

**ANALISA STABILITAS TEKUK RANGKA KAKU  
BERDASARKAN SUDUT STABILITAS  
STANDAR KRITIS**

**MAKALAH**



Oleh :

**ANDANG HANDAKA SETYADI**

624.171  
SET  
a.



**UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
FAKULTAS TEKNIK JURUSAN TEKNIK SIPIL  
BANDUNG, 1986**

85230 R/PTS  
8.10.02.



## 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Umum<sup>1, 3, 5, 6, 7)</sup>

Perkembangan teknologi yang sangat pesat pada abad kedua puluh mengakibatkan kebutuhan manusia menuntut adanya bangunan yang tinggi dan langsing, bangunan seperti itu sudah tidak asing lagi bagi kita dan sering kita jumpai terutama di kota-kota besar. Struktur bangunan seperti itu membutuhkan perhitungan yang lebih teliti dan akurat.

Adanya gaya-gaya aksial pada elemen-elemen struktur senantiasa tidak dapat dihindari, dan gaya-gaya aksial semakin memegang peranan penting pada struktur yang tinggi dan langsing.

Suatu kolom yang langsing dengan pembebanan aksial tekan merupakan subjek dari suatu type perilaku yang dikenal sebagai tekuk. Selama beban aksial pada kolom langsing relatif kecil, penambahan beban tersebut hanya akan menghasilkan perpendekan aksial dari kolom tersebut dan hal ini terjadi sampai suatu beban kritis dicapai, kemudian batang itu akan menekuk.

Dalam menganalisa stabilitas suatu kolom ideal, Leonhard Euler pada tahun 1744 menurunkan rumus beban aksial kritis untuk kolom dengan perletakan sendi-rol, dan kolom ini dikenal sebagai Kolom Euler. Untuk kolom dengan perletakan yang lain dengan syarat batas yang sudah diketahui, seperti jepit-bebas, jepit-jepit, Jepit-rol dan sebagainya, dapat diturunkan rumus beban aksial kritis yang identik dengan rumus yang diturunkan Euler, di mana panjang tekuknya merupakan panjang ekuivalen dari Kolom Euler.

Pada umumnya batang-batang dari suatu struktur tidak berada pada kondisi ideal yang disebutkan di atas, tetapi batang-batang itu bekerja sama membentuk rangka kaku, di mana ujung batang tertahan secara elastis oleh batang-batang lainnya pada titik kumpul batang-batang tersebut.





Pada struktur rangka kaku, ujung-ujung batang dihubungkan secara kaku satu dengan yang lainnya. Akibatnya, tidak ada satu pun batang tekan dapat tertekuk tanpa mengakibatkan deformasi pada batang-batang lainnya dari struktur yang bersangkutan. Artinya, tahanan elastis di ujung salah satu batang tekan tidak hanya dipengaruhi oleh batang-batang yang bertemu di titik hubung tersebut, tetapi dipengaruhi oleh setiap batang yang membentuk sistim struktur rangka kaku itu.

Dengan demikian, untuk mendapatkan beban kritis dari salah satu atau lebih batang tekan suatu rangka kaku, harus diselidiki stabilitas tekuk rangka kaku tersebut sebagai satu kesatuan.

## 1.2 Kondisi Keseimbangan pada Ragam Tekuk <sup>7)</sup>

Deformasi aksial elastis suatu batang yang mengalami beban aksial memenuhi hukum Hooke sebagai berikut :

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}$$

di mana :  $\Delta L$  = deformasi aksial

$N$  = gaya aksial

$L$  = panjang batang

$E$  = modulus elastisitas

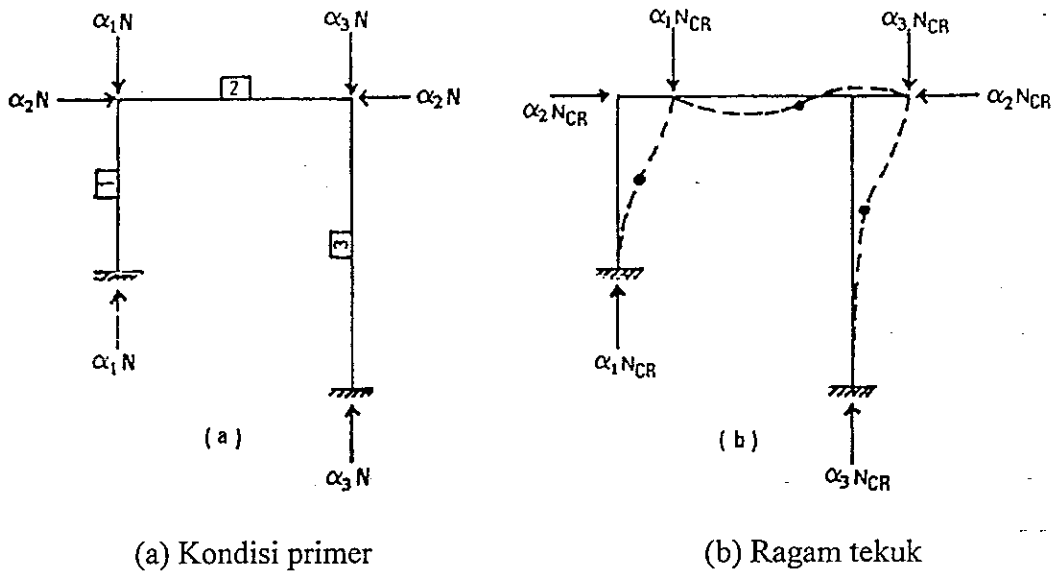
$A$  = luas penampang batang

Pada umumnya, struktur rangka kaku terbuat dari bahan dengan modulus elastisitas yang relatif besar, sehingga deformasi aksial yang terjadi relatif kecil, dengan demikian pengaruh deformasi aksial pada peralihan titik hubung atau gaya-gaya dalam dan momen-momen juga kecil, sehingga dapat diabaikan.



Pada makalah ini, pembahasan stabilitas rangka kaku dilakukan dengan mengabaikan efek deformasi aksial.

Perhatikan Gambar 1.1(a). Setiap batang struktur rangka kaku dibebani gaya aksial. Dengan diabaikannya deformasi aksial, maka struktur itu tidak mengalami deformasi sama sekali. Kondisi tak terdeformasi ini disebut Kondisi Primer.



