbaikan dan pengembangan skripsi ini.
- Seluruh Dosen, Staf Tata Usaha, Pegawai di Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), terima kasih atas segala ilmu, ajaran, waktu serta tenaga yang telah diberikan kepada penulis semasa perkuliahan.
- Adit, Nicholas, Elwin, Indra, Ivan F, Billy, Nita, Erlan, Evan, Boru dan teman-teman angkatan 2014: Kevin B, Citra, Alvido, Neilshan, Yemima, Philip, Steven, Angel, Laras, Mario, Cindy, Meirene, Azka, Michael, Alya, Thasya, Yoshua, Ivan S, Andry, Kevin L, Enrico, Ester, Adinandra, Grace, Agquila dan Christian yang telah memberikan waktu, ilmu, hiburan dan pengalaman hidup selama penulis menempuh studi di UNPAR.
- Teman-teman jurusan Matematika, MPM UNPAR dan PM UNPAR Periode 2016/2017.
- Teman-teman Babaturan: Albert, Danu, Grady, Nanet, Prilly, Sisi, dan Vici, serta teman-teman SMAK Yahya yang telah memberikan waktunya untuk penulis.

Bandung, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|-------------|
| KATA PENGANTAR | xv |
| DAFTAR ISI | xvii |
| DAFTAR GAMBAR | xix |
| DAFTAR TABEL | xxi |
| 1 PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 2 |
| 1.3 Tujuan | 2 |
| 1.4 Batasan Masalah | 2 |
| 1.5 Sistematika Pembahasan | 2 |
| 2 LANDASAN TEORI | 3 |
| 2.1 Persamaan Diferensial | 3 |
| 2.2 Sistem Persamaan Diferensial | 4 |
| 2.3 Titik Keseimbangan dan Kestabilannya | 4 |
| 2.4 Bilangan Reproduksi Dasar dan Matriks Generasi | 6 |
| 2.5 Pelinearan Sistem PD Nonlinear Menggunakan Matriks <i>Jacobian</i> | 7 |
| 2.6 Fungsi Lyapunov | 8 |
| 3 MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH | 9 |
| 3.1 Model Matematika | 9 |
| 3.2 Analisis Model Matematika | 13 |
| 3.2.1 Solusi Analitik dan Analisis Kestabilan Sistem I | 13 |
| 3.2.2 Titik Keseimbangan dan Analisis Kestabilan Sistem II | 14 |
| 3.2.3 Titik Keseimbangan dan Analisis Kestabilan Sistem III | 17 |
| 3.2.4 Kestabilan Asimtotik Global Sistem III dari Dua Titik Keseimbangan | 21 |
| 4 SIMULASI NUMERIK | 25 |
| 4.1 Pergerakan Sistem I Terhadap Waktu | 25 |
| 4.2 Pergerakan Sistem II Terhadap Waktu | 26 |
| 4.3 Pergerakan Sistem III Terhadap Waktu | 28 |
| 4.4 Analisis Sensitivitas Sistem III | 30 |
| 5 SIMPULAN DAN SARAN | 37 |
| DAFTAR REFERENSI | 39 |

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Skema Kompartemen Penyebaran Penyakit Demam Berdarah | 10 |
| 3.2 | Grafik fungsi $g(p)$ | 22 |
| 4.1 | Grafik c_1 terhadap waktu. | 26 |
| 4.2 | Grafik c_2 terhadap waktu. | 26 |
| 4.3 | Grafik c_3 terhadap waktu. | 26 |
| 4.4 | Grafik x terhadap waktu. | 27 |
| 4.5 | Grafik y terhadap waktu. | 27 |
| 4.6 | Grafik z terhadap waktu. | 28 |
| 4.7 | Potret fase terhadap subpopulasi p dan q | 29 |
| 4.8 | Grafik p terhadap waktu | 30 |
| 4.9 | Grafik q terhadap waktu | 30 |
| 4.10 | Hasil simulasi numerik ketika parameter μ diperkecil. | 32 |
| 4.11 | Hasil simulasi numerik ketika parameter β diperbesar. | 33 |
| 4.12 | Hasil simulasi numerik ketika parameter δ diperkecil. | 34 |
| 4.13 | Hasil simulasi numerik ketika parameter σ diperbesar. | 35 |
| 4.14 | Hasil simulasi numerik ketika parameter θ diperkecil. | 36 |

DAFTAR TABEL

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Jenis Kestabilan | 5 |
| 4.1 | Tabel Nilai Parameter dan Syarat Awal Model I | 25 |
| 4.2 | Tabel Nilai Parameter dan Syarat Awal Model II | 27 |
| 4.3 | Tabel Nilai Parameter dan Syarat Awal Model III | 28 |
| 4.4 | Nilai Indeks Sensitivitas | 31 |

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Letak Indonesia yang dilewati garis khatulistiwa menyebabkan Indonesia beriklim tropis. Ciri dari iklim tropis ini adalah memiliki dua musim, musim hujan dan musim kemarau. Hampir semua kawasan yang beriklim tropis terdapat hutan hujan tropis, yaitu hutan yang memiliki curah hujan yang tinggi. Iklim seperti itulah yang membuat hutan hujan tropis paling kaya dalam jumlah flora dan fauna. Selain itu, hutan hujan tropis mendapat sinar matahari yang optimal bagi flora dan fauna sehingga sangat baik untuk pertumbuhan flora dan fauna di dalamnya. Hutan hujan tropis dapat ditemui di kota-kota besar di Indonesia antara lain di Kota Bandung, Medan, Palangkaraya, dan Samarinda. Pada daerah tersebut, serangga khususnya nyamuk, dapat berkembang biak dengan baik.

