SKRIPSI

PERBANDINGAN ANTARA METODE SPEKTRAL DAN BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN KLEIN-GORDON SATU DIMENSI

ARVIN CANSIUS

NPM: 2013710025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2017

FINAL PROJECT

COMPARISON BETWEEN SPECTRAL AND FINITE DIFFERENCE METHODS IN ONE-DIMENSIONAL KLEIN-GORDON EQUATION

ARVIN CANSIUS

NPM: 2013710025

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY

2017

LEMBAR PENGESAHAN

PERBANDINGAN ANTARA METODE SPEKTRAL DAN BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN KLEIN-GORDON SATU DIMENSI

ARVIN CANSIUS

NPM: 2013710025

Bandung, 14 Juli 2017

Menyetujui,

Pembimbing

Prof. M. Wono Setya Budhi, Ph.D.

Ketua Tim Penguji

Erwinna Chendra, M.Si.

Anggota Tim Penguji

Livia Owen, M.Si.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Julius Dharma Lesmono

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PERBANDINGAN ANTARA METODE SPEKTRAL DAN BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN KLEIN-GORDON SATU DIMENSI

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 14 Juli 2017

ARVIN CANSIUS
NPM: 2013710025

ABSTRAK

Metode spektral merupakan salah satu metode untuk mencari solusi numerik dari persamaan diferensial biasa ataupun parsial. Skripsi ini membahas tentang struktur dari metode spektral Chebyshev. Struktur tersebut dibagi menjadi dua jenis, yaitu metode spektral penurunan Chebyshev dan spektral Chebyshev melalui Fast Fourier Transform (FFT). Untuk melihat akurasi dari metode ini, penulis membandingkannya dengan metode beda hingga pada persamaan Klein-Gordon satu dimensi. Selain itu, penulis menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat untuk masalah diskritisasi waktu. Dengan bantuan program `MATLAB`, metode spektral matriks penurunan Chebyshev dengan diskritisasi waktu metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode terbaik untuk menyelesaikan persamaan Klein-Gordon dengan parameter dan syarat awal yang ditentukan. Hasil nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) dan maksimum errornya mencapai 10^{-12} atau 10^{-13}.

Kata-kata kunci: metode beda hingga, metode spektral, metode Euler, metode Runge-Kutta orde empat dan persamaan Klein-Gordon satu dimensi.

ABSTRACT

Spectral method is one of methods to find a numerical solution of ordinary or partial differential equations. This final project discussed of the structure of a Chebyshev spectral method. The structure divided into two parts, that is a Chebyshev differentiation matrices and spectral Chebyshev through Fast Fourier Transform (FFT). To see an accuracy of this method, the writer compares it with the finite difference method on one-dimensional Klein-Gordon equation. The writer uses Euler method and second and fourth order of Runge-Kutta method to handle discretization time. With an aid of `MATLAB`, spectral methods of Chebyshev differentiation matrices with fourth order of Runge-Kutta method as discretization time is the best method to solve Klein-Gordon one-dimensional equation with some parameters and conditions. The result is Root Mean Square Error (RMSE) and maximum error reach 10^{-12} or 10^{-13}.

Keywords: finite difference method, spectral method, Euler Method, fourth-order Runge-Kutta method and one-dimensional Klein-Gordon equation.

Think globally. Act locally.

-Spectral method [1]

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan penyertaan-Nya yang melimpah sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan tepat waktu. Skripsi yang berjudul "Perbandingan Antara Metode Spektral dan Beda Hingga pada Persamaan Klein-Gordon Satu Dimensi" disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi Strata-1, Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR), Bandung. Penulis berharap skripsi ini dapat berguna bagi mahasiswa maupun pembaca lainnya.

Dalam menyelesaikan skripsi ini penulis dibimbing, diberi bantuan, serta dukungan dari orang-orang di sekitar penulis yang sangat membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