Gambar 1 Stabilitas rangka kaku

Dengan anggapan Hukum Hooke dapat diterapkan tanpa batasan, maka kondisi primer hanya terjadi bila faktor beban aksial tekan  $N$  belum mencapai nilai kritisnya -  $N_{CR}$ . Bila faktor beban sama dengan  $N_{CR}$ , rangka kaku akan berada dalam kondisi primer atau dalam kondisi tertekuk. Oleh karena itu disebut KEADAAN BERGANDA (*BIFURCATION*). Nilai kritis  $N_{CR}$  disebut FAKTOR BEBAN TEKUK dan bentuk dari kondisi tertekuk disebut RAGAM TEKUK.

Pada kondisi primer, keseimbangan elastis terjadi, tetapi pada ragam tekuk kondisi keseimbangan haruslah diselidiki. Gaya-gaya aksial kritis biasanya besar,



maka momen kopel akibat pemisahan garis kerja pasangan gaya-gaya aksial, apabila ada, harus diperhitungkan. Lendutan akibat momen kopel tersebut di atas dalam persamaan keseimbangan disebut EFEK ORDE KEDUA. Oleh karenanya momen-momen kopel akibat pergeseran garis kerja gaya aksial tersebut dinamakan MOMEN ORDE KEDUA. Mengingat besaran gaya-gaya aksial adalah tetap pada nilai kritisnya, maka nilai momen-momen kopel sekunder merupakan fungsi-fungsi modal.

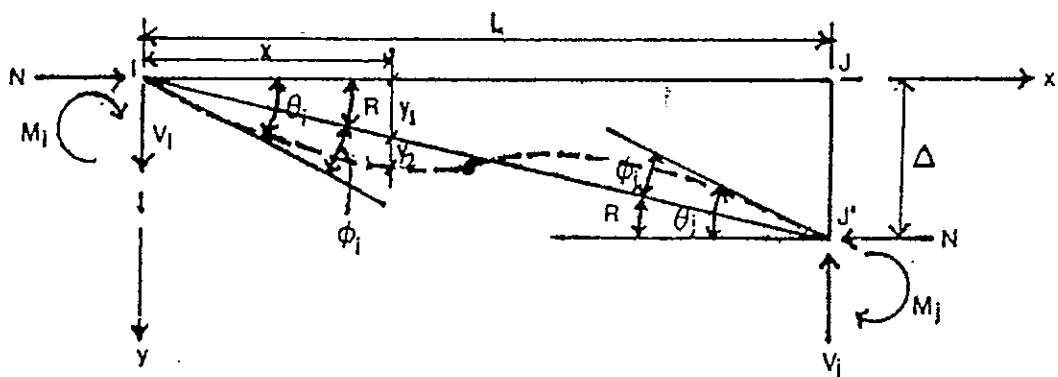
Pada kondisi tertekuk, gaya aksial, gaya geser, dan momen lentur yang bekerja pada kedua ujung batang merupakan fungsi ragam tekuk. Penambahan gaya-gaya aksial modal pada gaya aksial primer tidak lagi menimbulkan efek orde kedua.

### 1.3 Efek Gaya Aksial pada Lenturan Batang<sup>1,2,5,7)</sup>

Tinjau suatu batang seperti pada Gambar 1.2 tanpa peninjauan beban aksial, persamaan keseimbangan yang terjadi adalah:

$$M_i + M_j = V \cdot L$$

Persamaan keseimbangan di atas tidak dipengaruhi deformasi batang.



Gambar 2 Deformasi suatu elemen secara umum.



Adanya gaya aksial yang bekerja dan deformasi lateral pada batang, maka persamaan di atas menjadi tidak akurat lagi. Persamaan keseimbangan tersebut di atas harus dibentuk dalam keadaan batang sudah berdeformasi, sehingga persamaan keseimbangan menjadi :

$$M_i + M_j + N \cdot \Delta = V \cdot L$$

Pada Jarak sejauh  $x$  dari I, gaya aksial ini menambah momen yang terjadi pada penampang X sebesar  $N(Y_1 + Y_2)$ . Pertambahan momen ini disebabkan oleh dua tipe deformasi, yaitu momen orde kedua  $N \cdot Y_2$  akibat dari translasi joint J ke J' sebesar  $\Delta$ , serta  $N \cdot Y_2$  akibat dari lendutan batang.

Jadi dalam menurunkan kekakuan elemen pada analisa stabilitas tekuk rangka kaku harus berdasarkan keadaan di atas, yaitu dalam keadaan struktur sudah berdeformasi.

## 2. ANALISA STRUKTUR DENGAN METODA MATRIKS KEKAKUAN

Dalam analisa struktur dengan matriks dikenal dua macam cara, yaitu :

1. Metoda kekakuan atau *Stiffness Method* atau *Displacement Method*.
2. Metoda fleksibilitas atau *Flexibility Method* atau *Force Method*.

Pada cara yang pertama tujuannya adalah mencari peralihan tempat, di mana titik-titik hubung tertentu dihalangi pergerakannya, sedang pada cara yang kedua bertujuan mencari gaya-gaya dalam dengan jalan melakukan penglepasan gaya-gaya batang tertentu sebagai gaya kelebihan. Dengan demikian, cara yang pertama merupakan invers dari cara yang kedua.

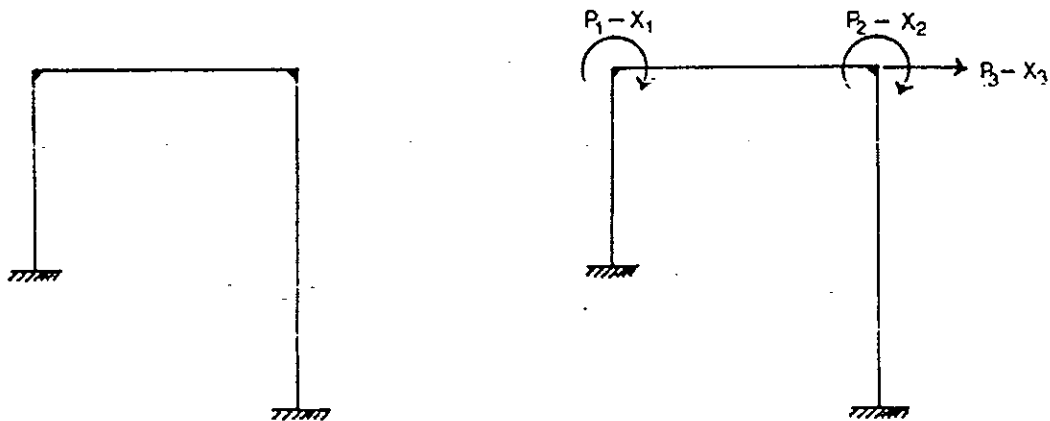
### 2.1 Derajat Ketidaktentuan Kinematis <sup>4, 8, 9)</sup>

Translasi dan/atau rotasi di titik-titik kumpul suatu struktur akan terjadi



bila struktur yang terdiri atas beberapa bagian dikenakan gaya-gaya. Jumlah peralihan bebas titik-titik hubung pada suatu struktur disebut Derajat Ketidaktentuan Kinematis atau jumlah Derajat Kebebasan (*Number of Degree of Freedom*).

Tinjau suatu portal sederhana dari Gambar 3. Apabila deformasi aksial masing-masing batang diabaikan, maka dengan adanya pembebanan pada struktur tersebut akan terjadi rotasi di titik A dan B serta translasi arah horizontal batang AB. Perletakan C dan D terjepit sempurna, maka di titik-titik tersebut tidak terjadi rotasi maupun translasi.



(a) Rangka kaku

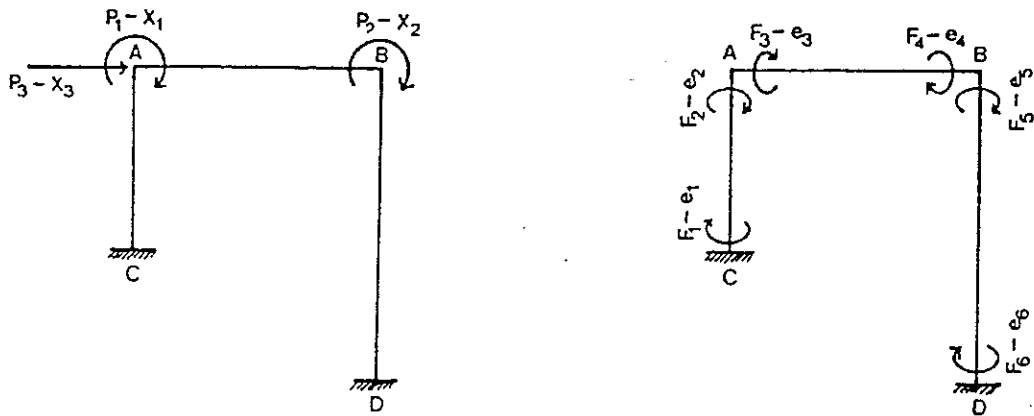
(b) Jumlah derajat kebebasan,  $NP=3$

Gambar 3 Rangka kaku

Jadi derajat ketidaktentuan kinematis atau jumlah derajat kebebasan portal di atas adalah  $NP = 3$ .

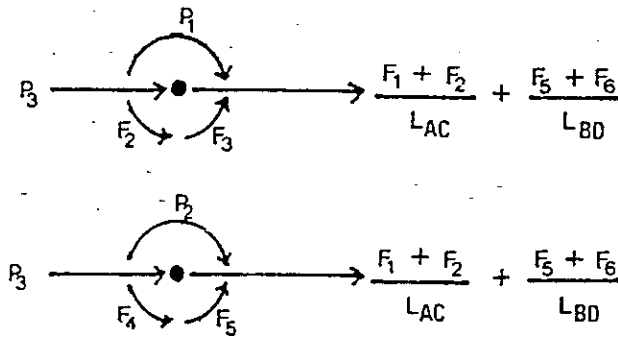
## 2.2 Matriks Statis $[A]^{4,8,9}$

Matriks statis  $[A]$  menyatakan gaya-gaya luar pada titik hubung sebagai fungsi dari gaya-gaya dalam.



(a) Jumlah derajat kebebasan  
P-X, NP=3

(b) Gaya-gaya dalam dan  
putaran sudut ujung batang  
F-e, NF = 6



(c) Free-body joint A dan B

Gambar 4 Digram free-body joint untuk matriks statis [A]

Dari free-body joint A dan B didapat persamaan keseimbangan sebagai berikut :

$$P_1 = +1,0 \cdot F_2 + 1,0 \cdot F_3$$

$$P_2 = +1,0 \cdot F_4 + 1,0 \cdot F_5$$

$$P_3 = -\frac{F_1 + F_2}{L_{AC}} - \frac{F_5 + F_6}{L_{BD}}$$





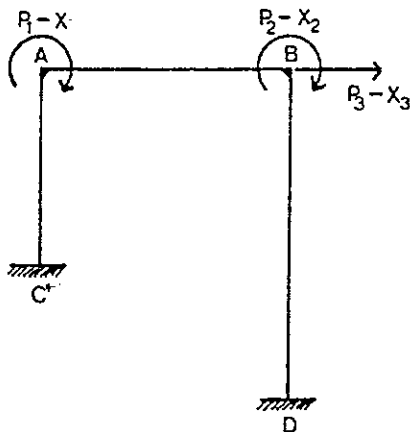
Ketiga persamaan keseimbangan di atas dapat disusun dalam bentuk matriks statis [A], yaitu :

$$[A] = \begin{array}{c|cccccc} & \begin{array}{c} F \\ \hline P \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & & +1,0 & +1,0 & & & \\ 2 & & & & & +1,0 & +1,0 & \\ 3 & & -\frac{1}{L_{AC}} & -\frac{1}{L_{AC}} & & & -\frac{1}{L_{BD}} & -\frac{1}{L_{BD}} \end{array}$$

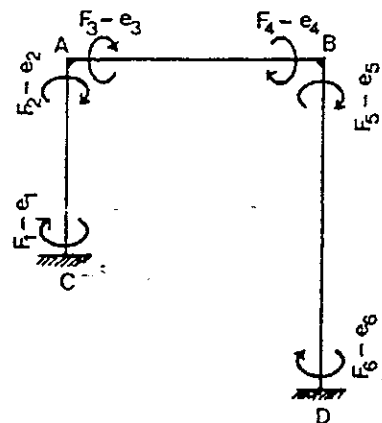
Jadi, ordo matriks statis [A] adalah  $NP \times NF$ .

### 2.3 Matriks Deformasi [B] <sup>4,8,9)</sup>

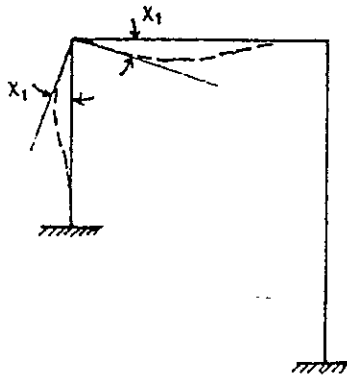
Matriks deformasi [B] menyatakan putaran sudut-putaran sudut ujung batang sebagai fungsi dari peralihan-peralihan titik hubung, baik peralihan putaran sudut maupun peralihan lendutan.



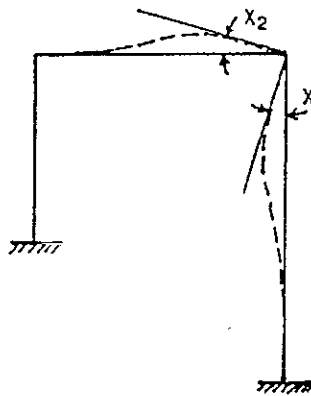
(a) Jumlah derajat kebebasan  
P-x,  $NP=3$



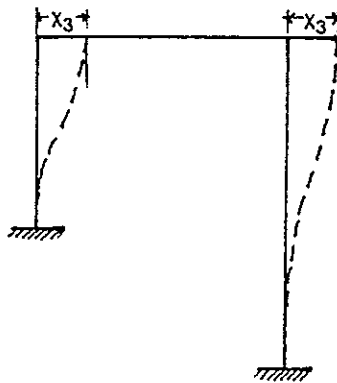
(b) Gaya-gaya dalam dan  
putaran sudut ujung batang  
F-e,  $NF=6$



(c)  $X_1 \neq 0$   
 $e_2 = e_3 = +X_1$   
 $e_1 = e_4 = e_5 = e_6 = 0$



(d)  $X_2 \neq 0$   
 $e_4 = e_5 = +X_2$   
 $e_1 = e_2 = e_3 = e_6 = 0$



(e)  $X_3 \neq 0$   
 $e_1 = e_2 = -\frac{X_3}{L_{AC}}$   
 $e_5 = e_6 = -\frac{X_3}{L_{BD}}$   
 $e_3 = e_4 = 0$

Gambar 5 Diagram peralihan untuk matriks deformasi

Matriks deformasi [B] dapat disusun di mana elemen-elemen setiap kolom diperoleh dari ketiga diagram peralihan pada Gambar 5(c) sampai dengan Gambar 5(e).



Untuk portal di atas, matriks deformasi [B] adalah :

[B] =

e \ x	1	2	3
1			$-\frac{1}{L_{AC}}$
2	+1,0		$-\frac{1}{L_{AC}}$
3	+1,0		
4		+1,0	
5		+1,0	$-\frac{1}{L_{BD}}$
6			$-\frac{1}{L_{BD}}$

Jadi, ordo matriks deformasi [B] adalah  $NF \times NP$ .

Dengan prinsip kerja virtual dapat dibuktikan bahwa transpose dari matriks statis [A] sama dengan matriks deformasi [B], dengan demikian :

$$[A] = [B^T]$$

#### 2.4 Matriks Kekakuan Elemen [S] <sup>4, 8, 9)</sup>

Hubungan antara momen-momen ujung dan putaran sudut ujung batang prismatis yang terlentur tanpa memperhitungkan pengaruh dari momen sekunder akibat gaya normal, dapat dinyatakan baik dalam bentuk matriks fleksibilitas maupun matriks kekakuan.

Dengan cara Clapeyron didapat :

$$\phi_i = +\frac{F_i L}{3EI} - \frac{F_j L}{6EI} \quad (2.4.1a)$$

$$\phi_j = +\frac{F_i L}{6EI} - \frac{F_j L}{3EI} \quad (2.4.1b)$$



Bila persamaan (2.4.1a) dan (2.4.1b) dinyatakan dalam bentuk matriks, maka didapat matriks fleksibilitas [D], yaitu :

$$[D] = \begin{array}{c|cc} & M_i & M_j \\ \hline \phi_i & +f_{ii} \frac{L}{EI} & +f_{ij} \frac{L}{EI} \\ \hline \phi_j & +f_{ji} \frac{L}{EI} & +f_{jj} \frac{L}{EI} \end{array}$$

$$[D] = \begin{array}{c|cc} & M_i & M_j \\ \hline \phi_i & +\frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ \hline \phi_j & -\frac{L}{6EI} & +\frac{L}{3EI} \end{array} \quad (2.4.2)$$

Invers dari matriks fleksibilitas menjadi matriks kekakuan, menjadi :

$$[S] = \begin{array}{c|cc} \begin{array}{c} F \\ \hline e \end{array} & \phi_i & \phi_j \\ \hline M_i & +S_{ii} \frac{EI}{L} & +S_{ij} \frac{EI}{L} \\ \hline M_j & +S_{ji} \frac{EI}{L} & +S_{jj} \frac{EI}{L} \end{array} = \begin{array}{c|cc} \begin{array}{c} F \\ \hline e \end{array} & \phi_i & \phi_j \\ \hline M_i & +\frac{4EI}{L} & +\frac{2EI}{L} \\ \hline M_j & +\frac{2EI}{L} & +\frac{4EI}{L} \end{array}$$

Untuk portal dengan tiga elemen seperti pada Gambar 3 atau Gambar 4, matriks kekakuan elemennya adalah [S] dengan ordo  $6 \times 6$ , yaitu :



[A] =

F \ e	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{4EI}{L_{AC}}$	$\frac{2EI}{L_{AC}}$				
2	$\frac{2EI}{L_{AC}}$	$\frac{4EI}{L_{AC}}$				
3			$\frac{4EI}{L_{AB}}$	$\frac{2EI}{L_{AB}}$		
4			$\frac{2EI}{L_{AB}}$	$\frac{4EI}{L_{AB}}$		
5					$\frac{4EI}{L_{BD}}$	$\frac{2EI}{L_{BD}}$
6					$\frac{2EI}{L_{BD}}$	$\frac{4EI}{L_{BD}}$

Jadi, ordo matriks kekakuan elemen [S] adalah  $NF \times NF$ .

### 2.5 Matriks Kekakuan Global $[K_1] = [ASA^T]$ <sup>4,8,9)</sup>

Matriks statis [A], matriks kekakuan elemen [S], dan matriks deformasi [B] setiap definisi masing-masing dapat dituliskan dalam bentuk persamaan sebagai berikut :

$$\{P\}_{NP \times 1} = [A]_{NP \times NF} \{F\}_{NF \times 1} \quad (2.5.1)$$

$$\{F\}_{NF \times 1} = [S]_{NF \times NF} \{e\}_{NF \times 1} \quad (2.5.2)$$

$$\{e\}_{NF \times 1} = [B]_{NF \times NP} \{X\}_{NP \times 1} \quad (2.5.3)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.5.3) pada persamaan (2.5.2) diperoleh :



$$\begin{aligned}\{F\}_{NF \times 1} &= [S]_{NF \times NF} \{e\}_{NF \times 1} \\ &= [S]_{NF \times NF} [B]_{NF \times NP} \{X\}_{NP \times 1} \\ &= [SB]_{NF \times NP} \{X\}_{NP \times 1}\end{aligned}\quad (2.5.4)$$

Substitusikan persamaan (2.5.4) pada persamaan (2.5.1), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\{P\}_{NP \times 1} &= [A]_{NP \times NF} \{F\}_{NF \times 1} \\ &= [A]_{NP \times NF} [SB]_{NF \times NP} \{X\}_{NP \times 1} \\ &= [ASB]_{NP \times NP} \{X\}_{NP \times 1} \\ &= [ASA]_{NP \times NP} \{X\}_{NP \times 1}\end{aligned}\quad (2.5.5)$$

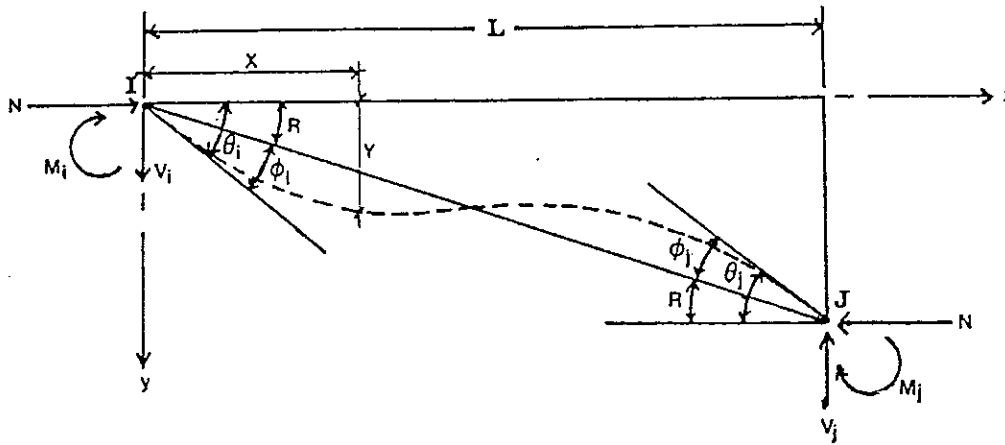
Matriks  $[K_1] = [ASA^T]$  menyatakan gaya-gaya titik kumpul sebagai fungsi dari peralihan titik-titik kumpul untuk seluruh rangka kaku, karena itu matriks  $[K^1] = [ASA^T]$  dinamakan MATRIKS KEKAKUAN GLOBAL. Matriks kekakuan global selalu berbentuk matriks bujur-sangkar dan simetris, dan bila strukturnya statis-stabil, maka matriks  $[K_1]$  adalah non-singular dan ada harga inversnya.

### 3. STABILITAS TEKUK PADA SISTEM STRUKTUR RANGKA KAKU

Dalam menganalisa stabilitas tekuk sistem struktur elastis rangka kaku di mana masing-masing elemen dihubungkan secara kaku dan dikenakan gaya aksial yang dikombinasikan dengan momen lentur, memerlukan suatu penyelidikan efek dari beban aksial terhadap rotasi dan translasi pada kedua ujung elemen. Dalam makalah ini dibahas pengaruh dari gaya aksial tekan terhadap lenturan pada rangka kaku dengan mengabaikan deformasi aksial dan bagaimana menentukan faktor beban aksial kritis serta ratio panjang efektif masing-masing batang berdasarkan sudut stabilitas standar kritis.



### 3.1 Efek Gaya Aksial Primer pada Batang Terlentur <sup>7)</sup>



Gambar 6 Interaksi gaya aksial dengan lenturan

Apabila momen skunder ( $N \cdot y$ ) dimasukkan ke dalam persamaan diferensial kurva elastis, maka fleksibilitas bertambah dan sebaliknya kekakuan berkurang.

Perhatikan Gambar 6, persamaan dari kurva elastis adalah :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Mx$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -(M_i - V_i \cdot x + N \cdot y)$$

$$= -M_i + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{L} - N \cdot y \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{EI} y = \frac{N}{EI} \left( -\frac{M_i}{N} + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{N \cdot L} x \right) \quad (3.1.2)$$

$$\text{Definisikan : } \frac{N}{EI} = k^2 \quad (3.1.3)$$

Substitusikan persamaan (3.1.3) pada persamaan (3.1.2), diperoleh :



$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = k^2 \left( -\frac{M_i}{N} + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{N \cdot L} x \right) \quad (3.1.4)$$

Maka solusi umum persamaan diferensial (3.1.4) adalah :

$$Y = A \sin kx + B \cos kx - \frac{M_i}{N} + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{N \cdot L} x \quad (3.1.5)$$

Substitusikan persamaan (3.1.3) pada solusi umum persamaan diferensial (3.1.5) didapat persamaan kurva elastis :

$$Y = A \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x + B \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x - \frac{M_i}{N} + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{N \cdot L} x \quad (3.1.6)$$

$$\text{Definisikan : } \phi = L \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (3.1.7)$$

Maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.1.7) pada persamaan (3.1.6), persamaan kurva elastis menjadi :

$$Y = A \sin \frac{\phi}{L} x + B \cos \frac{\phi}{L} x - \frac{M_i}{N} + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{N \cdot L} x \quad (3.1.8)$$

Syarat batas :

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad 0 = 0 + B \cos 0 - \frac{M_i}{N} + 0$$

$$B = -\frac{M_i}{N} \quad (3.1.9)$$





$$x = L \rightarrow y = RL ;$$

$$RL = A \sin \phi + \frac{M_i}{N} \cos \phi - \frac{M_i}{N} + \frac{M_i}{N} + \frac{M_j}{N} RL$$

$$0 = A \sin \phi + \frac{M_i}{N} + \cos \phi + \frac{M_j}{N}$$

$$A = -\frac{M_i \cos \phi}{N \sin \phi} - \frac{M_j}{N \sin \phi} \quad (3.1.10)$$

Turunan pertama persamaan kurva elastis (3.1.8) merupakan gradien garis singgung kurva elastis, yaitu :

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{\phi}{L} \cos \frac{\phi}{L} x - B \frac{\phi}{L} \sin \frac{\phi}{L} x + \frac{M_i + M_j + N \cdot R \cdot L}{N \cdot L} \quad (3.1.11)$$

Maka gradien  $\theta_i$  dan  $\theta_j$  pada ujung-ujung batang adalah :

$$\theta_i = \left( \frac{dy}{dx} \text{ pada } x = 0 \right)$$

$$= A \frac{\phi}{L} \cos 0 - B \frac{\phi}{L} \sin 0 + \frac{M_i + M_j}{N \cdot L} + R$$

$$= A \frac{\phi}{L} + \frac{M_i + M_j}{N \cdot L} + R$$

$$\theta_j = \left( \frac{dy}{dx} \text{ pada } x = L \right)$$

$$= A \frac{\phi}{L} \cos \phi - B \frac{\phi}{L} \sin \phi + \frac{M_i + M_j}{N \cdot L} + R$$

Substitusikan persamaan (3.1.7), (3.1.9), dan 3.1.10) pada kedua persamaan di atas, didapat :



$$\theta_i = \frac{M_i L}{EI} \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) + \frac{M_j L}{EI} \left( -\frac{\phi - \sin \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) + R \quad (3.1.12a)$$

$$\theta_j = \frac{M_i L}{EI} \left( -\frac{\phi - \sin \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) + \frac{M_j L}{EI} \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) + R \quad (3.1.12b)$$

Menggunakan persamaan  $\phi_i = \theta_i - R$  dan  $\phi_j = \theta_j - R$ , maka rotasi-rotasi ujung elemen  $\phi_i$  dan  $\phi_j$  merupakan persamaan dalam fungsi momen-momen ujung  $M_i$  dan  $M_j$ , yaitu :

$$\phi_i = \frac{M_i L}{EI} \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) + \frac{M_j L}{EI} \left( -\frac{\phi - \sin \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) \quad (3.1.13a)$$

$$\phi_j = \frac{M_i L}{EI} \left( -\frac{\phi - \sin \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) + \frac{M_j L}{EI} \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) \quad (3.1.13b)$$

Persamaan-persamaan (3.1.13a) dan (3.1.13b) apabila disusun dalam bentuk matriks menjadi matriks fleksibilitas [D] :

$$[D] = \begin{array}{c|cc} & M_i & M_j \\ \hline \phi_i & \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) \frac{L}{EI} & -\left( \frac{\phi - \sin \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) \frac{L}{EI} \\ \hline \phi_j & -\left( \frac{\phi - \sin \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) \frac{L}{EI} & \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\phi^2 \sin \phi} \right) \frac{L}{EI} \end{array} \quad (3.1.14)$$

Persamaan (3.1.14) sama dengan persamaan (2.5.1) pada  $\phi = 0$ .

Dengan menginvers persamaan (3.1.14), didapat matriks kekakuan elemen [S] :

$$[S] = \begin{array}{c|cc} & \phi_i & \phi_j \\ \hline M_i & + \left( \frac{\phi \sin \phi - \phi \cos \phi}{2 - 2 \cos \phi - \phi \sin \phi} \right) \frac{EI}{L} & + \left( \frac{\phi - \phi \sin \phi}{2 - 2 \cos \phi - \phi \sin \phi} \right) \frac{EI}{L} \\ \hline M_j & + \left( \frac{\phi - \phi \sin \phi}{2 - 2 \cos \phi - \phi \sin \phi} \right) \frac{EI}{L} & + \left( \frac{\phi \sin \phi - \phi \cos \phi}{2 - 2 \cos \phi - \phi \sin \phi} \right) \frac{EI}{L} \end{array} \quad (3.1.15)$$



Yang menyatakan momen-momen ujung elemen  $M_i$  dan  $M_j$  sebagai fungsi dari rotasi-rotasi ujung elemen  $\phi_i$  dan  $\phi_j$ . Persamaan (3.1.15) sama dengan persamaan (2.4.3) pada  $\phi = 0$ .

Dengan demikian pada nilai tertentu dari  $\phi$  akan didapat koefisien-koefisien fleksibilitas dan kekakuan yang sesuai dengan  $\phi$  yang bersangkutan (Tabel 1).

Tabel 1 Koefisien kekakuan dan fleksibilitas

$\phi$	$S_{ii}$	$S_{ij}$	$F_{ii}$	$F_{ij}$
0.1	3.998666	2.000333	.333556	.166861
0.2	3.994664	2.001335	.334226	.167448
0.3	3.987986	2.003008	.335351	.168433
0.4	3.978622	2.005360	.336944	.169831
0.5	3.966557	2.008398	.339025	.171659
0.6	3.951772	2.012135	.341618	.173943
0.7	3.934243	2.016585	.344757	.176713
0.8	3.913942	2.021764	.348482	.180010
0.9	3.890834	2.027693	.352844	.183883
1	3.864883	2.034395	.357907	.188395
1.1	3.836043	2.041897	.363748	.193620
1.2	3.804265	2.050230	.370461	.199653
1.3	3.769494	2.059427	.378165	.206607
1.4	3.731667	2.069528	.387006	.214628
1.5	3.690715	2.080576	.397168	.223896
1.6	3.646562	2.092619	.408882	.234642
1.7	3.599124	2.105712	.422449	.247159
1.8	3.548306	2.119914	.438255	.261833
1.9	3.494007	2.135294	.456816	.279174
2	3.436112	2.151926	.478829	.299875
2.1	3.374496	2.169894	.505256	.324894
2.2	3.309021	2.189291	.537473	.355599

ANALISA STABILITAS TEKUK RANGKA KAKU  
BERDASARKAN SUDUT STABILITAS  
STANDAR KRITIS



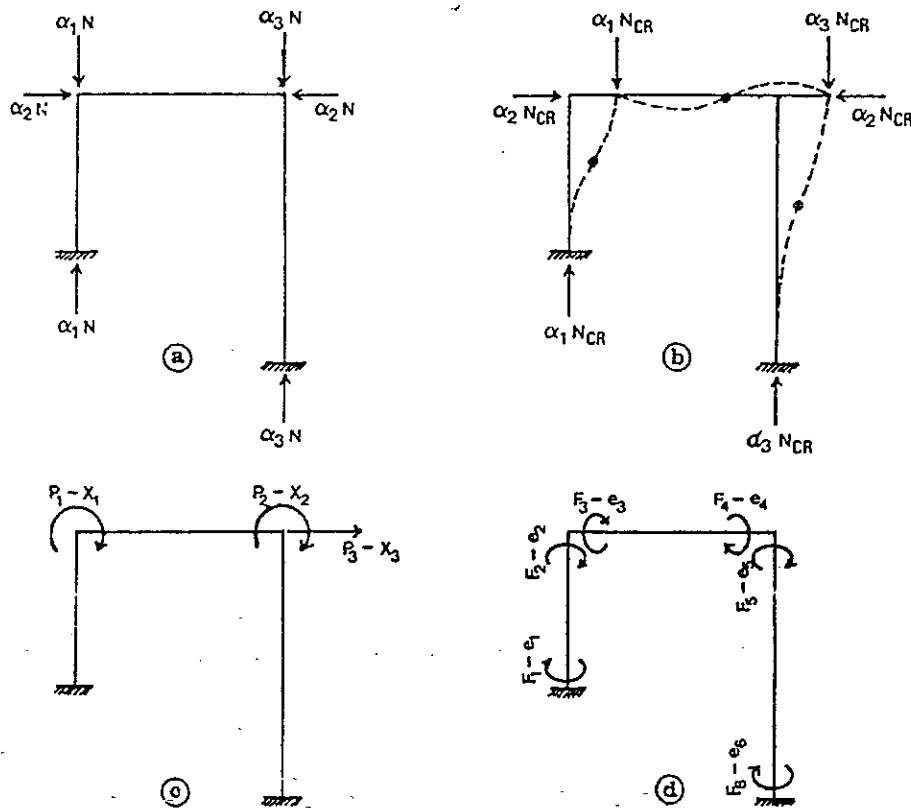
Tabel 1 Koefisien kekakuan dan fleksibilitas [Lanjutan]

$\phi$	$S_{ii}$	$S_{ij}$	$F_{ii}$	$F_{ij}$
2.3	3.239536	2.210221	.577507	.394013
2.4	3.165872	2.232801	.628480	.443250
2.5	3.087843	2.257160	.695459	.508369
2.6	3.005245	2.283445	.787253	.598171
2.7	2.917850	2.311819	.920649	.729433
2.8	2.825404	2.342469	1.132088	.938585
2.9	2.727625	2.375602	1.518338	1.322384
3	2.624199	2.411455	2.449529	2.250945
3.1	2.514773	2.450295	7.855297	7.653890
3.2	2.398951	2.492430	-5.246613	-5.451054
3.3	2.276287	2.538207	-1.805126	-2.012833
3.4	2.146275	2.588028	-1.026241	-1.237465
3.5	2.008341	2.642355	-.6811'15	-.896136
3.6	1.861830	2.701723	-.485750	-.704878
3.7	1.705991	2.766752	-.359571	-.583148
3.8	1.539956	2.838170	-.270940	-.499349
3.9	1.362722	2.916831	-.204893	-.438562
4	1.173114	3.003744	-.153423	-.392837
4.1	.969755	3.100112	-.111848	-.357557
4.2	.751013	3.207374	-.077239	-.329867
4.3	.514939	3.327272	-.047655	-.307922
4.4	.259187	3.461928	-.021748	-.290485
4.5	-.019100	3.613953	.001462	-.276713
4.6	-.323435	3.786594	.022723	-.266031
4.7	-.658194	3.983935	.042633	-.258052
4.8	-1.028907	4.211186	.061702	-.252538
4.9	-1.442663	4.475089	.080393	-.249376
5	-1.908722	4.784519	.099163	-.248567

Sumber : Wang, C.K., "Computer in Advanced Structural Analysis", Intext Educational Pubiisher, New York, 1973.



### 3.2 Matriks Kekakuan Stabilitas [K] pada Keadaan Berganda <sup>7)</sup>



Gambar 7 Membentuk matriks  $[K] = [K_1] + [K_2]$   
 (a) Kondisi primer      (b) Ragam tekuk  
 (c) Digram P-x          (d) Diagram F-e

Tinjau rangka kaku pada Gambar 7, kondisi-kondisi keseimbangan pada ragam tekuk adalah :

$$P_1 \doteq F_2 + F_3$$

$$P_2 = F_4 + F_5$$

$$P_3 = - \frac{F_1 + F_2}{L_1} - \frac{\alpha_1 N_{cr} X_3}{L_1} - \frac{F_5 + F_6}{L_3} - \frac{\alpha_3 N_{cr} X_3}{L_3}$$

Persamaan di atas apabila disusun dalam bentuk matriks, menjadi :

$$\{P\} = [A] \{F\} + [K_2] \{x\} \tag{3.2.1}$$



di mana matriks statis [A] adalah matriks statis pada persamaan (2.2.1) dan

$$[K_2] = N_{cr}$$

P \ X	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	$-\frac{\alpha_1}{L} \quad -\frac{\alpha_3}{L}$

Dengan demikian matriks ( $K_2$ ) menyatakan gaya-gaya akibat goyangan yang diimbangi oleh gaya-gaya geser yang timbul karena momen-momen kopel sekunder untuk setiap peralihan goyangan.

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.5.4) pada persamaan (3.2.1) didapat :

$$\{P\} = [A] [SB] \{X\} + [K_2] \{X\}$$

$$\{P\} = [ASA^T] \{X\} + [K_2] \{X\}$$

$$\{P\} = [K] \{X\} \tag{3.2.2}$$

$$[K] = [K_1] + [K_2] \tag{3.2.3}$$

$$[K_1] = [ASA^T] \tag{3.2.3b}$$

dan elemen-elemen matriks kekakuan elemen [S] untuk memformulasi matriks [K<sub>1</sub>] didapat dari persamaan (3.1.15).

Dalam keadaan berganda, hanya dengan gaya-gaya aksial kritis saja tanpa bekerjanya gaya-gaya luar lainnya, kekakuan rangka kaku adalah sedemikian rupa sehingga masih dapat dipertahankan keseimbangan dan deformasi yang kompatibel. Keadaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\{P\} = [K] \{X\} = 0 \tag{3.2.4}$$

Pada kondisi primer di mana struktur dalam keadaan tak terdeformasi, maka semua peralihan pada derajat kebebasannya adalah nol, maka persamaan (3.2.4)



menghasilkan solusi yang trivial. Agar didapat solusi nontrivial, maka determinan dari matriks kekakuan [K] haruslah sama dengan nol. Jadi batasan umum untuk menyatakan stabilitas adalah :

$$\text{DET [K]} = 0 \quad (3.2.5)$$

### 3.3 Sudut Stabilitas Standar Kritis ( $\phi_{CR}$ )<sup>7)</sup>

Seperti halnya gaya aksial tekuk dari Euler, pada rangka kaku juga terdapat suatu deret faktor gaya aksial tekuk  $N_{CR}$  sesuai dengan ragam tekuk masing-masing di mana determinan matriks kekakuan stabilitas [K] dari persamaan (3.2.3) adalah nol. Untuk keperluan praktis pada struktur teknik sipil, maka nilai terendah dari deret gaya aksial tekuk yang diperlukan, dan bentuk dari struktur pada kondisi tertekuk yang bersangkutan dinamakan RAGAM-DASAR.

Karena koefisien-koefisien kekakuan ( $S_{ii}$  ,  $S_{ij}$ ) dan koefisien-koefisien fleksibilitas ( $D_{ii}$  ,  $D_{ij}$ ) dari suatu batang yang mengalami pembebanan aksial tekan merupakan fungsi-fungsi dari suatu sudut  $\phi_m$  yang didefinisikan sebagai :

$$\phi_m = L_m \sqrt{\frac{\alpha_m N}{E I_m}} \quad (3.3.1)$$

maka sudut  $\phi_m$  dinamakan sudut stabilitas dari batang ke-m.

Apabila suatu nilai panjang dan momen inersia (besaran-besaran itu tidak perlu merupakan salah satu panjang dan momen inersia aktual dari batang-batang yang ada) dipilih sebagai nilai-nilai satandar  $L_C$  dan  $I_C$ , maka sudut stabilitas standar adalah :

$$\phi_m = L_m \sqrt{\frac{N}{E I_m}} \quad (3.3.2)$$



Dengan demikian, untuk setiap sudut stabilitas standar  $\phi_C$  yang dipilih, terdapat suatu nilai determinan dari matriks kekakuan stabilitas [K] suatu struktur. Nilai terendah dari  $\phi_C$  yang menghasilkan determinan matriks kekakuan stabilitas [K] sama dengan nol adalah SUDUT STABILITAS STANDAR KRITIS  $(\phi_{CR})_C$  :

$$(\phi_C) = L_C \sqrt{\frac{N_{CR}}{E I_C}} \quad (3.3.3)$$

### 3.4 Rasio Panjang Efektif Batang Ke-m $(K_m)^2$

Panjang efektif  $(K_m \cdot L_m)$  batang ke-m dari suatu rangka kaku didefinisikan sebagai panjang akivalen kolom Euler di mana beban Euler-nya sama dengan  $\alpha_m \cdot N_{CR}$ , jadi :

$$\frac{\pi^2 E I_m}{(K_m \cdot L_m)^2} = \alpha_m \cdot N_{CR}$$

didapat :

$$K_m = \sqrt{\frac{\pi^2 E I_m}{(\alpha_m N_{CR} L_m)^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{(\phi_{CR})_m^2}} = \frac{\pi}{(\phi_{CR})_m} \quad (3.4.1)$$

Perbandingan  $\phi_m$  terhadap  $\phi_C$  adalah :

$$\beta_m = \frac{\phi_m}{\phi_C} = \frac{L_m}{L_C} \sqrt{\frac{\alpha_m}{(I_m / I_C)}} \quad (3.4.2)$$

Maka persamaan (3.4.1) menjadi :

$$K_m = \frac{\pi}{\beta_m (\phi_{CR})_C} \quad (3.4.3)$$

Dengan diketahuinya panjang efektif batang ke-m, maka kelangsingan batang ke-m adalah :





$$\lambda_m = \frac{K_m \cdot L_m}{I_m} \quad (3.4.4)$$

di mana :  $i_m$  = jari-jari inersia batang ke-m, dan tegangan kritis batang ke-m adalah :

$$(\sigma_{CR})_m = \frac{\pi^2 E}{\lambda_m^2} \quad (3.4.5)$$

#### 4. KESIMPULAN

Analisa stabilitas tekuk rangka kaku berdasarkan sudut stabilitas standar kritis ini bertujuan menghitung besarnya Faktor Beban Tekuk dan panjang efektif tekuk dari masing-masing batang dengan gaya aksial tekan yang membentuk sistim rangka kaku tersebut pada ragam dasar tekuknya.

Pada sistim rangka kaku di mana ujung-ujung batang tertahan secara elastis di titik hubungannya, tidak ada satupun batang dapat tertekuk tanpa menimbulkan deformasi dari batang-batang lainnya. Sedangkan semakin besar gaya aksial tekan, maka kekakuan elemen semakin berkurang sampai elemen itu kehilangan kekakuannya. Dengan demikian, intensitas gaya aksial tekan masing-masing batang mempengaruhi stabilitas tekuk dari struktur rangka kaku yang bersangkutan.

Faktor beban tekuk  $N_{CR}$  dari suatu rangka kaku merupakan fungsi dari ragam tekuknya. Untuk keperluan praktis, faktor beban tekuk terendah yang menentukan, yakni yang terjadi pada ragam dasar. Ragam tekuk yang lebih tinggi dan faktor beban tekuk yang bersangkutan tidak dibahas di sini, tetapi dapat dihitung dengan cara yang sama dengan memasukkan nilai sudut stabilitas standar yang lebih besar dari sudut stabilitas standar kritis yang menghasilkan ragam dasar.

Karena intensitas gaya aksial tekan memegang peranan penting pada stabilitas tekuk rangka kaku, maka pola pembebanan dan intensitas beban



menentukan stabilitas dari struktur rangka kaku yang bersangkutan. Dengan demikian untuk analisa stabilitas tekuk rangka kaku, beban tetap/mati dipilih sesuai dengan beban rencana, sedangkan untuk beban bergerak/hidup harus ditempatkan sedemikian rupa sehingga menghasilkan gaya aksial tekan maksimum terutama pada kolom-kolom yang memungkinkan timbulnya goyangan (*sidesway*) di mana goyangan menyebabkan timbulnya momen orde kedua.

Dari analisa stabilitas tekuk rangka kaku dapat diperoleh faktor beban tekuk  $N_{CR}$ , maka dapat diketahui faktor perbesaran beban yang masih dapat diijinkan untuk struktur yang bersangkutan, dengan catatan pola pembebanan haruslah tetap, hanya intensitasnya yang bertambah.

Dalam disain struktur rangka kaku, agar diperoleh disain yang ekonomis, maka faktor perbesaran beban yang masih dapat diijinkan haruslah sekecil mungkin, tetapi dengan tidak melupakan faktor keamanan yang disyaratkan.

Selain dianalisa stabilitasnya, struktur rangka kaku harus pula dianalisa terhadap kekuatan bahannya. Dari kedua analisa ini dapat ditentukan intensitas beban maksimum yang dapat diijinkan.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

1. Chajes, A, *Principles of Structural Stability Theory*. Prentice-Hall, Inc. 1974.
2. Chen, W.F. and Atsuta, T., *Theory of Beam-Columns McGraw-Hill Company*, New York, 1976.
3. Gerard, G., *Introduction to Structural Stability Theory*, McGraw-Hill Company, New York, 1962.
4. Hadipratomo, W., *Analisa Struktur dengan Matriks*, Catatan kuliah Unpar, Bandung, 1985.
5. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *The ory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Company Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1961.





6. Timoshenko, S.P., *Strength of Material*, Part II-Advanced, Third Edition, Van Nostrand Reinhold, New York, 1965., pp 145 - 167.
7. Wang, C.K., *Computer Methods in Advanced Structural Analysis*, Intext Educational Publisher, New York, 1973.
8. Wang, C.K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill Company, New York, 1983.
9. Wang, C.K., *Matrix Methods of Structural Analysis*, Second Edition, International Textbook Company, Scranton-Pensylvania, March 1970.