Nyamuk *Aedes aegypti* dengan jenis kelamin betina merupakan jenis nyamuk yang dapat membawa penyakit demam berdarah [14]. Penyakit demam berdarah dapat ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti* betina yang terinfeksi *Dengue Virus* (DENV). Penyakit demam berdarah adalah satu dari sekian banyak penyakit yang berbahaya di Indonesia. Di Indonesia tercatat pada tahun 2015 sebanyak 1.229 orang meninggal dunia akibat penyakit demam berdarah. Jumlah itu lebih tinggi dari tahun 2014 dimana sebanyak 907 orang meninggal akibat penyakit demam berdarah. Peningkatan dan penyebaran kasus penyakit demam berdarah tersebut dapat disebabkan oleh lingkungan tempat tinggal yang kotor, mobilitas penduduk yang tinggi, perkembangan wilayah perkotaan dan perubahan iklim [15]. Sementara itu sejak tahun 1968 hingga 2009 Organisasi Kesehatan Dunia atau *World Health Organization* (WHO) mencatat Indonesia menjadi negara dengan kasus demam berdarah tertinggi se-Asia Tenggara [1].

Siklus hidup nyamuk *Aedes aegypti* memiliki 2 fase; fase pertama terjadi di dalam air dan fase kedua terjadi di udara. Pada fase yang pertama ada 3 tahap: telur, jentik-jentik dan menjadi pupa (nyamuk belum dewasa/ menuju dewasa); sedangkan pada fase kedua nyamuk berkembang menjadi nyamuk dewasa. Dalam satu siklus metamorfosis membutuhkan waktu kurang lebih 2 minggu, dengan kata lain waktu perkembangan telur menjadi nyamuk dewasa terjadi dalam kurang lebih 2 minggu. Virus demam berdarah dapat menginfeksi manusia hanya melalui nyamuk *Aedes aegypti* betina, saat nyamuk itu menggigit manusia, nyamuk menyebarkan virus ke dalam tubuh manusia dan juga mengambil sumber energi alternatif. Di sisi lain, nyamuk jantan berperan sebagai pemberi makan nyamuk betina dari nektar (cairan manis kaya akan gula) [3].

Pada skripsi ini akan dibentuk model matematika dari penyebaran penyakit demam berdarah, dimana model matematika ini dapat menjadi pedoman dalam menggambarkan penyebaran penyakit saat ini dan juga di masa yang akan datang. Tujuannya untuk menganalisis penyebaran penyakit sehingga dari hasil analisis tersebut penyebaran penyakit dapat berkurang atau bahkan berhenti. Model matematika untuk penyebaran penyakit demam berdarah yang digunakan pada skripsi ini yaitu model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*), dimana populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi manusia rentan (*Susceptible*), subpopulasi manusia terinfeksi (*Infected*), subpopulasi manusia sembuh (*Recovered*) [7].

1.2 Rumusan Masalah

Beberapa masalah akan ditinjau dalam skripsi ini dan dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dari model tersebut?
2. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan dari model tersebut?
3. Bagaimana analisis sensitivitas untuk perubahan parameter dari model tersebut?

1.3 Tujuan

Tujuan penyusunan skripsi ini ialah:

1. Mencari titik kesetimbangan model penyebaran penyakit demam berdarah.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model.
3. Melakukan analisis sensitivitas untuk perubahan parameter *SIR*.

1.4 Batasan Masalah

Model yang digunakan dalam skripsi ini untuk model *SIR* dan jumlah populasi manusia bernilai konstan.

1.5 Sistematika Pembahasan

Berikut diuraikan sistematika pembahasan ini:

Bab 1 : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab 2 : Landasan Teori

Bab ini membahas teori pendukung yang dipakai, yaitu persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, pelinearan sistem persamaan diferensial *nonlinear* menggunakan matriks *Jacobian*, dan fungsi Lyapunov.

Bab 3 : Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah

Bab ini membahas formulasi model *SIR*, titik kesetimbangan model, serta kestabilannya.

Bab 4 : Simulasi Numerik

Bab ini membahas pergerakan Sistem I, II, dan III, termasuk analisis sensitivitas pada sistem III.

Bab 5 : Simpulan dan Saran

Bab ini berisi simpulan dari seluruh pembahasan pada bab sebelumnya serta saran bagi pembaca yang ingin mengembangkan skripsi ini.