

SKRIPSI

PERBANDINGAN METODE ANALISIS HOMOTOPI, METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL, DAN METODE ITERASI VARIASIONAL DALAM MENENTUKAN HAMPIRAN SOLUSI ANALITIK PADA MODEL EPIDEMIK *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED*



Ivan Fanthony

NPM: 2014710029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2018

FINAL PROJECT

**COMPARISON OF HOMOTOPY ANALYSIS METHOD,
DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD, AND
VARIATIONAL ITERATION METHOD FOR DETERMINING
APPROXIMATE SOLUTION OF
SUSCEPTIBLE-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED
EPIDEMIC MODEL**



Ivan Fanthony

NPM: 2014710029

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2018**

LEMBAR PENGESAHAN

PERBANDINGAN METODE ANALISIS HOMOTOPI, METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL, DAN METODE ITERASI VARIASIONAL DALAM MENENTUKAN HAMPIRAN SOLUSI ANALITIK PADA MODEL EPIDEMIK *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED*

Ivan Fanthony

NPM: 2014710029

Bandung, 27 Juli 2018

Menyetujui,

Pembimbing Utama

Dr. Benny Yong

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Dr. Julius Dharma Lesmono

Livia Owen, M.Si.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Julius Dharma Lesmono

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**PERBANDINGAN METODE ANALISIS HOMOTOPI, METODE
TRANSFORMASI DIFERENSIAL, DAN METODE ITERASI
VARIASIONAL DALAM MENENTUKAN HAMPIRAN SOLUSI ANALITIK
PADA MODEL EPIDEMIK
*SUSCEPTIBLE-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED***

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 27 Juli 2018

Meterai Rp. 6000

Ivan Fanthony
NPM: 2014710029

ABSTRAK

Orang-orang yang mendalami ilmu epidemiologi menggunakan model matematika untuk mengerti penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Ahli epidemiologi menggunakan ilmu matematika untuk mengantisipasi wabah penyakit dan memahami dengan lebih baik dinamika penyebaran penyakit pada suatu populasi. Banyak model epidemik yang dapat digunakan untuk menjelaskan dinamika penyebaran suatu penyakit. Skripsi ini menggunakan model epidemik *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (SEIR)*. Penyakit campak merupakan salah satu contoh penyakit menular yang menggunakan model epidemik *SEIR*. Model epidemik *SEIR* memuat empat populasi, yaitu populasi manusia rentan (S), populasi manusia laten (E), populasi manusia terinfeksi (I), dan populasi manusia sembuh (R). Umumnya solusi model epidemik diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Model epidemik *SEIR* diselesaikan dengan menggunakan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional dalam skripsi ini. Pada metode analisis homotopi, parameter bantu sangat berperan dalam mencapai kekonvergenan solusi. Sedangkan untuk metode transformasi diferensial menggunakan fungsi yang sudah ditransformasi dan metode iterasi variasional menggunakan pengali Lagrange. Ketiga metode ini menggunakan deret pangkat dalam menentukan solusinya. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa solusi model epidemik dari ketiga metode ini konvergen ke solusi yang dihasilkan oleh metode Runge-Kutta orde-4 pada selang waktu yang kecil.

Kata-kata kunci: Model *SEIR*, Metode Analisis Homotopi, Metode Transformasi Diferensial, Metode Iterasi Variasional

ABSTRACT

People who are studying epidemiology use mathematical model to understand the spread of a disease in a population. Epidemiologist use mathematics to anticipate an epidemic of a disease and understanding the dynamic of disease transmission for a population better. There are a lot of epidemic models which can be used to explain the dynamic of disease transmission. This final project will be using Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (SEIR) epidemic model. Measles is an example of a disease that use SEIR epidemic model. SEIR epidemic model contains four populations, which are susceptible population (S), exposed population (E), infected population (I), and recovered population (R). In general the solution of epidemic model can be solved by using fourth order Runge-Kutta method. Epidemic model is solved using homotopy analysis method, differential transformation method, and variational iteration method. For homotopy analysis method, auxiliary parameter hold an important task for reaching a convergent solution. Meanwhile differential transformation method uses inverse function and variational iteration method uses Lagrange multiplier. These methods are using power series in order to determine the solutions. The results from numerical simulation show that the solutions from these methods are convergent to solution which is obtained by fourth order Runge-Kutta for a short period of time.

Keywords: SEIR Model, Homotopy Analysis Method, Differential Transformation Method, Variational Iteration Method

For my beloved parents

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat waktu. Skripsi yang berjudul "Penerapan Metode Analisis Homotopi, Metode Transformasi Diferensial, dan Metode Iterasi Variasional dalam Menentukan Hampiran Solusi Analitik Model *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*" disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi Strata-1, Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR), Bandung. Penulis berharap skripsi ini dapat berguna bagi mahasiswa maupun pembaca lainnya.

Selama masa kuliah, penulis mendapatkan banyak pembelajaran dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

- Diri saya sendiri yang telah berhasil menyelesaikan skripsi ini dengan tepat waktu.
- Papa, mama, dan adik, Alvin dan Florence dan juga seluruh keluarga besar yang telah memberikan dukungan dalam proses pengerjaan skripsi ini, baik dalam doa, nasihat, maupun materi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
- Bapak Dr. Benny Yong selaku Dosen Pembimbing yang telah sabar membimbing penulis, memberikan ilmu, arahan, saran, semangat, dan didikan yang bermanfaat sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
- Bapak Dr. J. Dharma Lesmono dan Ibu Livia Owen, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah meluangkan waktu dan memberi saran untuk perbaikan dan pengembangan skripsi ini.
- Bapak Iwan Sugiarto, M.Si selaku Koordinator Skripsi yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk dapat menyelesaikan skripsi.
- Fakultas Teknologi Informasi dan Sains atas kesempatan yang diberikan kepada penulis untuk menempuh studi dengan fasilitas yang baik.
- Seluruh dosen UNPAR terutama FTIS, penulis berterima kasih untuk segala ilmu dan ajaran yang telah diberikan kepada penulis.
- Seluruh staf Tata Usaha FTIS, terima kasih sudah membantu penulis dalam melengkapi syarat yudisium dan wisuda, serta data yang dibutuhkan dalam perkuliahan penulis.
- Seluruh pekarya FTIS, terima kasih telah membantu penulis saat membutuhkan logistik, serta menjadikan lingkungan perkuliahan menjadi tempat yang nyaman dan bersih.
- KOMPEK, Azka Widiarto, Angelina Octaviane, Billy Santoso, Elwin, Grace Ivana, Neilshan Loedy, dan Thasya Juliawati yang telah menemani dan membantu penulis selama masa-masa perkuliahan dengan memberikan semangat dan hiburan dari awal perkuliahan kepada penulis.
- 3 Idiots, Billy dan Elwin yang selalu menemani makan malam, memberikan nasihat, dan memberikan hiburan kepada penulis selama masa perkuliahan.

- HMPS3I, Billy, Elwin, Indra, dan Sam yang juga memberikan penghiburan dengan cerita-cerita seru dan bantuan selama masa perkuliahan.
- Zefanya Natasha, yang baru bertemu pada tahun akhir pembelajaran namun turut membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini dengan memberikan bantuan berupa doa, semangat, dan penghiburan kepada penulis, serta Tante Theresia, Om Darmadi, Mima, dan Nicole.
- Sepupu seperjuangan di Bandung, Waisaka, Ines, dan Wilbert yang telah memberikan bantuan dan penghiburan kepada penulis pada masa perkuliahan.
- Teman-teman angkatan 2014: Kebil, Citra, Vido, Neil, Yemi, Philip, Steven, Amek, Billy, Laras, Mario, Stef, Nita, Elwin, Meirene, Azka, Mike, Boru, Evan, Sam, Adit, Thasya, Josh, Ivan Ste, Andry, Indra, Liman, Enrico, Nicholas, Erlan, Ester, Adi, Grace, dan Akil yang telah menjadi bagian dari kehidupan perkuliahan penulis.
- Aa GoFood yang telah mengantarkan makanan kepada penulis selama penyusunan skripsi berlangsung.
- Teman-teman Palembang, yang juga sedang mengikuti perkuliahan di UNPAR.
- Teman-teman angkatan 2011, 2012, 2013, 2015, dan 2016 yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
- Teman-teman jurusan lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Bandung, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Penulisan	2
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Pemodelan Matematika pada Bidang Epidemiologi	5
2.2 Pembentukan Model <i>SEIR</i>	6
2.3 Metode Analisis Homotopi	7
2.4 Metode Transformasi Diferensial	8
2.5 Metode Iterasi Variasional	9
3 METODE ANALISIS HOMOTOPI, METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL, DAN METODE ITERASI VARIASIONAL	11
3.1 Penerapan Metode Analisis Homotopi untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear	11
3.2 Penerapan Metode Analisis Homotopi untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Tak Linear	13
3.3 Penerapan Metode Transformasi Diferensial untuk Menyelesaikan Persamaan Dife- rensial Linear	16
3.4 Penerapan Metode Transformasi Diferensial untuk Menyelesaikan Persamaan Dife- rensial Tak Linear	17
3.5 Penerapan Metode Iterasi Variasional untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear	17
3.6 Penerapan Metode Iterasi Variasional untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Tak Linear	18
4 SIMULASI NUMERIK	19
4.1 Penyelesaian Model <i>SEIR</i> dengan Menggunakan Metode Analisis Homotopi	19
4.2 Penyelesaian Model <i>SEIR</i> dengan Menggunakan Metode Transformasi Diferensial	26
4.3 Penyelesaian Model <i>SEIR</i> dengan Menggunakan Metode Iterasi Variasional	28
5 SIMPULAN DAN SARAN	35
5.1 Simpulan	35