- Orang tua serta kakak penulis yang selalu memberikan doa dan dukungan selama atau sebelum penulis mengerjakan skripsi ini.
- Bapak Prof. M. Wono Setya Budhi, Ph. D. selaku dosen pembimbing serta yang telah sabar membimbing penulis, memberikan ilmu, arahan, saran, semangat dan didikan yang bermanfaat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
- Ibu Erwinna Chendra, M.Si. selaku Dosen Penguji 1 dan Ibu Livia Owen, M.Si. selaku Dosen Penguji 2 yang telah meluangkan waktu dan memberi saran untuk perbaikan dan pengembangan pada skripsi ini agar menjadi lebih baik lagi.
- Bapak Taufik Limansyah, M.T. selaku dosen wali yang telah memberikan saran selama penulis kuliah di UNPAR.
- Bapak Dr. Ferry Jaya Permana selaku dekan FTIS dan Bapak Dr. Julius Dharma Lesmono selaku ketua jurusan matematika yang telah mengurus seluruh kegiatan selama perkuliahan.
- Bapak Liem Chin, M.Si. , Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. , Bapak Dr. Benny Yong , Ibu Maria Anstasia, M.Si dan Bapak Eric sebagai dosen matematika yang telah menemani penulis dalam perkuliahan.
- Bapak Haryanto Siahaan, Ph.D. yang meluangkan waktunya untuk membantu penulis dalam penulisan latar belakang dari persamaan Klein-Gordon.
- Seluruh dosen-dosen atau asisten dosen yang pernah mengajar penulis, terima kasih atas segala ilmu dan ajaran yang telah diberikan kepada penulis.
- Seluruh karyawan Tata Usaha FTIS. Terima kasih telah membantu penulis dalam mengumpulkan syarat kelengkapan wisuda dan semua proses kelengkapan data dalam perkuliahan penulis.
- Seluruh Pekarya FTIS, terima kasih atas bantuannya selama penulis kuliah.
- Fakultas Teknologi Informasi dan Sains atas kesempatan yang telah diberikan kepada penulis untuk menempuh studi dengan fasilitas-fasilitas yang sangat baik.

- Rekan-rekan admin FTIS yang tidak bisa disebutkan satu-persatu karena sejujurnya penulis tidak tahu nama dari semua rekan admin FTIS.
- Grup pemodelan FTIS yang memberikan pengalaman yang sangat indah maupun yang buruk.
- Untuk grup *line* 'Indopora Challenge' yang mau menemani penulis begadang di KFC sambil memperhatikan suka duka dari proyek perusahaan konstruksi Indopora.
- Untuk grup *line* 'Es air laut matang' yang sangat menghibur penulis dengan lawakan-lawakan tentang 'Si Hantu Jembatan dari Nata Endah'.
- Christo yang pernah menyarankan penulis untuk tidak lulus skripsi. Danny yang sudah menghambat penulis dalam mengerjakan skripsi ini. Retta, Bella, Uci yang selalu ada untuk membuat saya terhibur (permintaan dari orangnya langsung).
- Teman-teman angkatan 2013 : Marcel, Will, Daniel, Joan, Acelus, Itiw, Michelle, Caroline, Florence, Jessica, Uci, Ragil, Bima, Bella, Kristin, Retta, Aditya, Sesil dan Christo yang telah memberikan hiburan dan pengalaman hidup selama penulis menempuh studi Matematika di UNPAR.
- Almarhum Romly Ronaldis Y. A. yang telah menghibur penulis dengan keceriannya selama masa hidupnya.
- Teman-teman angkatan 2013 yang tidak dapat melanjutkan studinya di Matematika Unpar, yaitu Junedi, Dewi, Agave, Andin, Widya dan Diella.
- Ko Erwin S.Si. yang telah menemani penulis tertawa atas kelakuan Christo. Semoga Ko Erwin sukses dalam menempuh S2 nya (permintaan dari orangnya langsung).
- Teman-teman matematika angkatan 2010, 2011, 2012 dan 2014 yang tidak bisa disebutkan satu-persatu.
- Andi anak fisika 2015 yang menemani penulis di kampus dalam pembuatan skripsi ini.
- Wulan, Andre, Aswin, Ernest, Martin, Stefan dan Samuel= sebagai teman-teman SMA yang menemani penulis dalam penyusunan skripsi ini.
- Gemboel, Warning, tempat makan padang di Jalan Bukit Jarian, KFC Pajajaran atau Setiabudhi, Pa Moes, Sabana, OBC dan Balkut sebagai penyedia makanan selama penulis kuliah di UNPAR.
- Untuk seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu disini.

Bandung, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu topik matematika yang banyak diterapkan di bidang sains adalah persamaan diferensial biasa (PDB) atau persamaan diferensial parsial (PDP). Sebagai contoh untuk masalah-masalah fisika seperti mekanika fluida, mekanika kuantum, vibrasi, persamaan gelombang linear atau nonlinear, dan bidang lainnya. Untuk menyelesaikan masalah tersebut dalam bentuk persamaan diferensial yang sederhana, solusinya dapat dicari secara analitik. Namun, perlu disadari bahwa tidak setiap persamaan diferensial dapat dicari secara analitik, khususnya dalam bentuk PDP. Maka dari itu dengan bantuan komputer, solusi persamaan diferensial dapat dicari secara numerik. Meskipun hasil dari solusi numerik selalu memiliki tingkat kesalahan atau error, hal tersebut dapat diminimalisir dengan memperbanyak titik interpolasi.

Secara garis besar, ada beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa atau parsial secara numerik, yaitu

- metode beda hingga yang muncul pada tahun 1950an,
- metode elemen hingga yang muncul pada tahun 1960an, dan
- metode spektral yang muncul pada tahun 1970an.

Kelebihan dari metode spektral dibandingkan dengan metode lain terletak pada tingkat akurasi[1]. Selain itu, metode spektral juga dapat dipermudah menjadi bentuk lain, yaitu polinom Chebyshev dengan memanfaatkan Transformasi Fourier Cepat atau *Fast Fourier Transform* (FFT).

Pada skripsi ini, akan dibahas persamaan Klein-Gordon satu dimensi yang biasa dipakai dalam ilmu medan kuantum atau mekanika kuantum relativistik. Persamaan ini dibuat oleh dua orang fisikawan bernama Oskar Klein dan Walter Gordon pada tahun 1926. Awalnya persamaan ini dipakai untuk masalah elektron relativistik. Dengan bantuan persamaan Dirac, persamaan Klein-Gordon digunakan untuk memodelkan bentuk relativistik dari suatu elektron. Lalu, seseorang fisikawan bernama Higgs Boson mengemukakan bahwa bentuk dasar suatu partikel dapat dijelaskan melalui persamaan Klein-Gordon [4].

Seiring berkembangnya jaman, Schrodinger mengemukakan bahwa persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan gelombang kuantum yang dipakai untuk menjelaskan tentang persamaan yang dibuatnya. Bentuk persamaan Klein-Gordon adalah bentuk persamaan gelombang klasik yang berpengaruh pada sumbu horizontal dan vertikal [5]. Karena itu, persamaan Klein-Gordon dipilih oleh penulis karena persamaan tersebut adalah bentuk dasar dari persamaan klasik gelombang.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah-masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah:

1. Bagaimana pemakaian dari metode spektral?
2. Bagaimana akurasi dari metode spektral untuk mencari turunan pertama?

3. Bagaimana akurasi dari metode spektral untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial parsial?
4. Bagaimana hasil perbandingan antara metode spektral dan metode beda hingga dengan diskritisasi waktu metode Euler dan metode Runge-Kutta pada persamaan Klein-Gordon dengan syarat awal fungsi sinus?
5. Bagaimana hasil perbandingan antara metode spektral dan metode beda hingga dengan diskritisasi waktu metode Euler dan metode Runge-Kutta pada persamaan Klein-Gordon dengan syarat awal fungsi Gauss?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah memperlihatkan penggunaan dari metode spektral pada masalah turunan biasa atau masalah nilai batas. Selain itu, untuk melihat perbandingan antara metode spektral dan metode beda hingga dengan diskritisasi waktu metode Euler dan Runge-Kutta pada persamaan Klein-Gordon satu dimensi dengan parameter yang ditentukan.

1.4 Ruang Lingkup Pembahasan

Pada skripsi ini, pembahasan metode spektral yang digunakan mencakup matriks penurunan Chebyshev dan polinom Chebyshev melalui FFT. Hasil perbandingan dari metode spektral dengan metode beda hingga hanya diperlihatkan dari hasil simulasi pada persamaan Klein-Gordon satu dimensi dengan parameter yang ditentukan. Diskritisasi waktu yang dipakai hanya metode Euler dan metode Runge-Kutta empat.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada skripsi ini terdiri dari 5 bab, yaitu :

Bab 1 : Pendahuluan
Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, ruang lingkup pembahasan dan sistematika penulisan.

Bab 2 : Landasan Teori
Bab ini membahas tentang teori dasar dari metode beda hingga, skema diskritisasi waktu, transformasi Fourier, persamaan gelombang linear dan pengubahan skala.

Bab 3 : Metode Spektral
Bab ini membahas tentang teori-teori dari metode spektral. Metode spektral yang akan dibahas adalah metode spektral matriks penurunan Chebyshev dan metode polinom Chebyshev melalui transformasi Fourier.

Bab 4 : Perbandingan Metode Spektral dan Metode Beda Hingga pada Persamaan Dispersi Linear Klein-Gordon Satu Dimensi
Bab ini membahas tentang perbandingan metode spektral dan metode beda hingga pada persamaan gelombang dispersi Klein-Gordon satu dimensi dengan syarat awal fungsi sinus dan fungsi Gauss.

Bab 5 : Kesimpulan dan Saran
Bab ini berisi tentang simpulan dari isi skripsi dan saran untuk pengembangan topik yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya.