

SKRIPSI

POLINOM TROPICAL DAN POLINOM MAX-PLUS



Kristin Dewi Sari

NPM: 2013710021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2017



**FINAL PROJECT**

**TROPICAL POLYNOMIAL AND MAX-PLUS POLYNOMIAL**



**Kristin Dewi Sari**

**NPM: 2013710021**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2017**



**LEMBAR PENGESAHAN**

**POLINOM TROPICAL DAN POLINOM MAX-PLUS**

**Kristin Dewi Sari**

**NPM: 2013710021**

**Bandung, 20 Juli 2017**

**Menyetujui,**

**Pembimbing**



**Iwan Sugiarto, M.Si.**



**Ketua Tim Penguji**



**Farah Kristiani, M.Si.**

**Anggota Tim Penguji**



**Liem Chin, M.Si.**

**Mengetahui,**

**Ketua Program Studi**



**Dr. Julius Dharma Lesmono**





## PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

### POLINOM TROPICAL DAN POLINOM MAX-PLUS

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
Tanggal 20 Juli 2017



Kristin Dewi Sari  
NPM: 2013710021



## ABSTRAK

Di dalam bidang struktur aljabar ada banyak hal menarik dapat dibahas, yaitu bagian-bagian dari semiring. Di sini akan dibahas dua bagian dari semiring yang memiliki sedikit kemiripan yaitu aljabar Tropical dan aljabar Max-Plus. Skripsi ini berisikan dua jenis aljabar yang dimiliki semiring, aljabar Tropical dan aljabar Max-Plus. Yang menarik ialah sifat yang dimiliki oleh keduanya. Juga bagaimana keduanya dipakai dalam polinom akan diperlihatkan disini.

Bagian pertama dimulai dengan mengkaji, apakah aljabar Tropical dan aljabar Max-Plus masuk dalam semiring. Bagian kedua akan membahas sifat-sifat yang dimiliki oleh keduanya, bagaimana polinom dipakai dalam kedua aljabar tersebut, sifat-sifat yang dimiliki polinom Tropical dan polinom Max-Plus, juga menggambar grafik polinom Tropical dan polinom Max-Plus dengan menggunakan MATLAB, sehingga kita dapat mengenal perbedaan dan persamaan dari kedua operasi di semiring ini.

**Kata-kata kunci:** grup, ring, semiring, operasi tropical, polinom, operasi max-plus



## ABSTRACT

In algebraic structure, many things could be discussed, especially in semiring. This final project contains two types of algebra that semi-ring had, Tropical algebra and Max-Plus algebra. The interesting topic is that properties they both have. And how that both are used in polynomial will be shown here.

The first section starts with investigating, are Tropical algebra and Max-Plus algebra included in semi-ring. The second section will identify properties they both have, how polynomials are used in those two algebras, properties that Tropical polynomials and Max-Plus polynomials have, and graphs of Tropical polynomials and Max-Plus polynomials. So, we can know what the differences and similarities are about operations in semiring.

**Keywords:** group, ring, semi-ring, tropical operation, polynomial, max-plus operation



*dedicated to my parents, especially my father*



## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala rahmat melimpahNya kepada saya, juga karena anugrahNya yang membuat saya dapat menulis skripsi ini sedemikian rupa. Harapan saya, skripsi ini akan berguna di kemudian harinya dan tidak terlewatkan begitu saja. Syukur sebesar-besarnya juga saya panjatkan untuk orangtua saya, karena telah membesarkan saya sedemikian rupa dan selalu mendukung saya dalam segala hal. Selanjutnya ucapan syukur saya untuk :

- Bapak Iwan Sugiarto selaku dosen pembimbing dan penyemangat membuat skripsi yang mau meluangkan waktunya untuk saya, juga memberikan kebebasan saya untuk berkarya. Kebersamaan selama setahun inilah yang membuat kita saling mengenal dengan baik, dan membuat saya menyadari bahwa bapak sangat mengerti saya. Bapak Wono Setyabudhi selaku dosen yang selalu memberikan nasihat dan membuat saya memandang matematika lebih luas. Juga segala jajaran dosen maupun karyawan FTIS yang lain.
- Ibu Farah Kristiani dan Bapak Liem Chin selaku penguji yang hendak meluangkan waktunya untuk membaca skripsi saya serta menguji kelayakan skripsi saya.
- Teman-teman di UNPAR. Jessica, Stella, Aditya, dll.
- Teman-teman di luar UNPAR, siapapun itu.
- Kopi susu, teman terbaik saya mengerjakan skripsi ini.

Skripsi saya masih sangat jauh dari kata sempurna. Selamat membaca.

Bandung, Juli 2017

Penulis



# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xix</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	1
1.3 Tujuan dan Manfaat . . . . .	2
1.4 Sistematika Penulisan . . . . .	2
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>3</b>
2.1 Grup . . . . .	3
2.1.1 Definisi Grup . . . . .	3
2.1.2 Beberapa Sifat dalam Grup . . . . .	3
2.2 Definisi Ring dan Semiring . . . . .	4
2.3 Aljabar Tropical . . . . .	6
2.3.1 Definisi Aljabar Tropical . . . . .	6
2.3.2 Bukti Aljabar Tropical Bagian Semiring . . . . .	8
2.3.3 Beberapa Sifat dalam Aljabar Tropical . . . . .	9
2.4 Aljabar Max-Plus . . . . .	9
2.4.1 Definisi Aljabar Max-Plus . . . . .	9
2.4.2 Bukti Aljabar Max-Plus bagian Semiring . . . . .	10
<b>3 POLINOM TROPICAL</b>	<b>13</b>
3.1 Polinom . . . . .	13
3.2 Definisi Polinomial Tropical . . . . .	14
3.3 Menggambar Grafik Polinom Tropical . . . . .	15
3.4 Akar Persamaan Polinom Tropical . . . . .	17
3.5 Hubungan Grafik Polinom Tropical dengan Akar Persamaan Polinom Tropical . . . . .	18
3.6 Sifat dari Polinom Tropical . . . . .	18
<b>4 POLINOM MAX-PLUS</b>	<b>21</b>
4.1 Definisi Polinom Max-Plus . . . . .	21
4.2 Sifat Operasi Polinom Max-Plus . . . . .	21
4.3 Menggambar Grafik Polinom Max-Plus dengan MATLAB . . . . .	22
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>25</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	25
5.2 Saran . . . . .	25
<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>27</b>



## DAFTAR GAMBAR

3.1	Grafik Polinom Tropical $l(x) = ax \oplus b$ . . . . .	15
3.2	Grafik Polinom Tropical $m(x) = 2x^2 \oplus (-x) \oplus 2$ . . . . .	16
3.3	Grafik Polinom Tropical $n(x, y) = 2 \odot x \oplus -3 \odot y \oplus 1$ . . . . .	17
3.4	Akar Polinom $x^2 - 1$ . . . . .	18
3.5	Titik Potong Grafik $f(x)$ dan $g(x)$ . . . . .	18
4.1	Grafik Polinom Max-Plus $m(x) = 2x^2 \oplus 5x \oplus 2$ . . . . .	23
4.2	Grafik Polinom Max-Plus $z = x \oplus 2y \oplus -1$ . . . . .	23



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan suatu benang pemersatu pada hampir semua bidang matematika. Pengembangannya yang sudah ditelaah sedari dulu membuat aljabar telah berkembang sedemikian luas. Ketertarikan dalam struktur aljabar menjadi pendorong untuk membuat tugas akhir ini, sebagai pendalaman materi dan juga kontribusi. Karena itu dipilihlah semiring sebagai bagian dari struktur aljabar.

Di dalam bidang struktur aljabar, ada banyak hal menarik dapat dibahas, yaitu bagian-bagian dari semiring. Di sini akan dibahas dua bagian dari semiring yang memiliki sedikit kemiripan yaitu aljabar Tropical dan aljabar Max-Plus. Aljabar Tropical sendiri memiliki dua operasi yaitu *oplus* dan *odot* yang secara sederhana dapat ditulis sebagai operasi minimal dan pertambahan. Sedangkan aljabar Max-plus memiliki dua operasi yaitu *oplus* dan *otimes* yang secara sederhana dapat ditulis sebagai maksimal dan pertambahan.

Dalam skripsi ini akan banyak dibahas mengenai aljabar Tropical dan aljabar Max-Plus khususnya polinom Tropical dan polinom Max-Plus. Dua operasi di semiring ini cukup unik, karena selain pendefinisian yang hanya beda maksimum dan minimum, juga memiliki kesamaan pada sifat-sifatnya. Pada pembahasan polinom Tropical dan Max-Plus juga akan diberikan lampiran kode MATLAB untuk membuat grafiknya secara langsung.

Di dalam makalah ini, akan dibahas mengenai Grup, Ring, dan Semiring sebagai pendahuluan untuk melihat apakah aljabar Tropical aljabar Max-plus merupakan bagian dari semiring. Lalu di telaah sifat-sifat dari Tropical agar Tropical dapat dipahami secara lebih umum, selain itu operasi Max-Plus juga akan menjadi bagian dari skripsi ini. Permasalahan polinom dalam operasi Tropical dan Max-Plus menjadi ciri khas sendiri di skripsi ini.

Permasalahan disini ialah dalam mengetahui sifat-sifat Tropical itu sendiri, analisis terhadap keberadaan Tropical, dan menyelidiki masalah yang terdapat dalam bagian-bagian Tropical itu sendiri. Selain itu, operasi Max-Plus juga diharap dapat menjadi pembanding yang baik untuk operasi Tropical. Karena Tropical dan Max-Plus sendiri masih asing, sehingga tugas akhir ini diharapkan dapat membantu pengembangan keilmuan khususnya bidang aljabar.

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, muncul beberapa persoalan baru

1. Bagaimana menggambar grafik polinom tropical, mencari akar persamaan tropical, dan sifat polinom tropical itu?
2. Bagaimana menggambar grafik polinom max-plus, serta sifat polinom max-plus itu?

### 1.3 Tujuan dan Manfaat

Tujuan dari skripsi ini adalah :

1. Membuat grafik yang dimiliki oleh tropical baik secara manual maupun dengan program MATLAB, mencari akar persamaan polinom tropical, dan melihat sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh tropical.
2. Membuat grafik yang dimiliki oleh max-plus baik secara manual maupun dengan program MATLAB dan mendeskripsikan sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh max-plus. Manfaatnya adalah memberikan kontribusi bagi bidang keilmuan, khususnya aljabar abstrak maupun pengembangan ilmu matematika yang lain. Pendalaman mengenai polinom tropical sendiri juga akan menjadi khas dari makalah ini, karena mungkin dapat dikembangkan lebih jauh.

### 1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terbagi menjadi lima bab. Kelima bab tersebut secara berurutan adalah pendahuluan, landasan teori, polinom tropical, operasi max-plus, serta simpulan.

- Bab 1 Pendahuluan : Bab ini diisi dengan latar belakang masalah, rumusan masalah, serta tujuan dan manfaat dalam menulis skripsi ini.
- Bab 2 Landasan Teori : Untuk mendukung Skripsi ini, dikemukakan penjelasan mengenai teori dasar grup, teori dasar ring dan semiring, teori dasar tropical, bukti tropical bagian dari semiring, serta berbagai sifat dalam Tropical itu sendiri.
- Bab 3 Polinom Tropical : Berisi mengenai definisi polinom tropical, menggambar gambar grafik tropical, akar persamaan tropical, hubungan grafik dan akar persamaan tropical, sifat dari polinom tropical, dan konsep menggambar polinom tropical dengan matlab.
- Bab 4 Operasi Max-Plus : Berisi mengenai definisi max-plus, bukti max-plus bagian dari semiring, menggambar grafik polinom max-plus, dan sifat yang dimiliki polinom max-plus.
- Bab 5 Kesimpulan : Disinilah akan dijabarkan simpulan yang ditarik dari skripsi ini.