5.2 Saran	35
DAFTAR REFERENSI	37

DAFTAR GAMBAR

2.1	Model <i>SEIR</i>	6
4.1	Solusi numerik dan hampiran solusi analitik model <i>SEIR</i> dengan MAH	26
4.2	Solusi numerik dan hampiran solusi analitik model <i>SEIR</i> dengan MTD	27
4.3	Solusi numerik dan hampiran solusi analitik model <i>SEIR</i> dengan MIV	29
4.4	Grafik perbandingan <i>S</i> dengan MAH, MTD, dan MIV terhadap RK4	32
4.5	Grafik perbandingan <i>E</i> dengan MAH, MTD, dan MIV terhadap RK4	32
4.6	Grafik perbandingan <i>I</i> dengan MAH, MTD, dan MIV terhadap RK4	33
4.7	Grafik perbandingan <i>R</i> dengan MAH, MTD, dan MIV terhadap RK4	33

DAFTAR TABEL

2.1	Tabel transformasi	9
4.1	Parameter model <i>SEIR</i>	19
4.2	Tabel perbandingan <i>S</i> dengan metode RK4, MAH, MTD, dan MIV	30
4.3	Tabel perbandingan <i>E</i> dengan metode RK4, MAH, MTD, dan MIV	30
4.4	Tabel perbandingan <i>I</i> dengan metode RK4, MAH, MTD, dan MIV	31
4.5	Tabel perbandingan <i>R</i> dengan metode RK4, MAH, MTD, dan MIV	31

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari tentang distribusi penyakit dan determinannya pada manusia. Distribusi penyakit dapat dideskripsikan menurut orang (usia, jenis kelamin, ras), tempat (penyebaran geografis), dan waktu, sedangkan determinan penyakit mencakup penjelasan pola distribusi penyakit tersebut menurut faktor-faktor penyebabnya. Istilah epidemiologi berasal dari kata *epi* yang berarti atas, *demos* yang berarti rakyat/penduduk, dan *logos* yang berarti ilmu sehingga epidemiologi dapat diartikan sebagai ilmu yang mempelajari tentang hal-hal yang terjadi pada penduduk. Epidemiologi tidak terbatas hanya mempelajari tentang epidemi saja. Menurut sejarah perkembangan, epidemiologi dibedakan menjadi epidemiologi klasik dan epidemiologi modern. Ruang lingkup epidemiologi mencakup penyakit menular wabah, penyakit menular bukan wabah, penyakit tidak menular, dan masalah kesehatan lainnya. Orang-orang yang mendalami ilmu epidemiologi menggunakan model matematika untuk mengerti penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Beberapa contoh model epidemik yang umum digunakan adalah model *Susceptible-Infected-Recovered (SIR)*, model *Susceptible-Infected-Recovered-Susceptible (SIRS)*, dan model *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (SEIR)*. Penyakit campak merupakan salah satu contoh penyakit menular yang menggunakan model epidemik *SEIR*. Model epidemik *SEIR* memuat empat populasi, yaitu populasi manusia rentan, populasi manusia laten, populasi manusia terinfeksi, dan populasi manusia sembuh.

Dalam skripsi ini, penyelesaian model *SEIR* akan menggunakan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional. Pada tahun 1992, seorang matematikawan bernama Liao memperkenalkan sebuah metode yang dikenal dengan metode analisis homotopi (MAH) [7]. Metode ini didasarkan pada homotopi, sebuah bagian penting dalam topologi. Metode analisis homotopi adalah metode yang dikembangkan dengan tujuan untuk mendapatkan hampiran solusi analitik deret pangkat dari persamaan diferensial linear maupun tak linear. Keuntungan dari metode ini adalah parameter bantu yang akan digunakan dapat dipilih dengan bebas sehingga solusinya dapat dihitung dengan lebih efisien, lalu validitasnya tidak bergantung pada parameter yang bernilai kecil dari masalah persamaan diferensial linear maupun tak linear, dan metode ini menyediakan cara yang lebih sederhana dalam mencari kekonvergenan dari solusi berbentuk deret pangkat [6].

Menurut [1], metode deret Taylor adalah salah satu metode analitik awal yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Akan tetapi, dikarenakan metode tersebut memerlukan banyak perhitungan untuk turunan dari sebuah fungsi, maka dibutuhkan juga waktu yang cukup lama untuk orde yang lebih tinggi. Metode transformasi diferensial (MTD), sebuah perkembangan dari deret Taylor dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang tentunya memerlukan waktu yang lebih sedikit. Metode transformasi diferensial adalah metode untuk menentukan koefisien dari deret Taylor dengan menyelesaikan persamaan diferensial yang diberikan. Keuntungan dari metode ini adalah dapat diaplikasikan langsung ke persamaan diferensial biasa linear maupun tak linear tanpa adanya linearisasi, diskritisasi, atau pertubasi. Metode ini juga menghasilkan solusi berbentuk deret pangkat dengan tingkat kekonvergenan yang cepat. Ide

awal dari metode transformasi diferensial pertama kali diperkenalkan oleh Zhou [3]. Sementara pada tahun 1999, J. H. He mengemukakan pemikirannya tentang metode iterasi variasional (MIV), sebuah metode yang didasarkan pada fungsi koreksi dan pengali Lagrange, dimana nilai dari pengali Lagrange tersebut dipilih berdasarkan teori variasional sehingga dapat meningkatkan keakuratan dari solusi. Aproksimasi awal biasanya melibatkan koefisien tak diketahui yang dapat ditentukan untuk memenuhi kondisi nilai awal. Metode iterasi variasional tidak membutuhkan adanya transformasi untuk persamaan diferensialnya, baik linear maupun tak linear [9].

Pada skripsi ini, akan ditentukan solusi dari model *SEIR* dengan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah:

1. Bagaimana menentukan solusi dari model *SEIR* dengan menggunakan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional?
2. Bagaimana perbandingan solusi model *SEIR* menggunakan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional dengan solusi numerik menggunakan Runge-Kutta orde-4?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Menentukan solusi model *SEIR* dengan menggunakan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional
2. Membandingkan solusi model *SEIR* menggunakan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional dengan solusi numerik menggunakan Runge-Kutta orde-4

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dari skripsi ini adalah model *SEIR* dengan populasi konstan.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari 5 bab, di antara lain:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendukung dalam pengerjaan skripsi ini antara lain penjelasan tentang pemodelan matematika pada bidang epidemiologi, pembentukan model *SEIR*, dan juga konsep dasar dari metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional.

BAB III : PENERAPAN MAH, MTD, DAN MIV DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR DAN TAK LINEAR

Bab ini membahas tentang penerapan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear dan tak linear.

BAB IV : SIMULASI NUMERIK

Pada bab ini akan dibahas bagaimana penerapan metode analisis homotopi, metode transformasi diferensial, dan metode iterasi variasional dalam menyelesaikan model *SEIR*, serta akan dilihat bagaimana perbandingan dari masing-masing metode.

BAB V : SIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi simpulan dari skripsi ini serta saran untuk pengembangan topik yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya.