

Berkenalan dengan

ISIKA Statistika

Kuliah dari
Prof. B Suprpto Brotosiswojo, PhD
2003



S30.13
BRD
b

01769 R/SB/PMIPA
29.7.09.

Daftar Isi

PENDAHULUAN

Gambaran Singkat tentang Apa itu Fisika Statistik

BAGIAN 1 : PIRANTI STATISTIK

- Permutasi
- Kombinasi
- Distribusi Populasi
- Program Komputer untuk Distribusi Populasi
- Mencari „most probable distribution“

BAGIAN 2 : KAITAN STATISTIK DENGAN TERMODINAMIKA

- Mekanika menurut ungkapan Hamilton
- Menampilkan pola Hamilton pada mesin komputer
- Gas Ideal, distribusi Maxwell-Boltzmann
- Ilustrasi dengan program komputer
- Hubungan dengan fungsi-fungsi termodinamika yang lain
- Zat Padat

BAGIAN 3 : WILAYAH KUANTUM

- Kerapatan Status Energi
- Statistik Bose-Einstein
- Statistik Fermi-Dirac
- Memahami pola pikir kuantum kumpulan benda banyak
- Distribusi Maxwell-Boltzmann sebagai Limit Klasik distribusi Bose-Einstein dan distribusi Fermi-Dirac
- „Gas“ dalam ungkapan statistik Bose-Einstein
- „Gas“ dalam ungkapan statistik Fermi-Dirac

LAMPIRAN

- Pendekatan Stirling
- Dalil Pelipat Lagrange
- Kerapatan Status Energi kumpulan partikel bebas
- Integral yang melibatkan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann
- Integral yang melibatkan fungsi distribusi Fermi-Dirac

No. Kt. : 530.13 BRD b.
No. Ind. : 0769 Tgl. 21.7.09.
M. d. di / J. l.
Dari B. Suprpto Brotosiswojo.

PENDAHULUAN

Gambaran Singkat tentang Apa Itu Fisika Statistik

Kita telah belajar termodinamika, yaitu perilaku besaran-besaran yang terukur secara makroskopik (volume, tekanan, suhu, kalor, energi, entropi, ...dsb.) berdasarkan analisa hasil pengamatan empirik. Ada hukum-hukum alam dasar yang ditemui, yang dapat dirumuskan. Kalor misalnya, ternyata sebuah wujud lain dari energi, selain energi mekanik, energi listrik dan magnet, energi suara, energi cahaya, energi nuklir, ...dsb. Jadi, kalau kita berpegang pada prinsip "kekekalan energi", maka ada kebebasan untuk mengubah wujud energi dari wujud yang satu ke wujud lainnya, termasuk wujud 'kalor'. Meskipun demikian, pengamatan empirik menunjukkan adanya sifat yang berbeda dari jenis energi wujud kalor, dibandingkan dengan jenis-jenis lainnya. Kalau wujud energi lain diubah menjadi energi kalor, prosesnya dapat berjalan dengan efisiensi seratus prosen, tetapi kalau yang diubah itu wujud kalor menjadi wujud lainnya maka efisiensinya tak dapat mencapai nilai seratus prosen. Besaran makroskopik yang kita sebut suhu (temperatur) ternyata menjadi kendalanya.

Pertanyaannya, bukankah kita yakin bahwa pembangun materi agregat yang wujudnya padat, cair, atau gas itu terdiri atas molekul, atom, elektron, nukleon, foton,...dsb. yang perangnya (sebagian) sudah kita kenal? Dapatkah kita mengaitkan penemuan yang kita rumuskan dalam hukum-hukum termodinamika itu dengan mekanikanya atom, molekul, foton, ...dsb. itu?

Pada prinsipnya tentu bisa! Tetapi ada kendalanya. Kendala yang pertama berkaitan dengan *jumlahnya*. Penduduk dunia hanya beberapa milyar saja, atau pada orde 10 000 000 000, sedangkan agregat kita berisi 10 000 000 000 000 000 000 molekul, atom, atau foton. Bagaimana mengolah data mekanikanya? Kendala yang kedua terkait dengan keterbatasan hukum mekanika, yang bentuknya persamaan diferensial derajat dua terhadap waktu. Hukum itu memungkinkan kita meramalkan apa yang terjadi kemudian asalkan kita tahu kondisi awalnya, yaitu posisi dan kecepatannya. Kalau perjalanan planet atau meteor itu dapat kita ramalkan dengan sangat tepat dengan menggunakan mekanika, hal itu disebabkan karena kita dapat *mengukur* posisi dan kecepatannya pada suatu saat. Jadi, tantangannya adalah bagaimana cara kita mengukur posisi dan kecepatan awal dari sekian banyak molekul, atom, atau foton yang ada dalam agregat itu. Kita angkat tangan, menyerah, kalau itu yang harus kita lakukan.

Ada hal lain lagi yang menarik kalau kita membandingkan perantai alam yang terlukis dalam hukum-hukum termodinamika, dengan hukum-hukum mekanika untuk molekul, atom, foton, ... dsb. Hukum-hukum mekanika itu sifatnya 'time-reversible', artinya kalau parameter waktu t diubah menjadi $(-t)$, kita tetap menemukan rumus yang sama. Tetapi hukum-hukum termodinamika *tidak* 'time-reversible'. Ada pilihan arah-waktu, misalnya dalam sistem yang terisolasi sempurna, proses alamnya selalu memilih untuk menaikkan entropinya ketika waktu t bertambah nilainya. Pertanyaannya, bagaimana mungkin

aturan makroskopik agregat terdiri atas unsur-unsur yang mengikuti aturan 'time-reversible', sifatnya justru *tidak* 'time-reversible'.

Fisika Statistik dimaksudkan untuk melengkapi pemahaman kita tentang perangai kumpulan semacam itu tetapi bukan lewat mekanika kumpulan, yang meskipun prinsipnya / seharusnya dapat dilakukan, tetapi prakteknya tidak mungkin terlaksana.

Alternatif pemahaman akan dilakukan lewat *pengandaian* bahwa peristiwa alam yang kita rumuskan menjadi hukum-hukum termodinamika itu, sebenarnya sekedar wujud gejala yang paling besar peluangnya ('most probable') dari **proses alam yang terjadi secara acak**. Lewat pendekatan bernalar semacam ini ternyata perilaku agregat yang sepiantas lalu terasa 'aneh' itu dapat kita pahami.

Sudah barang tentu, lukisan lewat cara statistik / keacakan tersebut hanya akan tepat digunakan untuk agregat yang sudah ada pada status keseimbangan. Proses dinamika yang mengungkapkan bagaimana keseimbangan tersebut dicapai, kurang pada tempatnya jika diulas lewat statistik yang didasarkan atas sifat keacakan seperti ini.

Untuk tahap pengenalan, unsur-unsur pembangun agregatnya, seperti atom, molekul, foton,..dsb. akan diperlakukan sebagai elemen yang bebas, satu sama lain. Maksudnya, interaksi antar molekul, atom, atau foton pembangun agregat itu sementara diabaikan dahulu. Teori Ensemble yang lebih lengkap akan diberikan kemudian, jika masih ada waktu. Dalam praktek statistik jenis sederhana yang mengabaikan interaksi antar elemennya ini sudah dapat digunakan untuk menjelaskan sejumlah perilaku alam yang kita amati seperti yang dapat dirumuskan oleh termodinamika.

Fisika Statistik mengandalkan pada sebuah asumsi a-priori tentang *keacakan* ('random') dari proses alam. Lazimnya di masa lalu, analisisnya diungkap dalam bentuk hitungan analitik. Sekarang, dengan tersedianya mesin komputer yang dapat menampilkan 'pseudo-random numbers', ada baiknya bahwa disamping cara-cara konvensional yang ada juga kita sajikan proses pemahaman lewat cara numerik dengan bantuan mesin komputer.

Piranti-lunak yang dipilih untuk dipakai adalah Microsoft Excel yang lazim tersedia, dan dapat dimanfaatkan untuk sejumlah topik garapan tertentu. Piranti-lunak ini mudah penggunaannya sehingga kita dapat berlatih untuk melakukannya sendiri. Dengan demikian diharapkan pemahaman terhadap apa yang kita lakukan di Fisika Statistik dapat tertanam lebih kuat.

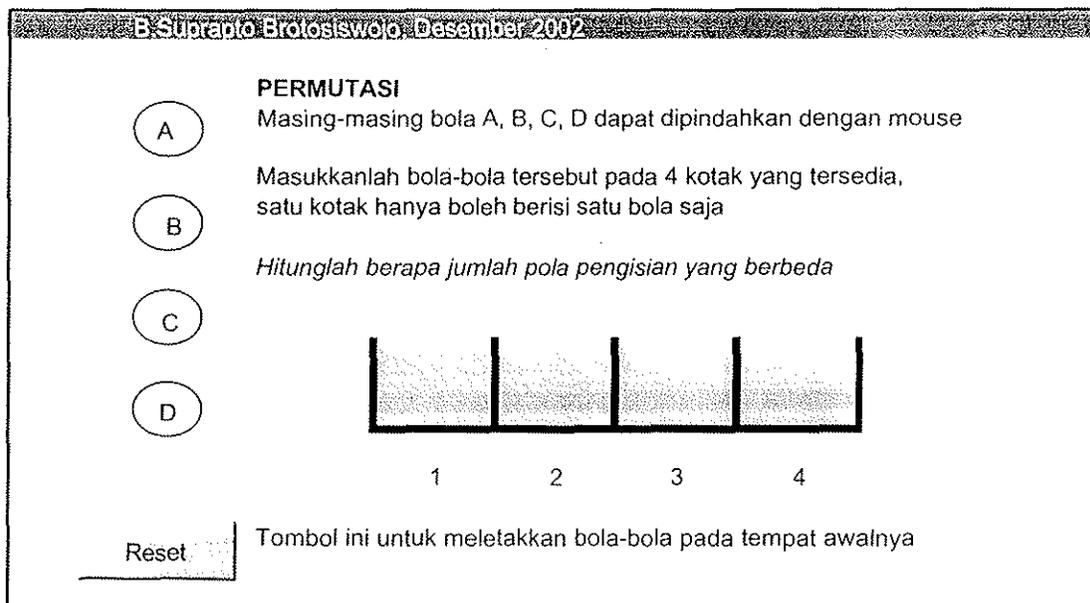
BAGIAN-1 : PIRANTI STATISTIK

Akan diperkenalkan penggunaan mesin komputer untuk mengungkap wujud sejumlah pengertian yang akan digunakan dalam fisika statistik.

Permutasi

Untuk mengingatkan kembali bagi mereka yang lupa, disajikan program yang melukiskan makna serta hitungan yang berkaitan dengan istilah 'permutasi'. Berikut ini sketsa lukisannya. Pada program yang sesungguhnya, bola A, B, C dan D diberi warna yang berbeda agar tampak lebih nyata ketika bola-bola tersebut dimasukkan ke kotak-kotak yang tersedia.

Agar dapat diperiksa secara teliti, disediakan kolom-kolom untuk mencatat jenis-jenis konfigurasi yang ditemuinya. Jika sudah dirasa lengkap, jumlahnya dapat dibaca dari nomor urutnya.



Gambar 1-1

Untuk menguji hasilnya, ada program serupa yang akan melakukan proses permutasi tersebut secara otomatis untuk ditampilkan dan diperiksa.

Cara Analitik :

Hitungannya sederhana, untuk bola A kita punya 4 pilihan kotak untuk meletakkannya. Setelah pilihan itu diambil, kotaknya tinggal 3. Maka untuk bola B kita tinggal punya 3 pilihan. Setelah itu diambil, untuk bola C kita tinggal punya 2 kotak pilihan. Akhirnya untuk bola D hanya tinggal satu kotak, jadi tidak ada pilihan lain.

Karena itu jumlah ragamnya ada $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$.

Jadi boleh diambil rumus umum, untuk N obyek jumlah permutasinya ada $N!$

Algoritma perintah komputasi untuk membuat permutasi

Kita ikuti proses bernalar seperti ketika kita menghasilkan kesimpulan bahwa jumlah permutasi untuk obyek yang jumlahnya N adalah $N!$.

Kali ini $N=4$, dan atom-atom itu ditandai dengan huruf A, B, C dan D. Kita definisikan variabel aa untuk menempatkan lokasi atom A, variabel bb untuk menempatkan lokasi atom B, ...dst.

Untuk atom A, ada 4 pilihan, oleh sebab itu kita boleh memberi tempat pada atom A dari $aa=1$ s/d $aa=4$. Setelah pilihan aa diambil, maka atom B hanya punya pilihan lokasi yang belum dipilih oleh aa, jadi pernyataan For $bb=1$ to 4 harus dibatasi hanya bila bb tidak sama dengan aa. Setelah itu giliran cc, hal serupa dengan bb juga berlaku, kali ini untuk for $cc=1$ to 4, dibatasi hanya bila cc tidak sama dengan aa, dan juga tidak sama dengan bb,begitu seterusnya.

Adapun apa yang dilakukan setelah aa, bb, cc, dan dd ditetapkan, kita tuliskan huruf "A" pada kolom aa, huruf "B" pada kolom bb, huruf "C" pada kolom cc, dan huruf "D" pada kolom dd. Lalu kita berlanjut dengan baris berikutnya, ... sampai seluruh $4!$ baris diisi huruf-huruf sesuai dengan lokasinya. Bentuk algoritmanya seperti di bawah ini.

Private Sub permut()

```
n = 1
For aa = 1 To 4
  For bb = 1 To 4
    If (bb <> aa) Then
      For cc = 1 To 4
        If (cc <> bb) And (cc <> aa) Then
          For dd = 1 To 4
            If (dd <> aa) And (dd <> bb) And (dd <> cc) Then
              Range("Acuan").Offset(n, aa).FormulaR1C1 = "A"
              Range("Acuan").Offset(n, bb).FormulaR1C1 = "B"
              Range("Acuan").Offset(n, cc).FormulaR1C1 = "C"
              Range("Acuan").Offset(n, dd).FormulaR1C1 = "D"
              n = n + 1
            End If
          Next dd
        End If
      Next cc
    End If
  Next bb
Next aa
End Sub
```

Perlu hati-hati karena kenaikan nilai $N!$ dengan kenaikan bilangan N berjalan sangat cepat, sehingga simulasi ini dibatasi dengan memilih $n = 4$. Yang terpenting adalah jalan berpikirmya.

Kombinasi

Misalkan kita punya 10 atom yang diberi nama A,B,C, D, E, F, G, H, I, J. Atom-atom itu akan kita letakkan dengan peluang yang sama untuk menempati **sebuah kotak**, tetapi kita hanya ingin mengambil sejumlah n atom saja, misalnya $n = 1$, atau 2, atau 3, atau 4, ..atau 10. Jumlah cara yang berbeda untuk melakukan hal ini dinamakan kombinasi.

Secara umum, kalau jumlah atom ada Na dan yang harus menempati kotak ada n , maka banyaknya pilihan disebut kombinasi(Na,n). Pada Excel ada fungsi untuk menghitungnya, yaitu fungsi =COMBIN(Na,n).

Rumus matematikanya dapat dinalar dengan cara sederhana. Kita deretkan misalnya

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

sepuluh huruf ABCDEFGHIJ, artinya kita ingin membagi sepuluh obyek. Untuk mencari misalnya COMBIN(10,4) misalnya, kita memasang sekat antara huruf keempat dan huruf kelima. Huruf-huruf yang ada di kiri sekat itu adalah huruf-huruf yang akan masuk di kotak. Sisanya yang 6 adalah huruf-huruf yang tidak kita masukkan ke kotak.

Untuk mendapatkan konfigurasi yang berbeda, kita buat permutasi antara 10 huruf tadi. Hasil permutasi yang kita tahu jumlahnya ada $10!$ tadi kita lukis berderet ke bawah (karena banyak sekali, tidak kita gambar di sini). Jumlah $10!$ itu telalu banyak, sebab kita tidak peduli urutan dari 4 huruf yang ada di sebelah kiri sekat. Jadi harus dibagi dengan jumlah permutasi 4 huruf yaitu $4!$. Kita juga tidak peduli dengan urutan huruf yang di sebelah kanan sekat, jadi perlu dibagi lagi dengan jumlah permutasi 6 huruf, yaitu $6!$. Dengan demikian jumlah cara berbeda memasukkan 4 huruf ke dalam kotak tadi adalah

$$\text{COMBIN}(10,4) = 10! / [4! \cdot 6!], \text{ secara umum } \text{COMBIN}(Na,n) = Na! / [n! \cdot (Na-n)!]$$

Distribusi Populasi

Lukisan tentang kombinasi yang kita bahas tadi juga dapat diartikan sebagai cara **membagi habis** Na atom ke dalam **dua kotak**.

Sekarang, bagaimana kalau kita punya empat atom A,B,C,D yang ingin kita **bagi habis** pada **tiga kotak** yang diberi nomer 1, 2, 3. ?

Karena tiap atom punya 3 pilihan kotak, maka konfigurasi yang ada tentunya 3 pangkat (jumlah-atom) = $3^4 = 81$.

Ditilik dari pola yang ada pada ketiga kotak tadi, konfigurasinya sedikit berbeda. Ada konfigurasi

4 0 0	bentuk ini hanya diwujudkan bila ABCD ada di kotak 1	1 x tampil
3 1 0	ada 4 peluang bagi kotak 2, sisanya mengikut	4 x tampil
3 0 1	ada 4 peluang bagi kotak 3, sisanya mengikut	4 x tampil
2 2 0	ada kombinasi (4,2) untuk kotak 1, sisanya ikut	6 x tampil
2 0 2	ada kombinasi (4,2) untuk kotak 1, sisanya ikut	6 x tampil
2 1 1	ada 4 peluang bagi kotak 3, lalu 3 peluang di kotak 2	12 x tampil
1 3 0	ada 4 peluang bagi kotak 1, sisanya mengikut	4 x tampil
1 0 3	ada 4 peluang bagi kotak 1, sisanya mengikut	4 x tampil
1 2 1	ada 4 peluang bagi kotak 1, lalu 3 peluang di kotak 3	12 x tampil
1 1 2	ada 4 peluang bagi kotak 1, lalu 3 peluang di kotak 2	12 x tampil
0 4 0	bentuk ini hanya diwujudkan bila ABCD ada di kotak 2	1 x tampil
0 3 1	ada 4 peluang bagi kotak 3, sisanya mengikut	4 x tampil
0 1 3	ada 4 peluang bagi kotak 2, sisanya mengikut	4 x tampil
0 2 2	ada kombinasi (4,2) untuk kotak 2, sisanya ikut	6 x tampil
0 0 4	bentuk ini hanya diwujudkan bila ABCD ada di kotak 3	1 x tampil

$$\text{Jumlahnya} = 12 \times 3 + 6 \times 3 + 4 \times 6 + 1 \times 3 = 81$$

Ada hal yang menarik di sini, yaitu kalau ke-81 ragam perwujudan tadi memiliki peluang yang sama untuk terjadi, tetapi jika yang kita amati adalah *konfigurasi distribusi* atom dalam tiga kotak itu, maka ada konfigurasi yang peluangnya kecil ($1/81$) dan ada yang peluangnya besar ($12/81$).

Kita juga dapat bernalar lewat cara serupa dengan yang kita gunakan untuk mencari rumus matematika $\text{COMBIN}(Na, n)$. Sekarang sekat kita menjadi dua, yang satu untuk memisah katakanlah n_1 huruf pertama, sekat yang kedua untuk memisahkan n_2 huruf berikutnya. Tentunya kesimpulan kita menjadi

$$\text{DISTRIB}(Na; n_1, n_2, Na - n_1 - n_2) = Na! / [n_1! \cdot n_2! \cdot (Na - n_1 - n_2)!]$$

Coba kita uji dengan angka-angka pada contoh di atas.

$$\text{DISTRIB}(4; 0, 4, 0) = 4! / [0! \cdot 4! \cdot 0!] = 1$$

$$\text{DISTRIB}(4; 3, 1, 0) = 4! / [3! \cdot 1! \cdot 0!] = 4$$

$$\text{DISTRIB}(4; 2, 2, 0) = 4! / [2! \cdot 2! \cdot 0!] = 24 / [2 \times 2] = 6$$

$$\text{DISTRIB}(4; 1, 2, 1) = 4! / [1! \cdot 2! \cdot 1!] = 24 / 2 = 12$$

Makin banyak jumlah atom yang kita bagikan kepada 3 kotak tadi, makin terlihat perbedaan antara konfigurasi yang peluangnya besar dengan yang peluangnya kecil. Misalnya bila jumlah atom ada 10, jumlah konfigurasi ada $3^{20} = 3486784401$ (sangat besar). Konfigurasi $[20, 0, 0]$ peluangnya hanya sekitar $(1/3486000000)$ saja. Artinya kalau kita melakukan undian sebanyak 3,5 miliar kali ada kemungkinan satu kali kita menemukan konfigurasi tersebut.

Konfigurasi $[7,7,6]$ akan menghasilkan jumlah ragam $20! / (7! \times 7! \times 6!) = 133024320$, sehingga peluang untuk menemukan konfigurasi ini adalah sekitar $(1/27)$. Itu berarti bahwa lewat pembagian secara acak sebanyak 30 kali kemungkinan besar anda akan menemukan konfigurasi $[7,7,6]$ atau $[7,6,7]$, atau $[6,7,7]$.

Program Komputer untuk Distribusi Populasi

Untuk mewujudkan proses DISTRIBUSI pada Excel, perhatian kita difokuskan pada atom-atom. Setiap atom A,B,C, atau D boleh ditempatkan di mana saja dalam kotak nomer 1, 2, dan 3. Kehadiran lebih dari satu atom dalam sebuah kotak tidak dimasalahkan lagi seperti halnya waktu kita membahas permutasi. Variabel aa kita gunakan ketika kita membahas atom A, tetapi sekarang kotaknya hanya 3, jadi nilainya pun dibatasi 1,2, dan 3 saja.

Agar kita dapat menuliskan semua atom yang menghuni sebuah kotak, maka digunakan variabel Teks_aa, Teks_bb,dst. Variabel itu membaca dahulu isi teks pada kotak yang ditunjuk, dan menambahkan huruf sesuai dengan huruf atomnya.

Kita memerlukan 81 tempat (baris) untuk dapat menampung semua jenis kombinasi yang ada. Salah satu sel, yang dalam program ini dipilih sebagai sel-A4 akan dinyatakan sebagai sel "Acuan". Dalam bahasa pemrograman yang ada di situ, Offset(7,2) artinya sebuah sel yang letaknya di baris ke-7, kolom ke-2 dari sel "Acuan" tadi. Maka untuk membersihkan sel-sel akan kita pakai ada subrutin yang namanya **bersihkan**. Barisnya dibuat sedikit lebih banyak (98 bukan 81); ini tak ada dampaknya.

```
Private Sub bersihkan()
    Range("B5:D100").FormulaR1C1 = ""
End Sub
```

Sekarang kita buat perintah untuk membagikan 4 molekul tadi ke dalam 3 kolom, dengan catatan bahwa setiap molekul bebas memilih kolom yang ingin ditematinya. Setiap pasangan pembagian dituliskan satu kali (tidak boleh ada konfigurasi yang sama). Subrutin berikut ini akan menuliskan 81 konfigurasi yang ada.

```
Private Sub bagikan()
    bersihkan
    n = 1 'awal baris
    ' --- membagikan
    For aa = 1 To 3
        For bb = 1 To 3
            For cc = 1 To 3
```

```

For dd = 1 To 3
' menampung tulisan
Teks_aa = ""
Teks_bb = ""
Teks_cc = ""
Teks_dd = ""
'-----
Teks_aa = Range("Acuan").Offset(n, aa).Value
Range("Acuan").Offset(n, aa).FormulaR1C1 = Teks_aa + "A"
Teks_bb = Range("Acuan").Offset(n, bb).Value
Range("Acuan").Offset(n, bb).FormulaR1C1 = Teks_bb + "B"
Teks_cc = Range("Acuan").Offset(n, cc).Value
Range("Acuan").Offset(n, cc).FormulaR1C1 = Teks_cc + "C"
Teks_dd = Range("Acuan").Offset(n, dd).Value
Range("Acuan").Offset(n, dd).FormulaR1C1 = Teks_dd + "D"
n = n + 1
Next dd
Next cc
Next bb
Next aa
End Sub

```

Dari daftar yang dilukiskan sebagai hasilnya, akan ditemui, misalnya ada 3 molekul di kolom-1, tak ada molekul di kolom-2, dan ada 1 molekul di kolom-3. Tetapi pembagian populasi semacam itu dapat terjadi beberapa kali. Misalnya yang ada di kolom-3 itu bisa molekul A, atau molekul B, atau C, atau D. Subrutin berikut ini akan membuat menulis data pada tiga kolom, bukan tulisan huruf molekulnya melainkan **angka** jumlah molekul yang terdapat pada masing-masing kolom. Hasilnya ditampung pada tiga kolom lain disebelah sel yang kita namakan "Acuan2", yaitu sel E4.

```

Private Sub populasi()
For n = 1 To 81
For jj = 1 To 3
pop = Range("Acuan").Offset(n, jj).Text
npop = Len(pop)
Range("Acuan2").Offset(n, jj).FormulaR1C1 = npop
Next jj
Next n
End Sub

```

Akan tampak dari daftar yang dihasilkan mesin komputer di situ bahwa ada 4 konfigurasi yang sebaran populasinya (3,0,1). Dan tentunya sebaran yang lain juga ada. Kita buat subrutin berikutnya yang menghitung jumlah konfigurasi dengan sebaran yang sama. Untuk itu perlu sebuah fungsi penghitung populasi.

```

Function hitungPop(ByVal p1, ByVal p2, ByVal p3) As Integer
Jumlah = 0
For n = 1 To 81
pp1 = Range("Acuan2").Offset(n, 1).Value
pp2 = Range("Acuan2").Offset(n, 2).Value
pp3 = Range("Acuan2").Offset(n, 3).Value
If (pp1 = p1) And (pp2 = p2) And (pp3 = p3) Then Jumlah = Jumlah + 1
Next n

```

```
hitungPop = Jumlah
End Function
```

Dengan memanfaatkan fungsi tersebut, kita buat daftar satu lagi, yang barisnya mencerminkan sebaran populasi yang berbeda. Hasilnya diungkap pada kolom "Acuan3" Berikut ini subrutinnya.

```
Private Sub isikan()
```

```

n = 1
nilai = hitungPop(4, 0, 0)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(0, 4, 0)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(0, 0, 4)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(3, 1, 0)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(3, 0, 1)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(1, 3, 0)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(0, 3, 1)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(0, 1, 3)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(1, 0, 3)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(2, 2, 0)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(2, 0, 2)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(0, 2, 2)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(2, 1, 1)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(1, 2, 1)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai
n = n + 1
nilai = hitungPop(1, 1, 2)
Range("Acuan3").Offset(n, 1).FormulaR1C1 = nilai

```

```
End Sub
```

Salinan hasil program Excel tersebut dapat dilihat di bawah ini. Hanya ada 15 baris saja. Daftar untuk kolom "Acuan" dan "Acuan2" terlalu panjang untuk disalin di sini.

Acuan3	Jumlah
400	1
040	1
004	1
310	4
301	4
130	4
031	4
013	4
103	4
220	6
202	6
022	6
211	12
121	12
112	12

Tabel 1 - 1

Hasil ini sesuai dengan bahasan sebelumnya. Kelebihannya, adalah bahwa jika nanti jumlah molekul, maupun jumlah status energinya lebih banyak, mesin komputer dapat dengan mudah memetakannya, selama masih dalam batas memori yang tersedia.

Mencari 'most probable distribution'

Pada dasarnya untuk obyek kumpulan "partikel" yang sangat banyak itu statistik digunakan mencari sebaran dengan peluang yang paling besar, sebab dengan pengandaian secara a priori bahwa masing-masing konfigurasi memiliki peluang yang sama untuk muncul dalam pengamatan eksperimen kita, maka sebaran dengan peluang terbesar itulah yang sesungguhnya kita jumpai dalam eksperimen, dan itulah yang menjadi andalan hasil "observasi" kita.

Untuk tambahan informasi, berikut disajikan hasil simulasi membagi 6 buah spin-1 ke pada 3 status kuantumnya (sebuah partikel dengan spin-1, akan menampilkan 3 buah status, yang boleh kita tandai dengan "+", "0", dan "-").

Sebuah kesimpulan sederhana dapat ditarik, yaitu kalau kita menyebarkan 6 buah 'partikel', masing-masing diberi nama A, B, C, D, E, F, ke dalam 3 buah kotak, dengan memberi peluang yang sama bagi setiap partikel untuk menempati salah satu dari ketiga kotak tadi, maka peluang terbesar akan terjadi ketika 6 partikel itu dibagikan secara merata kepada 3 kotak yang ada.

Distribusi	"+"	"0"	"-"	Jumlah
1	0	0	6	1
2	0	1	5	6
3	0	2	4	15
4	0	3	3	20
5	0	4	2	15
6	0	5	1	6
7	0	6	0	1
8	1	0	5	6
9	1	1	4	30
10	1	2	3	60
11	1	3	2	60
12	1	4	1	30
13	1	5	0	6
14	2	0	4	15
15	2	1	3	60
16	2	2	2	90
17	2	3	1	60
18	2	4	0	15
19	3	0	3	20
20	3	1	2	60
21	3	2	1	60
22	3	3	0	20
23	4	0	2	15
24	4	1	1	30
25	4	2	0	15
26	5	0	1	6
27	5	1	0	6
28	6	0	0	1

Tabel 1-2

Di sisi kiri terdapat hasil Excel membagikan 6 obyek dengan spin-1 ke dalam 3 status kuantum spinnya yang dilambangkan dengan "+", "0", dan "-".

Setiap obyek boleh memilih satu di antara 3 status yang ada. Masing-masing kombinasi pilihan tersebut di beri peluang yang sama. Jadi seluruhnya ada $(3 \text{ pangkat } 6) = 729$ kombinasi (tidak dicetak di sini karena panjangnya deretan).

Jika kita tidak menghiraukan nama-nama dari keenam spin-1 tadi, maka yang teramati hanya distribusinya ke dalam 3 status kuantum itu. Ada 28 konfigurasi distribusi, seperti yang dapat dibaca di sisi kiri ini.

Setelah dihitung jumlah peluang bagi masing-masing konfigurasi, didapat bahwa peluang terbesar terjadi pada konfigurasi dengan distribusi (2,2,2), dengan jumlah 90

Persoalan yang akan kita hadapi dalam fisika, selain jumlah partikelnya sangat besar, masih ada tambahan sedikit kerumitan lagi. Kotak-kotak tempat kita membagikan itu wujudnya adalah apa yang dinamakan 'status energi', dengan nilai energi yang tidak sama. Misalnya jika partikel ada di kotak-1, energinya $E_1 = -5$, kalau partikel berada pada kotak-2 energinya $E_2 = 0$, kalau partikel berada pada kotak-3 energinya $E_3 = +5$. Maka sekarang ada syarat tambahan lagi, yang terkait dengan energi-total dari 6 partikel tadi.

Lukisan lebih lengkapnya menjadi sbb.

Energi Distribusi	E1=-5	E2 = 0	E3 = +5	Jumlah	E-total
	"+"	"0"	"-"		
1	0	0	6	1	30
2	0	1	5	6	25
3	0	2	4	15	20
4	0	3	3	20	15
5	0	4	2	15	10
6	0	5	1	6	5
7	0	6	0	1	0
8	1	0	5	6	20
9	1	1	4	30	15
10	1	2	3	60	10
11	1	3	2	60	5
12	1	4	1	30	0
13	1	5	0	6	-5
14	2	0	4	15	10
15	2	1	3	60	5
16	2	2	2	90	0
17	2	3	1	60	-5
18	2	4	0	15	-10
19	3	0	3	20	0
20	3	1	2	60	-5
21	3	2	1	60	-10
22	3	3	0	20	-15
23	4	0	2	15	-10
24	4	1	1	30	-15
25	4	2	0	15	-20
26	5	0	1	6	-20
27	5	1	0	6	-25
28	6	0	0	1	-30

Tabel 1-3

Umumnya, dari pengalaman fisika mempelajari peragai alam, ada upaya alam ini untuk lebih memilih kondisi sistem yang energinya rendah. Kita lihat dari daftar di atas bahwa energi-total paling rendah itu -30, sayangnya ini hanya punya frekuensi penampilan satu kali. Konfigurasi yang frekuensi penampilannya paling banyak, yaitu 90, bukan yang memiliki energi-total paling rendah.

Kalau misalnya karena sesuatu hal, energi-total kumpulan partikel itu harus memiliki nilai tertentu, misalnya E-total = -10, maka daftar kita masih memberi lebih dari satu konfigurasi, yaitu (2,4,0) dengan frekuensi 15 x penampilan, (3,2,1) dengan frekuensi 60 x penampilan, dan (4,0,2) dengan frekuensi 15 x penampilan. Oleh karena itu kita dapat menyatakan "most probable distribution" untuk energi-total = -10 adalah (4,0,2).

BAGIAN-2

KAITAN STATISTIK DENGAN TERMODINAMIKA

Mekanika menurut ungkapan Hamilton

Kita semua sudah kenal dengan persamaan gerak Newton, sebuah rumusan yang telah berhasil, baik dalam menjelaskan sejumlah peristiwa alam yang sudah terjadi maupun untuk meramalkan peristiwa alam yang akan terjadi, seperti kapan akan terjadi gerhana matahari, atau bagaimana meletakkan orbit satelit komunikasi 'Palapa' agar selalu berada di atas wilayah Indonesia, meskipun buminya berputar siang dan malam.

Newton menghubungkan besaran yang disebut **gaya** dengan perubahan **posisi** sebuah benda yang mengalami gaya tersebut. Gaya **F** akan menyebabkan *perubahan* posisi **r**, tidak secara langsung tetapi lewat *perubahan dari perubahan* posisi tadi yang kita kenal dengan nama *percepatan*.

$$\text{Gaya} = \text{massa} \times \text{percepatan}$$

Kalau *kecepatan* **v** adalah perubahan posisi **r** (terhadap waktu **t**), maka ada besaran baru yang punya makna fisik lain yang disebut momentum **p**, yang nilainya sama dengan massa dikalikan kecepatan benda tersebut.

Konon kabarnya, tulisan Newton yang aseli lebih dapat diartikan sebagai

$$\text{Gaya} = \text{perubahan momentum (terhadap waktu)}$$

Karena itu Hamilton membuat rumusan dengan menganggap variabel posisi **r**, dan variabel momentum **p** sebagai dua variabel yang bebas satu sama lain. Besaran yang menjadi pusat perhatian bukan gaya, melainkan energi yang dianggapnya lebih bermakna secara fisik, misalnya dalam asas bahwa energi itu konstan sifatnya, selama tak ada faktor eksternal yang menggangukannya. Ceritera panjang mengenai hal ini dapat anda simak pada kuliah Mekanika Lanjut.

Aturan kerjanya begini, nyatakan energi obyek yang kita garap sebagai fungsi dari posisi **r** dan momentum **p**. Fungsi tersebut kini dikenal dengan nama fungsi Hamilton (bahasa asingnya "Hamiltonian"). Untuk sederhananya, kita ambil contoh gerak dimensi satu, variabel posisi disebut **s(t)** dan variabel momentum disebut **p(t)**. Kasus yang mudah digarap adalah gerak Harmonik. Kalau **s(t)** adalah simpangan obyek dari titik keseimbangannya, maka rumusan Newtonnya menjadi gaya pada saat **t**, yaitu **F(t)**, berbanding lurus dengan simpangan **s(t)**, tetapi dalam arah yang berlawanan.

$$F(t) = -\text{kappa} \cdot s(t) \quad [2-1]$$

Karena itu gerak obyek ini dipandu oleh persamaan gerak

$$\text{massa} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} = -\text{kappa} \cdot s(t) \quad [2-2]$$

Anda semua tahu solusi dari persamaan diferensial tersebut di atas.

Dalam lingkup gerak dengan kecepatan yang jauh di bawah kecepatan cahaya, massa itu sebuah besaran yang tetap sifatnya. Karena itu persamaan di atas dapat dituliskan juga sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= -\text{kappa} \cdot s(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{1}{\text{massa}} p(t) \end{aligned} \quad [2-3]$$

Dalam gerak harmonik seperti itu, dikenal adanya energi kinetik dan energi potensial. Besarnya energi kinetik kalau dikaitkan dengan momentum adalah

$$E_{\text{kinetik}}(t) = p^2(t) / (2 \text{ massa}) \quad [2- 4]$$

Energi potensialnya didapat dengan menjumlahkan besaran reaksi kita pada gaya F dikalikan dengan langkah-langkah kecil perubahan simpangan ds dari sejak energi potensialnya paling kecil, yaitu titik keseimbangan $s=0$ sampai ke nilai $s(t)$ pada saat pengamatan kita

$$E_{\text{Potensial}}(t) = \int_0^{s(t)} F(s) ds = \text{kappa} \cdot \int_0^{s(t)} s \cdot ds = \frac{\text{kappa}}{2} \cdot s^2(t) \quad [2-5]$$

Dengan demikian maka energi totalnya, yang kita sebut Hamiltonian dapat dituliskan sebagai fungsi s dan p dalam bentuk

$$H(s,p) = \frac{1}{2 \cdot \text{massa}} p^2(t) + \frac{\text{kappa}}{2} s^2(t) \quad [2-6]$$

Jika dikaitkan dengan ungkapan [6] ini maka persamaan gerak [3] akan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= - \frac{\partial H(s,p)}{\partial s} \\ \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{\partial H(s,p)}{\partial p} \end{aligned} \quad [2-7]$$

Itulah persamaan gerak Hamilton yang menggantikan persamaan gerak Newton.

Ungkapan Hamilton ini kemudian ternyata berguna dalam menggarap mekanika statistik, dan kemudian mekanika kuantum. Seperti anda tahu Mekanika Kuantum yang merupakan 'bahasa' dalam mengungkapkan obyek-obyek seperti molekul, atom, elektron, nukleon,

foton, ...dsb. yang ukurannya lebih kecil dari satu nanometer mengungkapkan bahwa kita tidak dapat mengukur secara serentak posisi $s(t)$ dan momentum $p(t)$ dengan ketepatan yang tinggi. Kalau ketepatan pengukuran kita tentang $s(t)$ tinggi, maka ketepatan pengukuran kita tentang $p(t)$ menjadi rendah. Demikian pula sebaliknya. Ada prinsip dasar yang dikenal sebagai 'Prinsip Ketidakpastian Heisenberg' yang tampaknya berlaku bagi upaya kita mencari informasi lewat pengukuran. Jika Δs adalah ketidakpastian hasil pengukuran s , dan Δp adalah ketidakpastian hasil pengukuran p , maka berlaku hubungan

$$\Delta s \cdot \Delta p \geq h \quad [2-8]$$

di mana h tetapan Planck yang nilainya $6,6256 \times 10^{-34}$ Joule.detik.

Menampilkan pola Hamilton pada mesin komputer

Untuk lebih meyakinkan kita bahwa teknik fisika statistik merupakan alternatif yang sepadan dengan teknik dinamika kumpulan obyek, akan kita buat program untuk melukiskan gerak dari 10 atom masing-masing dengan energi yang sama.

Salah satu kendala kita dalam menggarap dinamika kumpulan benda banyak adalah ketidakmampuan untuk mengukur posisi serta kecepatan awalnya. Ungkapan Hamilton jika dilukis dengan grafik akan menampilkan gambaran yang lebih cermat. Dibuat ruang grafik dengan koordinat nilai s dan p (bukan s dan t seperti lazimnya). Variabel t sebagai besaran waktu akan kita tampilkan secara aktual dari waktu ke waktu (istilahnya 'real-time' simulation). Ruang (s,p) dalam literatur sering disebut sebagai ruang-U.

Karena kita akan melukis 10 atom maka dideklarasikan dahulu variabel lewat perintah

```
Dim s(10), p(10)
```

Akan kita sederhankan persoalannya dengan memilih besaran $\kappa=2$ dan besaran massa = $1/2$, sehingga fungsi Hamiltonnya berbentuk

$$H(s,p) = (s^2 + p^2)$$

Persamaan geraknya menjadi

$$\begin{aligned} (dp/dt) &= -2s(t) \\ (ds/dt) &= 2p(t) \end{aligned}$$

Dalam simulasi ini rentang s dibatasi dari -2 s/d $+2$, artinya amplitudo getaran itu = 2. Itu membuat nilai energi $H = 4$ yaitu nilai energi potensial maksimumnya.

Lokasi awal $t = 0$, yaitu $s(1), s(2), \dots, s(10)$ dibuat acak dalam rentang antara -2 s/d $+2$. Tetapi sekali s dipilih maka p tidak bebas sebab harus berlaku $H = 4$. Perintah untuk membuat acak nilai s anda tahu :

$$s = -2 + 4 * Rnd$$

Pilihan untuk p tentunya menjadi $p = \text{akar dari } (4 - s^2)$; tetapi tandanya boleh positif ataupun negatif. Untuk itu dilakukan undian, misalnya dengan pernyataan

```

undi = Int(2*Rnd)
If undi = 0 then
  p = Sqr(4 - s*s)
else
  p = - Sqr(4 - s*s)
End If

```

Jika perintah semacam ini dijalankan untuk pasangan $[s(1),p(1)], \dots, [s(10),p(10)]$ dan digambar lewat XY scater Chart, maka akan tampil 10 obyek yang lokasinya pada tepi lingkaran berjari-jari 2. Jadi menjalankan program ini berulang-ulang akan menghasilkan sebaran yang berbeda-beda tetapi tetap lokasinya tak keluar dari tepi lingkaran jari-jari 2 itu.

Sekarang kita buat subrutin yang menggerakkan obyek-obyek tersebut mengikuti aturan mekanika. Perintahnya sederhana

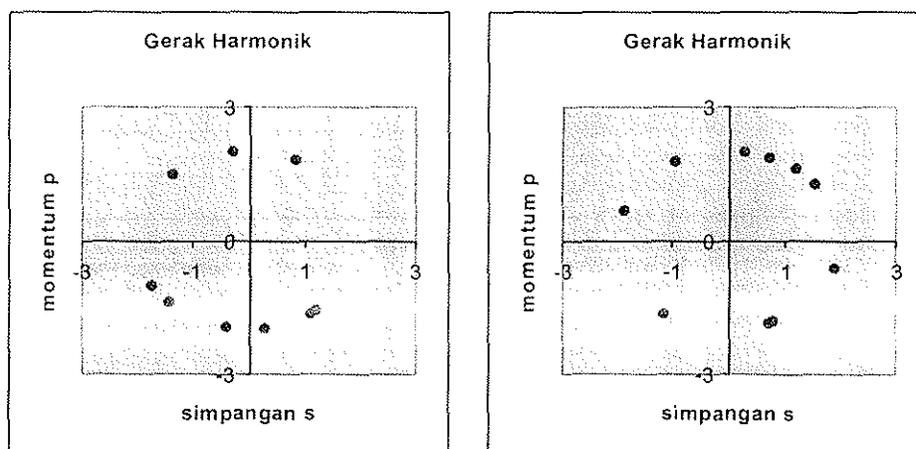
```

dt = 0.01
sLama = s
pLama = p
s = sLama + 2*pLama*dt
p = pLama - 2*sLama*dt

```

Jika itu diterapkan pada pasangan $[s(1),p(1)], \dots, [s(10),p(10)]$ dan program dijalankan, maka sepuluh atom tadi akan bergerak pindah tempatnya, tetapi tetap mengikuti jalur tepi lingkaran berjari-jari 2 tadi.

Artinya, dengan berjalannya waktu sebenarnya sepuluh atom tadi menggantikan peranan membagikan secara acak nilai lokasi awal pada ruang-U. Tentu saja kalau atomnya hanya 10 sebaran pada tepi lingkaran itu belum merata, tetapi kalau jumlah atom menjadi satu juta, **anda tidak dapat membedakan lagi lukisan di ruang-U, apakah itu dihasilkan oleh sebaran acak berulang-ulang, ataukah itu hasil dinamika gerak atom-atomnya.**



Gambar 2-1

Gas Ideal

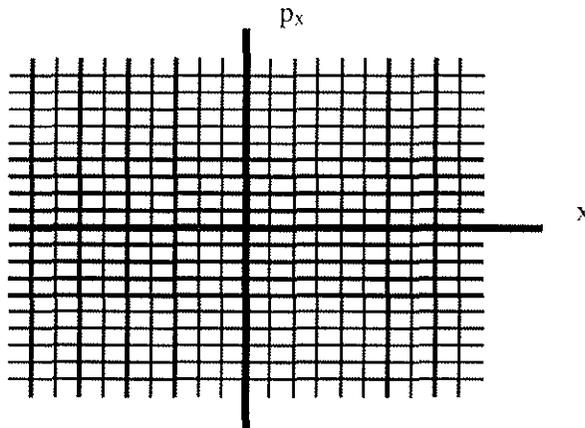
Yang dimaksud dengan *gas ideal* adalah kumpulan atom yang bergerak bebas tidak saling berinteraksi satu sama lain, kecuali pada waktu menumbuk dinding dan dipantulkan. Pantulannyapun terjadi secara elastik sempurna sehingga tidak ada energi yang terbangun. Perangainya sifat-sifatnya sudah sangat anda kenal, seperti hukum Boyle-Gay Lusac $PV = NkT$, di mana P tekanan, V volume, N jumlah atom, k tetapan Boltzmann, dan T suhu absolut dalam derajat Kelvin. Sekarang kita akan meninjaunya lewat gambaran statistik.

Fungsi Hamilton untuk sebuah atom yang bergerak bebas dalam ruang dengan volume V , dapat dituliskan sebagai

$$H(x, y, z; p_x, p_y, p_z) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2m \quad [2-9]$$

Pada ruas kanan persamaan [1] tidak terdapat variabel x , y , atau z . Menurut hukum gerak Hamilton, karena $(\partial H/\partial x) = 0$, maka $[dp_x(t)/dt] = 0$ berarti momentum dalam arah- x nilainya konstan, tidak berubah dengan waktu. Hal serupa terjadi pada arah- y dan arah- z .

Menurut aturan ketidakpastian Heisenberg setiap pasangan variabel misalnya x dan p_x tak dapat diukur secara teliti masing-masing, ada aturan $\Delta x \Delta p_x \geq h$ (tetapan Planck). Jadi untuk pasangan (x, p_x) kita dapat membagi ruang- U nya menjadi kotak-kotak yang masing-masing berukuran Δx (dalam arah- x) dikalikan dengan Δp_x (dalam arah p_x), 'luas'nya = h .



Gambar 2-2

Kotak-kotak itu dapat diberi nomor indeks berurutan, misalnya k_x dalam kedudukannya arah- x , dan k_{p_x} dalam kedudukannya arah- p_x . Indeksnya dapat dibuat agar titik $x=0$ bertepatan dengan index $k_x = 0$. Jadi nomor indeksnya bilangan bulat positif bila x positif, dan bilangan bulat negatif bila x negatif. Hal serupa dilakukan pada indeks k_{p_x} .

Proses serupa kita lakukan pada pasangan (y, p_y) dan juga pasangan (z, p_z) .

Untuk sementara kita akan membuat indeks penomoran 'kotak-kotak' itu berturutan, misalnya dari nomor 1 s/d 1 000 000 000 (semilyard).

Karena jumlah atom N dan jumlah kotak (1 000 000 000) besar sekali, maka tampilan mesin komputer tidak akan dapat digunakan. Kita cari teknik menyimpulkannya secara analitik. Bila kita mendistribusikan N atom itu ke dalam konfigurasi :

n_1 di kotak nomer-1
 n_2 di kotak nomer-2

 $n_{\text{semilyard}}$ di kotak nomer-semilyard

maka akan ditemukan ragam sebanyak

$$W(n_1, n_2, \dots, n_{\text{semilyard}}) = N! / [n_1! \cdot n_2! \dots n_{\text{semilyard}}!] \quad [2-10]$$

Untuk menemukan konfigurasi yang peluangnya terbesar, kita mencari nilai maksimum dari besaran W . Menurut aturan matematika, jika kita mempunyai fungsi dengan variabel banyak, maka harga ekstrimnya (minimum atau maksimum) diperoleh dengan menemukan nilai variabel yang membuat fungsi turunan parsial nya terhadap masing-masing variabel sama dengan nol. Di sini ada satu milyar variabel, dan bentuk fungsinya pun (fungsi faktorial) tidak lazim di kenal. Ada dalil matematika yang dapat membantu, yaitu dalil Stirling yang menyatakan bahwa untuk N yang sangat besar

$$\ln(N!) \cong N \cdot \ln(N) - N \quad [2-11]$$

Karena itu, yang kita cari maksimumnya bukan W tetapi $\ln(W)$. Jadi fungsi yang kita maksimumkan adalah

$$F(n_1, n_2, \dots) = N \cdot \ln(N) - N - \sum_{i=1}^{\text{semilyard}} [n_i \ln(n_i) - n_i] \quad [2-12]$$

Masih ada hal lain yang perlu diperhatikan, yaitu bahwa variabel n_1, n_2, \dots itu tidak bebas satu sama lain, sebab jumlah seluruhnya harus = N . Jadi ada pembatasan pilihan nilainya yaitu hanya sebatas yang memenuhi syarat

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_{\text{semilyard}}) = N \quad [2-13]$$

Untunglah ada dalil matematika lain, yang dinamakan dalil Pelipat Lagrange, yang pernyataannya sbb.

Jika ada fungsi $F(x, y, \dots)$ yang variabelnya dibatasi oleh syarat $G(x, y, \dots) = 0$, dan $I(x, y, \dots) = 0$, maka ada bilangan tertentu α dan β sehingga pada titik (x, y, \dots) yang membuat F maksimum berlaku

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \beta \frac{\partial I}{\partial x} = 0 \quad [2-14]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \alpha \frac{\partial G}{\partial y} + \beta \frac{\partial I}{\partial y} = 0$$

.....
dst.

Dalil tersebut dapat kita terapkan untuk fungsi

$$F(n_1, n_2, \dots) = N \cdot \ln(N) - N - \sum_{i=1}^{\text{semilyard}} [n_i \ln(n_i) - n_i] \quad [2-15]$$

Ada dua kendala yang membatasi pilihan kita tentang n_i . Kendala pertama disebabkan karena jumlah semua populasi n_i harus sama dengan jumlah atom yang ada, yaitu N .

Maka akan kita gunakan fungsi pembatas

$$G(n_1, n_2, \dots) = (n_1 + n_2 + \dots + n_{\text{semilyard}}) - N \quad [2-16]$$

Kendala yang kedua terjadi karena pada setiap kotak n_i terkait nilai energi tertentu ϵ_i sedangkan gas ideal yang kita bahas energi totalnya = U . Berarti jumlah $n_i \cdot \epsilon_i$ seluruhnya harus = U yang bernilai tertentu.

$$(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots) = U \quad [2-17]$$

Jadi kita tambahkan fungsi pembatas

$$I(n_1, n_2, \dots) = (n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots) - U \quad [2-18]$$

Maka kondisi untuk sebaran populasi atom-atom yang paling sering dijumpai ("most probable") dalam proses pengukuran pada kotak-kotak tadi menjadi

$$\ln(n_1) + \alpha + \beta \cdot \epsilon_1 = 0 \quad [2-19]$$

$$\ln(n_2) + \alpha + \beta \cdot \epsilon_2 = 0$$

.....

dst.

Sebaran populasinya tidak merata, melainkan merupakan fungsi yang terkait dengan energi pilihan nilai kecepatan partikel. Untuk lokasi j yang terkait dengan energi ϵ_j populasinya menjadi

$$n_j = \exp(-\alpha) \cdot \exp(-\beta \cdot \epsilon_j) \quad [2-20]$$

Nilai tetapan α mudah dicari dengan mengingat bahwa jumlah semua populasinya harus sama dengan jumlah atom N . Tepatnya, kita peroleh bentuk

$$n_j = \frac{N}{\sum_{i=1}^{\text{semilyard}} \exp(-\beta \epsilon_i)} \exp(-\beta \epsilon_j) \quad [2-21]$$

Nilai β masih harus dicari, tidak lewat argumentasi statistik tetapi lewat perangai fisika obyek yang kita garap yaitu Gas Ideal.

Ungkapan persamaan [12] memungkinkan kita untuk menghitung energi (kinetik) rata-rata atom yang ada dalam Gas tersebut. Jika kita menuliskan (ζ adalah huruf kecil z dalam alfabet Yunani)

$$\zeta(\beta) = \sum_{i=1}^{\text{semilyard}} \exp(-\beta \epsilon_i) \quad [2-22]$$

maka nilai rata-rata energi satu atom dalam Gas dapat diungkapkan sebagai

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{\text{semilyard}} n_j \epsilon_j}{N \zeta(\beta)} = - \frac{1}{\zeta(\beta)} \frac{\partial \zeta(\beta)}{\partial \beta} = - \frac{\partial \ln \zeta(\beta)}{\partial \beta} \quad [2-23]$$

Karena itu kita perlu menghitung secara eksplisit berapakah $\zeta(\beta)$.

Untuk itu kita kembali pada proses penomoran yang semula. Sekarang kita akan menghitung besaran yang dituliskan sebagai $\zeta(\beta)$ yang lazimnya disebut *fungsi partisi atom*. Nilainya sama dengan jumlah untuk semua kotak dari fungsi $\exp(-\beta \epsilon)$, dengan ϵ adalah energi atom bila berada di kotak yang dimaksud. Jadi

$$\zeta(\beta) = \sum_{kx} \sum_{kpx} \sum_{ky} \sum_{kpy} \sum_{kz} \sum_{kpz} \exp(-\beta \epsilon_{kx, kpx, ky, kpy, kz, kpz}) \quad [2-24]$$

Dengan mengingat bahwa $\Delta x, \Delta p_x, \dots$ dst itu nilainya kecil, maka penjumlahan itu dapat didekati dengan integral

$$\zeta(\beta) = \frac{1}{h^3} \int dx \int dy \int dz \int dp_x \int dp_y \int dp_z \exp[-\beta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m] \quad [2-25]$$

Faktor $(1/h^3)$ merupakan ungkapan dari $[1/(\Delta x \cdot \Delta p_x) \cdot (\Delta y \cdot \Delta p_y) \cdot (\Delta z \cdot \Delta p_z)]$.

Integral terhadap $x, y,$ dan z menghasilkan volume V karena integrandnya bernilai 1, sedangkan integral terhadap momentumnya, dengan rentang batas antara $-\infty$ hingga $+\infty$ menghasilkan $[\sqrt{2\pi m/\beta}]^3$ (lihat Lampiran A). Jadi

$$\zeta(\beta) = (1/h^3) \cdot V \cdot [\sqrt{2\pi m/\beta}]^3 \quad [2-26]$$

Jika kita menghitung energi rata-rata setiap atom dengan menggunakan persamaan [2-23] dengan mudah didapat

$$\langle \epsilon \rangle = (3/2\beta) \quad [2-27]$$

Anda sudah mempelajari dari teori kinetik, bahwa untuk gas ideal $\langle \epsilon \rangle = (3/2)kT$ di mana k tetapan Boltzmann dan T suhu absolut dalam derajat Kelvin. Jadi kita boleh mengidentifikasi parameter $\beta = (1/kT)$.

Suplemen

Jika anda kurang yakin mengapa energi rata-rata atom dalam gas ideal $\langle \epsilon \rangle = (3/2)kT$, berikut ini penjelasannya.

Misalkan bahwa ruang kita berbentuk kubus dengan sisi L . Kita perhatikan gerak atom, massa m , dengan kecepatan v yang komponen arah- x -nya adalah v_x . Ketika menumbuk dinding yang tegak lurus sumbu- x atom akan dipantulkan sehingga arahnya berubah sesuai dengan hukum pantulan sempurna. Komponen v_x akan berubah menjadi $-v_x$, berarti ada perubahan momentum sebesar $2.m.v_x$. Proses tadi berjalan berurut-turut, setiap selang waktu $(2L/v_x)$. Jadi gaya F yang bekerja pada dinding, yaitu jumlah transfer momentum per satuan waktu, adalah

$$F = \frac{2m.v_x}{2L/v_x} = \frac{m.v_x^2}{L}$$

Untuk N atom, tentu v_x^2 pada gaya F harus diganti dengan $(v_{x1}^2 + v_{x2}^2, \dots + v_{xN}^2)$. Atau kalau kita definisikan nilai rata-rata v_x sebagai

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2)}{N} \quad \text{maka } \langle F \rangle = (1/L).N.\langle v_x^2 \rangle$$

Kecepatan rata-rata atom,

$$\langle v^2 \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

Tetapi tentunya $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, sehingga $\langle v_x^2 \rangle = (1/3). \langle v^2 \rangle$

Tekanan P pada dinding adalah rata-rata Gaya per satuan luas. Jika luas itu $A = L \cdot L$, maka

$$P = \frac{N.m\langle v^2 \rangle}{3.L.A} = \left(\frac{2}{3} \right) \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right)$$

Padahal kita sudah mendapatkan hukum empirik $PV = N kT$, jadi ungkapan di atas berarti

$$\left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{3}{2} kT$$

Ruas kiri persamaan di atas adalah energi kinetik rata-rata dari atom dalam gas ideal kita, dan untuk gerak bebas memang energinya hanya berupa energi kinetik. Jadi memang boleh disimpulkan bahwa

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Catatan

Ketika kita menurunkan rumus [2-21] sesungguhnya obyek agregat kita berupa gas ideal sama sekali tidak muncul secara eksplisit. Kita hanya membagi-bagi kotak variabel yang nilainya terkait dengan energi. Jadi rumus semacam itu mestinya juga berlaku pada kasus-kasus agregat yang lain. Kasus gas ideal itu kita pakai hanya ketika kita ingin mencari nilai parameter β . Pengalaman kemudian menunjukkan bahwa penggunaan nilai $\beta = (1/kT)$ itu ternyata tidak hanya berlaku pada kasus Gas Ideal saja, tetapi juga pada kasus pada umumnya.

Jadi, pada dasarnya dapat dirumuskan aturan sbb. Jika kita punya agregat yang berisi N atom yang tak saling berinteraksi satu sama lain, sedangkan atom-atom itu boleh memiliki pilihan 'status' yang dapat diberi indeks tertentu, misalnya j , maka dalam lingkungan dengan suhu T derajat Kelvin, sebaran populasi tiap statusnya adalah

$$n_j = \frac{N}{\sum_i \exp(-\epsilon_i / kT)} \exp(-\epsilon_j / kT) \quad [2-28]$$

di mana ϵ_j adalah energi atom tersebut pada 'status' ke- j , dan k adalah tetapan Boltzmann. Ungkapan pada persamaan [18] dikenal sebagai **Distribusi Maxwell-Boltzmann**.

Ilustrasi dengan program komputer

Untuk lebih memahami makna hitungan kita akan disajikan disini program komputer untuk melukiskan konsekuensi dari distribusi Maxwell-Boltzmann itu.

Sebagai contoh sederhana dimisalkan bahwa ada 10 status energi obyek (partikel) yang kita garap. Besarnya energi $E(j) = j$ untuk mudahnya, berarti punya rentang dari 1 s/d 10. Itu kita tuliskan pada kolom $E(j)$. Kolom sebelahnyanya nilainya = $\exp[-E(j)/kT]$ yang tentunya bergantung pada nilai kT . Oleh sebab itu disiapkan sel untuk menampung nilai kT yang kita pilih. Jumlah dari kolom-2 ini adalah faktor pembagi untuk membuat distribusi peluang itu akhirnya jumlahnya = 1. Kita isikan hasilnya $n(j)$ peluang untuk menempati status nomer j , pada kolom ketiga.

$$kT = 9$$

Dasar	energi E(j)	exp[-E(j)/kT]	n(j)	N(j)
	1	0.89483932	0.156767	0.156767
	2	0.8007374	0.140282	0.297049
	3	0.71653131	0.12553	0.422579
	4	0.64118039	0.112329	0.534907
	5	0.57375342	0.100516	0.635424
	6	0.51341712	0.089946	0.725369
	7	0.45942582	0.080487	0.805856
	8	0.41111229	0.072023	0.877879
	9	0.36787944	0.064449	0.942328
	10	0.32919299	0.057672	1
	z =	5.7080695	1	

Tabel 2-1

Kolom ke-4 memerlukan sedikit penjelasan maknanya. isinya : baris-1 sama dengan $n(1)$, baris-2 sama dengan baris pertama ditambah dengan $n(2)$, baris-3 sama dengan baris-2 ditambah dengan $n(3)$, ...dst. Baris-10 tentunya = 1 sebab jumlah seluruh baris dalam kolom $n(j)$ itu sama dengan 1.

Jika nilai kT dipilih, maka nilai-nilai yang ada pada kolom-2 s/d kolom-4 akan berubah secara otomatis.

Nah, sekarang kita akan membuat 1000 undian bilangan acak antara 0 dan 1, yang melukiskan kondisi sebuah partikel. Setiap nilai dalam rentang (0,1) itu memiliki peluang yang sama berdasarkan "pseudo random number" yang ada di mesin komputer. Kita siapkan 4 macam nilai kT , yaitu 0.3, 2, 6, dan 9 agar ada variasi.

Untuk setiap nilai kT yang ada, dibaca nilai $N(j)$ untuk $j=1$ s/d 10. Jika bilangan undi tadi letaknya antara 0 dengan $N(1)$, maka pada baris-1 kelompok data "Acuan" nilainya ditambah dengan $1/1000$, artinya ada tambahan satu partikel pada energi $n(1)$. Kalau bilangan undi tersebut letaknya antara $N(1)$ dengan $N(2)$ maka baris-2 dari kelompok data ini ditambah nilainya dengan $1/1000$, ... begitu seterusnya. Setelah 1000 nilai undi maka tersebarlah 1000 partikel itu mengikuti distribusi Maxwell-Boltzmann.

Data tersebut kemudian kita lukis dengan Graph.

Programnya sbb.

```
Dim batas(10)
Dim pop(10)
Dim jmlPartikel
Dim urutan(4)
```

Private Sub awalData()

```

    jmlPartikel = 1000
   urut(1) = 0.5
   urut(2) = 2
   urut(3) = 6
   urut(4) = 9

```

End Sub

Private Sub nolkan()

```

    For i = 1 To 10
        For j = 1 To 4
            pop(i) = 0
            Range("Acuan").Offset(i, j).Value = pop(i)
        Next j
    Next i

```

End Sub

Private Sub hitungSebaran()

```

    For i = 1 To 10
        batas(i) = Range("Dasar").Offset(i, 4).Value
    Next i
    batas(0) = 0

```

End Sub

Private Sub cuplikan(nomer)

```

    For i = 1 To 10
        pop(i) = 0
    Next i
    hitungSebaran
    Randomize
    For n = 1 To jmlPartikel
        undi = Rnd
        For i = 1 To 10
            If undi <= batas(i) And undi > batas(i - 1) Then
                pop(i) = pop(i) + 1 / jmlPartikel
                Range("Acuan").Offset(i, nomer) = pop(i)
            End If
        Next i
    Next n

```

End Sub

Private Sub Proses()

```

    awalData
    nolkan
    For jj = 1 To 4
        Range("kT").Value = urut(jj)
        cuplikan jj
    Next jj

```

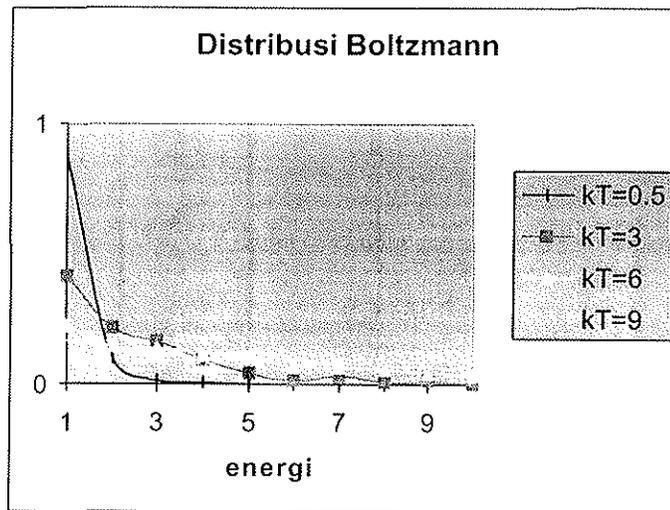
End Sub

Hasilnya dapat dilihat pada tabel di bawah ini

Acuan	$kT=0.5$	$kT=3$	$kT=6$	$kT=9$
	0.877	0.412	0.223	0.168
	0.101	0.214	0.145	0.145
	0.018	0.166	0.135	0.118
	0.004	0.094	0.113	0.104
	0	0.044	0.107	0.105
	0	0.018	0.07	0.081
	0	0.029	0.068	0.084
	0	0.009	0.057	0.073
	0	0.011	0.044	0.065
	0	0.003	0.038	0.057
	1	1	1	1

Tabel 2-2

Kalau dilukis dengan Graph hasilnya sbb.



Gambar 2-3

Tentang makna dari bilangan $N(j)$, untuk $j=4$ misalnya, adalah jumlah peluang sebuah partikel memiliki energi antara 0 dan $N(4)$. Karena itu $N(10)=1$. Jadi kalau nilai undi antara $N(3)$ dengan $N(4)$ berarti bahwa partikel tersebut merupakan anggota $n(4)$.

Kita akan menjumpai masalah serupa ketika nanti jumlah status kuantum energinya sangat besar.

Hubungan dengan fungsi Termodinamika yang lain

Untuk mendapatkan gambaran yang lebih lengkap, kita dapat bermain dengan fungsi-fungsi termodinamika lain seperti yang sudah kita kenal. Ada fungsi energi bebas Helmholtz yang didefinisikan sebagai

$$F = U - T.S \quad [2-29]$$

Dari hukum kedua Termodinamika, $dU = T.dS - P.dV$, akan kita peroleh aturan

$$dF = dU - T.dS - S.dT = -P.dV - S.dT \quad [2-30]$$

Secara matematika kita dapat menuliskan

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad [2-31]$$

$$\text{dan} \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad [2-32]$$

Berarti hubungan antara U dan F dapat dituliskan dalam bentuk lain, yaitu

$$F = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad \text{atau} \quad U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T}\right) \quad [2-33]$$

Kita sudah mendefinisikan fungsi yang kita sebut sebagai *fungsi partisi atom*

$$\zeta(\beta) = \sum_i \exp(-\beta \epsilon_i)$$

$$\text{atau dalam ungkapan lain} \quad \zeta(V, T) = \sum_i \exp(-\epsilon_i / kT) \quad [2-34]$$

Akan kita definisikan besaran lain, yang sementara ditulis sebagai $Q(V, T) = -NkT \ln(\zeta)$. Kalau kita menghitung

$$-T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Q}{T}\right) = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(\zeta) = N \frac{\sum_i \epsilon_i \exp(-\epsilon_i / kT)}{\sum_i \exp(-\epsilon_i / kT)} = N \langle \epsilon \rangle = U \quad [2-35]$$

Jadi kita dapat mengidentifikasi Q sebagai fungsi energi bebas Helmholtz F

Dengan demikian resep hitungan kita menjadi lebih mudah. Apapun obyek yang dibahas kita dapat menghubungkan hitungan statistik tentang "most probable distribution" dengan fungsi-fungsi termodinamika lewat langkah berikut.

- (a) Hitung *fungsi partisi atom* $\zeta(V, T) = \sum_i \exp(-\epsilon_i / kT)$
 (b) Tuliskan fungsi energi bebas Helmholtz sebagai $F(N, V, T) = -NkT \ln(\zeta)$
 (c) Kita dapat menghitung besaran fungsi termodinamika yang lain, dari

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T}\right)$$

Kalau diterapkan pada kasus Gas Ideal, sekarang kita dapat menghitung entropinya,

$$S = Nk [\ln V + (3/2) \ln T + \theta] \quad [3-36]$$

dengan $\theta \equiv \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mk}{h^2} \right) + \frac{3}{2}$ besaran yang tidak bergantung pada T, V, dan N.

Catatan

Rumus ini belum seratus persen benar, karena mengundang apa yang dinamakan Pradox Gibbs.

Zat Padat

Selain Gas, wujud lain yang mudah digarap adalah bahan padat, yang tidak mudah berubah bentuknya. dalam bayangan kita molekul (atau atom) pembentuknya itu oleh gaya tarik antar molekul seolah-olah "melekat" satu sama lain, mengikuti aturan tertentu. Ada geometri khusus yang mempelajari bentuk tatalaksana wujud padat ini, yang sering disebut kisi-kisi ("lattice").

Pengukuran kapasitas panas bahan padat umumnya menunjuk pada nilai $C_v(T)$ pada suhu ruang sebesar $3 Nk$, dua kali nilai $C_v(T)$ pada bahan yang berupa gas. Hal itu juga dapat dijelaskan lewat cara yang sangat sederhana. Molekul atau atom yang ada pada bahan padat tersebut sesungguhnya tidak diam (statik) melainkan bergetar, katakanlah mengikuti gerak harmonik. Energinya dapat diungkap dalam besaran simpangan s dan momentum p menggunakan ungkapan mekanikanya Hamilton sebagai

$$\epsilon(s, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2} s^2 \quad [2-37]$$

Jika gerak getaran itu terjadi dalam arah 3-dimensi maka ungkapannya menjadi

$$\epsilon(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad [2-38]$$

Untuk mudahnya, kita anggap saja masing-masing molekul pada kisi-kisi itu bergetar dengan frekuensi yang sama, berarti tetapan pegas κ nilainya sama. Jadi garapan kita terdiri atas N molekul yang melakukan getaran harmonik seperti dilukiskan oleh persamaan [2-] di atas.

Kita dapat menyatakan besaran fungsi partisi atom seperti yang ada pada persamaan [2-25] menjadi

$$\zeta(\beta) = \frac{1}{h^3} \int dx \int dy \int dz \int dp_x \int dp_y \int dp_z \exp \left[-\beta \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right) \right]$$

Karena besaran x , y dan z , demikian juga p_x , p_y , dan p_z dalam ungkapan di atas dapat ditulis sebagai faktor terpisah, maka ungkapan itu juga dapat dituliskan sebagai

$$\zeta(\beta) = \frac{1}{h^3} \left\{ \int \exp(-\beta p^2 / 2m) dp \right\}^3 \left\{ \int \exp(-\beta s^2 \kappa / 2) ds \right\}^3 \quad [2-39]$$

Kalau dihitung hasilnya

$$\zeta(\beta) = \left(1/h^3 \right) \left[\sqrt{2\pi m / \beta} \right]^3 \left[\sqrt{2\pi / \kappa \beta} \right]^3 \quad [2-40]$$

Dari sini kita dapat menghitung energi rata-rata per atom / molekul lewat

$$\langle \epsilon \rangle = - \frac{\partial \ln \zeta(\beta)}{\partial \beta} = 3 / \beta = 3kT \quad [2-41]$$

Energi internal $U(T) = N \langle \epsilon \rangle = 3NkT$.

Besaran yang biasa kita ukur dalam eksperimen itu bukan energi internal U , melainkan kapasitas panasnya, yaitu banyaknya energi yang kita perlukan untuk menaikkan suhu benda tersebut dengan 1 derajat. Untuk zat padat dari persamaan [2-50] kita dapatkan

$$C_V(T) = dU(T)/dT = 3Nk. \quad [2-42]$$

Catatan: Sifat bahwa untuk hampir semua bahan padat kapasitas panasnya $= 3Nk$ itu ternyata hanya berlaku pada suhu yang tidak terlalu rendah. Pengukuran pada suhu $T \rightarrow 0$ menunjukkan bahwa $C_V(T)$ juga $\rightarrow 0$.

Fisika Statistik, Prof. B. Suprpto Brotosiswojo, PhD.

Penerapan mekanika kuantum

Menurut mekanika kuantum, status energi sebuah osilator harmonik ditandai dengan sebuah bilangan kuantum n yang nilainya boleh 0,1, 2, 3,dst. Energi osilator pada status tersebut nilainya

$$\epsilon_n = hv(n + 0.5) \quad [2-43]$$

di mana h tetapan Planck dan v frekuensi osilator tersebut.

Dengan demikian kita dapat menghitung berapa energi internal U dari bahan padat tersebut pada suhu T , dengan menghitung

$$U = \frac{3N}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i \exp(-\epsilon_i / kT) \quad [2-44]$$

dengan

$$\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\epsilon_j / kT) \quad [2-45]$$

yang lazim disebut fungsi partisi. Sudah kita bahas sebelumnya bahwa jika besaran $(1/kT)$ kita tulis sebagai parameter β , maka ungkapan untuk energi internal U menjadi lebih sederhana

$$U = -\frac{3N}{\zeta(\beta)} \frac{\partial \zeta(\beta)}{\partial \beta} \quad [2-46]$$

Oleh karena itu akan kita hitung sekarang nilai $z(\beta)$ tersebut.

$$\zeta(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\beta \epsilon_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\beta hv[j + 0.5]) = \frac{\exp(-\beta hv / 2)}{1 - \exp(-\beta hv)} = \frac{2}{\sinh(\beta hv / 2)} \quad [2-47]$$

jadi akan kita dapatkan

$$U = (3/2)Nhv \frac{\cosh(\beta hv / 2)}{\sinh(\beta hv / 2)} = (3/2)Nhv \frac{e^{\beta hv / 2} + e^{-\beta hv / 2}}{e^{\beta hv / 2} - e^{-\beta hv / 2}} \quad [2-48]$$

Secara sederhana dapat dilihat apa yang terjadi pada T sangat rendah, dan apa yang terjadi jika suhu T sangat tinggi. Pada T sangat rendah besaran β menjadi sangat besar sehingga kita peroleh

$$U \rightarrow 3Nhv \quad [2-49]$$

Berarti bahwa U nilainya bukan nol pada $T \rightarrow 0$. Ada sisa energi, yang membuat osilator masih tetap bergetar. Itu sudah bisa diramalkan sebab pada $T=0$ tentunya semua osilator akan menempati status dengan energi paling rendah, dan itu nilainya tidak nol seperti anggapan kita secara klasik.

Kalau T sangat tinggi nilainya, maka kita dapat menuliskan $e^x \approx (1 + x + \dots)$, sehingga energi U menjadi

$$U \cong (3/2)N h \nu \frac{2kT}{h\nu} = 3NkT \quad [2-50]$$

Itu sama dengan ramalan perhitungan klasik, karena setiap osilator secara rata-rata pada suhu T akan menyumbangkan nilai energi sebesar kT .

Tugas

Dengan komputer, buatlah grafik energi internal rata-rata getaran molekulnya (U/N) sebagai fungsi dari besaran β untuk menyaksikan bagaimana perangai energi internal tersebut. Anda sebaiknya juga membuat besaran h dan ν sebagai parameter yang dapat diubah-ubah nilainya.

Buatlah juga grafik (U/N) terhadap suhu T , periksalah apakah betul kesimpulan analitik yang kita sebut di atas ?

Membandingkan hasil hitungan dengan hasil pengamatan eksperimen

Dari ungkapan U sebagai fungsi dari suhu T , mestinya kita dapat menghitung besarnya kapasitas panas tadi sebagai

$$C_V = dU/dT \quad [2-51]$$

Jika kita menuliskan variabel $x = h\nu/2kT$, maka

$$dU/dT = (dU/dx) \cdot (dx/dT) \quad [2-52]$$

Dari definisi x kita dapat $dx/dT = -x/T$, sehingga

$$C_V(T) \cong \frac{dU}{dT} = -(3/2)N h \nu \frac{x \sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = (3/2)N h \nu \frac{(x/T)}{\sinh^2(x)} \quad [2-53]$$

$$\text{Diungkap dalam } T: \quad C_V(T) = 3Nk \left(\frac{h\nu}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2(h\nu/2kT)} \quad [2-54]$$

Pada suhu T yang tinggi besaran x menjadi sangat kecil sehingga

$$\sinh(x) \cong (1/2)[(1+x) - (1-x)] \cong x \quad [2-55]$$

maka

$$C_V(T) \cong 3Nk \quad [2-56]$$

seperti yang kita jumpai pada hasil perhitungan dengan osilator klasik. Pada hitungan dengan osilator klasik nilai $C_V(T) = 3Nk$ dan merupakan besaran yang konstan tidak berubah dengan perubahan suhu T , termasuk jika $T \rightarrow 0$.

Apa yang dijumpai dalam eksperimen adalah bahwa $C_V(T)$ semakin kecil nilainya ketika suhu T mendekati 0. Kalau $T \rightarrow 0$ maka x menjadi sangat besar sehingga besaran $\sinh(x)$ akan mendekati $(1/2) \exp(x)$. Maka persamaan [12] akan merubah menjadi

$$C_V(T) \cong (3/2)Nk \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \exp(-h\nu/kT) \quad [2-57]$$

Artinya, memang benar bahwa $C_V(T)$ akan mengecil ketika T mendekati 0. Jadi model Einstein yang sangat sederhana ini dalam garis besarnya dapat menerangkan perilaku kapasitas panas seperti yang diamati dalam eksperimen.

Sayang, ketika pengukuran eksperimen itu dilakukan lebih teliti lagi pada suhu T mendekati 0, hasil hitungan Einstein itu menunjukkan proses menurunnya $C_V(T)$ yang terlalu cepat. Kemudian ada model lain yang lebih cermat yang dibuat oleh Debye yang lebih mendekati hasil eksperimen.

BAGIAN-3 : WILAYAH KUANTUM

Mengungkap Fungsi Distribusi dalam skala Energi

Untuk kasus yang baru kita bahas yaitu osilator harmonik, kebetulan bilangan kuantum n untuk energi osilator muncul secara linier dalam skala energi

$$E_n = hv(n + 0.5), \quad \text{dengan } n = 1, 2, 3, \dots \text{dst.} \quad [3-1]$$

Oleh karena itu membuat fungsi distribusi dengan pembagian menurut indeks n , sekaligus juga melukiskan distribusi peluang dalam skala energi.

Tidak demikian halnya, jika yang kita garap itu partikel bebas seperti molekul dalam gas. Ada 3 bilangan kuantum yang menetapkan status energi partikel, namakanlah itu (n_x, n_y, n_z). Hanya saja hubungan antara nilai energi dengan bilangan kuantum tersebut adalah

$$E_{(n_x, n_y, n_z)} = A.(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad [3-2]$$

dengan n_x, n_y, n_z bilangan bulat (positif maupun negatif). Artinya, pada lapis energi dengan nilai tertentu E , akan terdapat banyak status energi yang ada di situ. Nilainya pun bergantung pada berapa nilai E .

Agar mudah membuat perhitungan, ada kalanya kita tidak lagi menggunakan skala bilangan kuantum (yang tentunya berbeda untuk kasus yang berbeda), tetapi dengan skala energi sebab besaran energi (atau turunannya) yang akan muncul dalam hasil pengukuran eksperimen. Untuk menampung adanya lebih dari satu status dalam satu lapis energi, maka pola hitungan kita harus diubah.

Dalam skala energi

nomor urut lapis energi	1	2	3
nilai lapis energinya	E_1	E_2	E_3
jumlah status pada lapis ini	g_1	g_2	g_3

Dari N partikel, didistribusikan dalam lapis energi masing-masing dengan jumlah sbb.

jumlah partikel dalam lapis energi	n_1	n_2	n_3
------------------------------------	-------	-------	-------	-------

Hitungan yang kita gunakan selama ini merupakan kasus khusus dengan $g_1 = g_2 = \dots = 1$. Untuk itu kita jumlah konfigurasi yang mungkin adalah

$$W(n_1, n_2, \dots) = N! / (n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots)$$

Lalu kita mencari fungsi distribusi sebagai distribusi (n_1, n_2, n_3, \dots) yang membuat W (atau $\ln W$) maksimum dengan syarat

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots = N \quad \text{dan} \quad n_1 \cdot E_1 + n_2 \cdot E_2 + \dots = U \text{ (tetap)}$$

Itu kita hitung dengan menggunakan dalil kelipatan Lagrange, di mana harus ada bilangan α dan β sehingga berlaku

$$(\partial \ln W / \partial n_s) + \alpha + \beta \cdot E_s = 0 \quad \text{untuk semua } s = 1, 2, 3, \dots$$

Kalau kita hitung dalam lapis energi, maka hitungan kita sedikit berbeda. Misalkan kita pilih lapis nomer- s . Di situ ada n_s partikel, namakan saja A, B, C, ... Ada g_s status kuantum yang tersedia. Setiap partikel boleh menempati salah satu dari g_s status kuantum yang tersedia itu, jadi ada $g_s^{n_s}$ ragam yang ada. Hanya saja dalam lapis itu kita tidak membedakan urutan letak ABCD... dari partikel; jumlah itu harus dibagi dengan $n_s!$. Jadi jumlah ragam seluruhnya ada

$$W(n_1, n_2, \dots) = N! \cdot (g_1^{n_1} / n_1!) \cdot (g_2^{n_2} / n_2!) \cdot \dots \quad [3-3]$$

Dengan menggunakan pendekatan Stirling $\ln(n!) \cong n \cdot \ln(n) - n$, hasilnya adalah

$$\ln(g_s) - \ln(n_s) + \alpha + \beta \cdot E_s = 0 \quad [3-4]$$

atau dengan $\beta = -1/(kT)$ didapat

$$n_s = e^{-\alpha} \cdot g_s \cdot \exp(-E_s/kT) \quad [3-5]$$

Perbedaan dengan ungkapan yang lama adalah adanya faktor g_s di situ. Ini tentu mudah dipahami karena dalam ungkapan dengan lapis energi ini pada lapis yang sama terdapat g_s status dengan energi yang sama, sehingga pada suhu T akan memiliki peluang yang sama untuk dihuni partikel.

Dalam hitungan hitungan analitik, jika lapis energi itu relatif kecil, maka untuk menjumlahkannya digunakan integral. Karena itu ungkapan g_s sering diubah menjadi

$$\text{Jumlah status diantara energi } E \text{ dengan } E + dE \text{ ada: } g(E) \cdot dE$$

$g(E)$ yang dapat bergantung pada nilai E , disebut **kerapatan status** ("density of states") dalam rentang energi E .

Kita dapat menafsirkan $f(E) \cdot g(E) \cdot dE$ disingkat $n(E) \cdot dE$, sebagai jumlah partikel yang menempati rentang energi antara E dan $E + dE$. Dalam hal seperti besaran α pada ungkapan [3-5] dapat dicari dari persamaan

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} f(E)g(E).dE$$

Setelah mendapatkan nilai α , lalu kita dapat menghitung energi internal sebagai

$$U(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} E.g(E)f(E).dE$$

Begitulah resep kerja yang dapat kita lalui.

Ungkapan eksplisitnya, tentunya bergantung pada obyek garapan kita, apakah itu kumpulan partikel bebas yang bergerak dalam ruang 3-dimensi (yaitu Gas Atom Tunggal), ataukah momen magnetik molekul, ataukah kumpulan osilator harmonik, ...dsb.

Obyek-obyek garapan itu akan kita bahas lebih lanjut nanti. Tetapi ada persoalan yang lebih perlu segera diungkapkan, yaitu bahwa ada sejumlah gejala alam yang melibatkan "partikel" seperti foton atau elektron ternyata memiliki perangai yang tidak sesuai dengan hasil hitungan statistik seperti yang kita ungkap sampai sekarang.

Kita ambil contoh misalnya perangai kapasitas panas bahan padat. Ada bahan isolator yang tidak dapat menghantar listrik. Menurut hitungan kita dengan menganggap bahwa atom-atom yang ada pada bahan itu gerakanya berupa osilator harmonik dalam tiga dimensi, seperti modelnya Einstein, kita ramalkan bahwa kapasitas panasnya $C_v(T)$ pada suhu ruang $= 3Nk$, bila N adalah jumlah atom yang terdapat pada bahan padat itu.

Kalau bahan padat tadi jenis konduktor yang dapat menghantar listrik, gambaran kita ada elektron yang dilepas oleh atom-atom yang ada di situ dan boleh bergerak secara bebas. Jadi lukisan kita tentang bahan konduktor terdiri atas N ion yang masing-masing berosilasi secara harmonik sehingga menyumbang $3Nk$ kepada kapasitas panas $C_v(T)$, dan N elektron yang masing-masing bergerak bebas menyerupai "gas". Hitungan statistik kita "gas elektron" tadi akan menyumbang $(3/2)Nk$ pada kapasitas panas $C_v(T)$, sehingga kapasitas panas bahan konduktor seharusnya $= 4.5 Nk$ sangat berbeda dengan kapasitas panas bahan isolator.

Hasil pengukuran menunjukkan bahwa hampir tidak ada beda nilai kapasitas panas antara zat padat isolator dengan zat padat konduktor pada suhu ruang. Jadi, pasti ada sesuatu yang harus dibenahi dalam hitungan statistik kita.

Alasan semacam ini, dan masih banyak hasil pengamatan lain, memaksa kita melihat secara lebih teliti perangai obyek seperti foton atau elektron. Kita perlu benar-benar menggarapnya dengan mekanika yang lebih tepat, yaitu mekanika kuantum.

Statistik Bose-Einstein

Jika anda belajar mekanika kuantum untuk kumpulan partikel-identik, fungsi gelombang keseluruhannya harus memenuhi syarat simetri bahwa menukar dua partikel tidak boleh mengubah makna fisika dari fungsi tersebut. Untuk memenuhi syarat tadi, selain bahwa kita tidak lagi boleh menamai partikel dengan identitas A, B, C, ...dsb., juga ada dua alternatif. Alternatif pertama adalah fungsi gelombang keseluruhan sama sekali tidak berubah ketika kita menukar identitas dari dua di antara partikel-partikel itu. Itu yang melukiskan partikel jenis Boson. Alternatif kedua adalah yang setiap kita menukar identitas dua partikel di antara partikel-partikel yang ada di situ, tanda fungsi gelombangnya berubah (plus ke minus, atau minus ke plus). Jenis partikel semacam ini masuk dalam golongan yang namanya Fermion.

Obyek fisika seperti foton ternyata masuk dalam kategori Boson. Ungkapan mudahnya adalah bahwa identitas dirinya hilang sama sekali, dalam arti tidak dapat dibedakan yang satu dengan yang lain. Kita harus mengubah cara hitung kita dengan menghilangkan identitas partikel. Yang tadinya kita tulis sebagai partikel A, B, C, ...dst. sekarang menjadi @, @, @, semuanya sama.

Misalkan pada lapis energi nomer-s, ada $n_s = 5$ partikel, dan ada $g_s = 7$ status. Kalau sekarang kita tidak boleh menamai partikel itu dengan A,B,C,D,E melainkan hanya dengan @,@,@,@,@, hitung berapa jumlah konfigurasi yang berbeda yang mungkin terjadi ?

Rentang 7 status tadi kita lihat sebagai ruangan yang dibatasi oleh dua dinding permanen, satu di sebelah kiri dan satu disebelah kanan.



Pada ruangan tersebut akan kita letakkan $n_s = 5$ partikel @ berderetan, lalu kita akan membagi ruangan tadi menjadi $g_s = 7$ kotak dengan meletakkan sekat, yang untuk mudahnya kita tulis dengan lambang \uparrow , jumlah sekatnya $g_s - 1 = 7 - 1 = 6$

Yang namanya konfigurasi gambar yang kita peroleh dari letak obyek yang berupa @ dan \uparrow dalam ruangan tersebut. misalnya :

$\uparrow @ \uparrow @ @ \uparrow \uparrow @ \uparrow @ \uparrow$

atau $@ @ \uparrow \uparrow \uparrow @ \uparrow @ @ \uparrow \uparrow$

atau $\uparrow \uparrow @ @ @ \uparrow \uparrow @ \uparrow @ \uparrow$

.....dan seterusnya.

Itu berarti kita mencari jumlah konfigurasi kalau kita mengisi sejumlah 11 lokasi dengan 5 diantaranya berisi @ dan 6 sisanya berisi obyek ↑. Itu tak lain daripada jumlah kombinasi C (11,5) yaitu $[11! / (5!.6!)]$. Secara umum

$$[(g_s - 1) + ns]! / \{ns!.(g_s - 1)!\} \quad [3-7]$$

Jadi kita dapat menuliskan

$$W(n_1, n_2, \dots) = \prod_s \frac{[(g_s - 1) + ns]!}{ns!.(g_s - 1)!} \quad [3-8]$$

Untuk mencari distribusi ns, kita lakukan proses

$$(\partial \ln W / \partial ns) + \alpha + \beta \cdot E_s = 0 \quad [3-9]$$

Untuk ini yang berbeda hanya hitungan untuk $(\partial \ln W / \partial ns)$, yaitu

$$(\partial \ln W / \partial ns) = \ln(g_s - 1 + ns) - \ln(ns) \quad [3-10]$$

sehingga didapat hasil

$$[(g_s - 1 + ns) / ns] = -(\alpha + \beta \cdot E_s)$$

atau

$$ns = \frac{(g_s - 1)}{\exp[-(\alpha + \beta E_s)] - 1} \quad [3-11]$$

Dalam perhitungan praktis, nilai g_s jauh lebih besar dari 1, sehingga $(g_s - 1)$ sering diganti dengan g_s saja. Juga kita sudah mempelajari bahwa $\beta = -(1/kT)$. Maka bentuk yang lazim ditampilkan adalah

$$n(E) \cdot dE = \frac{g(E) \cdot dE}{A \cdot \exp(E/kT) - 1} \quad [3-12]$$

Kalau ingin kita ungkapkan dalam distribusi menurut statusnya (bukan menurut skala lapis energi, maka dituliskan jumlah partikel Boson yang menempati status-i adalah

$$n_i = \frac{1}{A \cdot \exp(E_i / kT) - 1} \quad [3-13]$$

Ini disebut **fungsi distribusi Bose-Einstein**

Statistik Fermi-Dirac

Partikel jenis elektron, neutron, atau proton mengikuti aturan yang lain lagi, yaitu aturan jenis Fermion. Dalam mekanika kuantum itu masuk kategori yang setiap kita memukar identitas dua partikel di antara partikel-partikel yang ada di situ, tanda fungsi gelombangnya berubah (plus ke minus, atau minus ke plus).

Jenis Fermion ini memiliki perangai yang aneh, yaitu bahwa **tidak boleh ada dua atau lebih partikel yang berada pada status energi yang sama**. Wujud bahasa matematikanya, fungsi gelombang keseluruhannya akan menjadi nol jika ada status yang diisi oleh lebih dari satu partikel. Dalam fisika atom sering disebut *asas eksklusif Pauli*. Tentu saja ini menghasilkan statistik dengan distribusi yang berlainan dengan kasus Boson.

Perhitungannya dapat dilakukan sejalan dengan kasus Boson. Pada lapis energi nomer- s , ada g_s status, dan ada n_s partikel yang semuanya sama bentuknya @,@,@, Tetapi pada waktu mengisikan partikel ke dalam kotak-kotak status yang jumlahnya g_s itu, satu kotak hanya bisa kosong, atau isi satu partikel saja. Jumlah konfigurasinya sama dengan jumlah kombinasi membagi g_s menjadi dua kelompok, yaitu kelompok *kosong* dan kelompok *isi-1*. Jumlah konfigurasi itu

$$\frac{g_s!}{n_s! \cdot (g_s - n_s)!}$$

Jadi

$$W(n_1, n_2, \dots) = \prod_s \frac{g_s!}{n_s! \cdot (g_s - n_s)!} \quad [3-14]$$

Sekali lagi, untuk mencari distribusi dengan peluang terbesar kita lakukan

$$(\partial \ln W / \partial n_s) + \alpha + \beta \cdot E_s - 0$$

Sekarang $(\partial \ln W / \partial n_s)$ nilainya = $\ln[(g_s - n_s) / n_s] = \ln[(g_s/n_s) - 1]$. Maka yang kita peroleh adalah

$$n_s = \frac{g_s}{\exp[-(\alpha + \beta E_s)] + 1} \quad [3-15]$$

dengan memasukkan nilai $\beta = -(1/kT)$, maka bentuk yang lazim ditampilkan adalah

$$n(E) \cdot dE = \frac{g(E) \cdot dE}{\exp[(E/kT) - \alpha] + 1}$$

Kalau ingin kita ungkapkan dalam distribusi menurut statusnya (bukan menurut skala lapis energi, maka dituliskan jumlah partikel Fermion yang menempati status- i adalah

$$n_i = \frac{1}{A \cdot \exp(E_i / kT) + 1} \quad [3-16]$$

Ungkapan untuk n_i seperti itu dikenal dengan nama **fungsi distribusi Fermi-Dirac**.

Memahami pola berpikir secara kuantum

Untuk memahami apa perbedaan antara cara penanganan kuantum dengan cara yang sudah kita bahas sebelumnya, ada baiknya inti persoalannya dilukiskan lewat contoh sederhana yang melibatkan jumlah molekul sedikit dan jumlah status energinya juga terbatas. Akan kita pilih kumpulan 4 molekul yang masing-masing boleh menempati 6 status energi.

Seperti yang sudah kita kerjakan sebelumnya, pertama kali kita lukis konfigurasi mikro dengan masing-masing memiliki peluang yang sama. Untuk partikel A ada 6 pilihan, partikel B juga 6 pilihan, ...s/d partikel D dengan 6 pilihan statusnya. Jadi seluruhnya kita memiliki $6^4 = 1296$ konfigurasi mikro. Ini kita tuliskan pada kolom-kolom Excel "Acuan1". Di bawah ini bentuk cuplikan baris-baris pertamanya.

Acuan1	st1	st2	st3	st4	st5	st6
1	ABCD					
2	ABC	D				
3	ABC		D			
4	ABC			D		
5	ABC				D	
6	ABC					D
7	ABD	C				
8	AB	CD				
9	AB	C	D			
10	AB	C		D		

daftar masih terus hingga baris 1296

Tabel 3-1

Itu diperoleh lewat perintah sbb.

```
Dim status(6)
Dim partikel(4)
```

```
Private Sub tambahTulis(baris, kolom, noHuruf)
```

```
    isiLama = Range("Acuan1").Offset(baris, kolom).Value
```

```
    isiBaru = isiLama & Chr$(64 + noHuruf)
```

```
    Range("Acuan1").Offset(baris, kolom).FormulaR1C1 = isiBaru
```

```
End Sub
```

```
Private Sub proses1()
```

Fisika Statistik, Prof.B.Suprpto Brotosiswojo, PhD.

```

brs = 1
For part1 = 1 To 6
  For part2 = 1 To 6
    For part3 = 1 To 6
      For part4 = 1 To 6
        tambahTulis brs, part1, 1
        tambahTulis brs, part2, 2
        tambahTulis brs, part3, 3
        tambahTulis brs, part4, 4
        brs = brs + 1
      Next part4
    Next part3
  Next part2
Next part1
End Sub

```

Jika kita melukiskannya dengan menggunakan mekanika kuantum, maka identitas partikel itu hilang, karena sifat kembar “partikel” dan “gelombang”. Jika dua “gelombang” ada dalam wilayah yang sama, maka terjadi sebuah superposisi yang menghilangkan identitas masing-masing. Karena itu lukisan mikronya, harus dibuat hingga huruf A, B, C, D tidak ada lagi, semua berubah menjadi A misalnya. Kalau demikian maka jumlah konfigurasi mikronya tidak lagi 1296 melainkan menjadi lebih sedikit jumlahnya.

Apa yang kita lakukan ketika itu adalah menuliskan ungkapan 1296 baris tersebut, bukan dengan huruf ABCD, melainkan dengan jumlah partikel yang menempati status energi st1, st2, st3, st4, st5, st6. Ungkapan semacam inilah yang oleh mekanika kuantum dianggap paling benar, karena tidak lagi memberi nama pada masing-masing partikel. Itu kita deretkan pada kolom “Acuan2”

Acuan2	st1	st2	st3	st4	st5	st6
	4	0	0	0	0	0
	3	1	0	0	0	0
	3	0	1	0	0	0
	3	0	0	1	0	0
	3	0	0	0	1	0
	3	0	0	0	0	1
	3	1	0	0	0	0
	2	2	0	0	0	0

.....masih ada lanjutan daftarnya, semua ada 1296

Tabel 3-2

Untuk mewujudkan lukisan seperti itu kita buat perintah sbb.

```

Private Sub ungkapHanyaPopulasi()
  Dim isi(6) As String
  Dim jumlah(6) As Integer
  For brs = 1 To 1296
    For klm = 1 To 6
      isi(klm) = Range("Acuan1").Offset(brs, klm)
      jumlah(klm) = Len(isi(klm))
    Next klm
  Next brs
End Sub

```

```

    Range("Acuan2").Offset(brs, klm).FormulaR1C1 = jumlah&klm
Next klm
Next brs
End Sub

```

Hasilnya tentu tetap 1296 baris, hanya ungkapan yang berbeda, sebab beberapa diantaranya memiliki ungkapan yang sama. Kebanyakan yang ada pada ungkapan "Acuan2" tampil lebih dari satu kali. Mekanika kuantum menuntut agar tampilan lebih dari satu kali itu dianggap hanya satu saja dan itulah ungkapan pola partikel identik. Sekali lagi, ini bertolak dari anggapan bahwa partikel itu juga "gelombang" yang kalau berkumpul kehilangan identitasnya masing-masing, yang ada hanya satu "gelombang" hasil superposisinya.

Pada program ungkapan klasik, kita juga melangkah setahap lagi. Setiap ungkapan pola partikel identik kita tampilkan disertai dengan bilangan berapa kali konfigurasi itu muncul dalam deretan 1296 baris yang ada. Kemudian kita pilih konfigurasi dengan tampilan terbanyak, sebagai "most probable distribution".

Kita dapat mewujudkan itu lewat perintah:

Function frekuensiPopulasi(st1, st2, st3, st4, st5, st6)

```

Populasi = 0
For brs = 1 To 1296
    isi1 = Range("Acuan2").Offset(brs, 1).Value
    isi2 = Range("Acuan2").Offset(brs, 2).Value
    isi3 = Range("Acuan2").Offset(brs, 3).Value
    isi4 = Range("Acuan2").Offset(brs, 4).Value
    isi5 = Range("Acuan2").Offset(brs, 5).Value
    isi6 = Range("Acuan2").Offset(brs, 6).Value
    If isi1 = st1 And isi2 = st2 And isi3 = st3 And isi4 = st4 _
        And isi5 = st5 And isi6 = st6 Then
        frekuensiPopulasi = frekuensiPopulasi + 1
    End If
Next brs
End Function

```

Private Sub untkapfrekuensiPopulasi()

```

baris = 1
jml1 = 4
For st1 = 0 To 4
    jml2 = jml1 - st1
    For st2 = 0 To jml2
        jml3 = jml2 - st2
        For st3 = 0 To jml3
            jml4 = jml3 - st3
            For st4 = 0 To jml4
                jml5 = jml4 - st4
                For st5 = 0 To jml5
                    jml6 = jml5 - st5 'terakhir
                    st6 = jml6
                    jumlah = frekuensiPopulasi(st1, st2, st3, st4, st5, st6)
                    Range("Acuan3").Offset(baris, 1).FormulaR1C1 = st1
                Next st5
            Next st4
        Next st3
    Next st2
Next st1

```

Fisika Statistik, Prof.B.Suprpto Brotosiswojo, PhD.

```

Range("Acuan3").Offset(baris, 2).FormulaR1C1 = st2
Range("Acuan3").Offset(baris, 3).FormulaR1C1 = st3
Range("Acuan3").Offset(baris, 4).FormulaR1C1 = st4
Range("Acuan3").Offset(baris, 5).FormulaR1C1 = st5
Range("Acuan3").Offset(baris, 6).FormulaR1C1 = st6
' sekarang tulis populasinya
Range("Acuan3").Offset(baris, 7).FormulaR1C1 = jumlah
baris = baris + 1
Next st5
Next st4
Next st3
Next st2
Next st1
End Sub

```

Hasilnya :

Acuan3	st1	st2	st3	st4	st5	st6	frekuensi
1	0	0	0	0	0	4	1
2	0	0	0	0	1	3	4
3	0	0	0	0	2	2	6
4	0	0	0	0	3	1	4
5	0	0	0	0	4	0	1
6	0	0	0	1	0	3	4
7	0	0	0	1	1	2	12
8	0	0	0	1	2	1	12
9	0	0	0	1	3	0	4
10	0	0	0	2	0	2	6

....masih ada terusnya semuanya ada 126 baris

Tabel 3-3

Dalam pola yang dahulu kita cari konfigurasi mana yang peluangnya terbesar. Itu kita dapatkan ada 15 konfigurasi masing-masing dengan frekuensi 24. Ditampilkan di sini sebagai contoh empat baris saja. Terlihat bahwa frekuensi yang besar terjadi kalau kita menyebarkan partikel itu se merata mungkin. Contohnya, baris-1 dengan menempatkan 4 partikel di satu status, frekuensinya hanya 1, seperti halnya dengan baris-5. Tetapi baris-7 dan baris-8, yang hampir meratakan pembagiannya mempunyai frekuensi 12.

21	0	0	1	1	1	1	24
41	0	1	0	1	1	1	24
47	0	1	1	0	1	1	24
49	0	1	1	1	0	1	24

Untuk pola partikel identik, frekuensi itu tak ada maknanya sebab memang dalam konfigurasi pola partikel identik hanya ada satu status seperti itu. Jadi status mikro untuk kumpulan **boson** hanya ada 86 seperti dilukiskan oleh daftar "Acuan3" dengan menghapus data frekuensi (masing-masing frekuensinya = 1).

Untuk partikel jenis **fermion**, selain hal yang harus dipenuhi seperti pada kasus boson, masih ada tuntutan tambahan, yaitu bahwa pada masing-masing status tidak boleh ada partikel lebih dari 1. Jadi ungkapan konfigurasi yang diperbolehkan pada kasus fermion dicari dari 126 daftar di Acuan3 yang masing-masing statusnya berisi bilangan 0 atau 1 saja.

Secara kebetulan, 15 konfigurasi itu juga memiliki ciri pemerataan distribusi partikel (yang kebetulan hanya ada 4) dalam kotak status yang jumlahnya 6 (lebih besar dari 4). Dengan demikian paling banyak setiap kotak hanya ditempati oleh 1 partikel.

Inilah ragam konfigurasi Fermion itu

Acuan4	st1	st2	st3	st4	st5	st6
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	1	1	0	1	1
4	0	1	1	1	0	1
5	0	1	1	1	1	0
6	1	0	0	1	1	1
7	1	0	1	0	1	1
8	1	0	1	1	0	1
9	1	0	1	1	1	0
10	1	1	0	0	1	1
11	1	1	0	1	0	1
12	1	1	0	1	1	0
13	1	1	1	0	0	1
14	1	1	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	0

sudah lengkap semuanya ada 15

Tabel 3-4

Perintah untuk memilih konfigurasi fermion dapat dilakukan sebagai berikut.

```
Dim nilai(6) As Boolean
```

```
Function boleh(baris) As Boolean
```

```
    boleh = True
```

```
    'baca kolom-kolom di baris Acuan3
```

```
    For klm = 1 To 6
```

```
        nilai(klm) = False
```

```
        populasi = Range("Acuan3").Offset(baris, klm).Value
```

```
        If populasi = 0 Or populasi = 1 Then nilai(klm) = True
```

```
    Next klm
```

Fisika Statistik, Prof.B.Suprpto Brotosiswojo, PhD.

```

'Jika ada yang bukan 0 atau 1 tolak
For klm = 1 To 6
  If nilai(klm) = False Then boleh = False
Next klm
End Function

```

```

Private Sub pilihFermion()

```

```

  baris4 = 1
  For brs = 1 To 126
    terus = boleh(brs)
    If terus Then
      For klm = 1 To 6
        Range("Acuan4").Offset(baris4, klm).FormulaR1C1 = _
          Range("Acuan3").Offset(brs, klm).Value
      Next klm
      baris4 = baris4 + 1
    End If
  Next brs
End Sub

```

Mungkin kita akan bertanya : lalu bagaimana caranya kita mencari apa yang ingin dinamakan "most probable distribution" ? Partikel-partikel boson dan fermion itu sudah kehilangan identitasnya, jadi konfigurasi manapun sama saja selama jumlah partikelnya sama !

Ada satu hal yang selama ini sudah kita dibahas tetapi telah kita lupakan dalam pembahasan untuk contoh yang melibatkan jumlah partikel yang sedikit ini, yaitu besaran **energi**. Pada setiap **status energi** partikel, misalnya st_1, st_2, \dots, st_6 . itu terkait **nilai energi** partikel, yang dapat dituliskan E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 , dan E_6 , masing-masing tidak selalu sama. Oleh karena itu meskipun identitas masing-masing partikel telah dihapus dalam pola kuantum, tetapi dilihat dari sisi kumpulan secara keseluruhan, setiap konfigurasi akan memunculkan energi-total yang umumnya berbeda nilainya. Pembahasan lewat ungkapan yang melibatkan energi-total kelak akan dibahas dalam Teori Ensemble. Untuk sementara kita bahas dahulu konsekuensi fisika dari statistik untuk boson dan fermion.

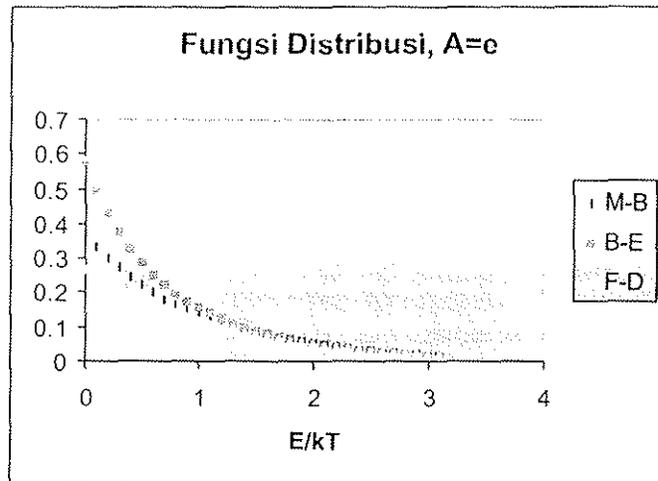
Distribusi M-B sebagai limit klasik distribusi F-D dan distribusi B-E

Secara matematik, keduanya dapat ditulis sbb.

$$\text{Untuk boson} \quad f_j = \frac{1}{\Lambda e^{E_j/kT} - 1}$$

$$\text{Untuk fermion} \quad f_j = \frac{1}{\Lambda e^{E_j/kT} + 1}$$

Nilai A masih harus dicari dalam kaitannya dengan besaran-besaran fisika yang harus kita garap. Meskipun begitu secara matematik, jika $\Lambda e^{E_j/kT}$ itu nilainya jauh lebih besar dari 1, maka kedua fungsi distribusi tersebut praktis nilainya sama, dan bentuknya adalah bentuk distribusi Maxwell-Boltzmann, yang sering juga disebut distribusi klasik



Gambar 3-1

$$f_j = \frac{1}{\Lambda} e^{-E_j/kT}$$

Ini tentu saja sangat diharapkan, karena menjadi kewajiban mereka yang menyusun mekanika kuantum, formulasinya harus kembali menjadi mekanika klasik jika nilai tetapan Planck h tidak lagi berarti terhadap besaran-besaran fisika yang kita garap.

Pada kasus Boltzmann, parameter A kita cari dari kenyataan bahwa jumlah f_j untuk semua nilai j harus sama dengan jumlah partikel yang kita garap. Atau kalau menggunakan rentang energi dan $g(E)dE$ adalah jumlah status dengan energi antara E dan $(E+dE)$ ungapannya menjadi

$$\int_0^{\infty} g(E) \frac{1}{\Lambda} e^{-E/kT} dE = N \quad [3-17]$$

Untuk obyek fisika yang berlainan, tentunya juga $g(E)$ berbeda bentuknya dan menghasilkan tetapan normalisasi A yang berbeda pula.

Kita juga dapat menerapkan resep yang serupa untuk boson maupun fermion jadi

$$\int_0^{\infty} g(E) \frac{1}{\Lambda e^{E/kT} - 1} dE = N \quad \text{untuk boson} \quad [3-18]$$

$$\int_0^{\infty} g(E) \frac{1}{\Lambda e^{E/kT} + 1} dE = N \quad \text{untuk fermion} \quad [3-19]$$

Ada baiknya membahas satu kasus khusus, yaitu jika obyeknya adalah kumpulan partikel yang bergerak bebas dalam ruang tiga dimensi, tanpa saling berinteraksi.

Dari hitungan (sedikit mekanika kuantum) yang ada pada Lampiran, didapat bahwa untuk partikel yang massanya m dalam ruangan volume V , kerapatan status $g(E)$ bentuknya

$$g(E).dE = \frac{2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2}}{h^3} V.dE \quad [3-20]$$

Untuk statistik Maxwell-Boltzmann

$$\int_0^{\infty} f(E)g(E).dE \equiv \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{A.h^3} V \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE = N \quad [3-21]$$

dengan melihat tabel integral akan didapat

$$\frac{1}{A} = \lambda^3 \cdot \frac{N}{V} \quad [3-22]$$

dengan $\lambda \equiv \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}}$ besaran yang sering disebut panjang gelombang termal. Istilah itu dikaitkan dengan rumus de Broglie, bahwa partikel yang momentumnya p sekaligus juga sebuah gelombang dengan panjang gelombang λ , yang nilainya

$$\lambda = h / p \quad [3-23]$$

Sesungguhnya yang sering disebut panjang gelombang termal adalah $\lambda = h/\sqrt{(3mkT)}$, sedikit berbeda nilainya dengan yang dipakai pada persamaan [3-22]. Maknanya, adalah panjang gelombang de Broglie untuk sebuah partikel dengan massa m yang pada suhu T , energi rata-ratanya $(3/2)kT$. Partikel bebas semacam itu momentum rata-ratanya p memenuhi hubungan

$$(3/2)kT = p^2 / (2m) \quad \text{jadi} \quad p = \sqrt{(3mkT)} \quad [3-24]$$

Persamaan [3-22] menyatakan bahwa nilai $A = (V/N) / \lambda^3$. Itu adalah perbandingan antara volume rata-rata ruang yang ditempati oleh partikel, dengan λ^3 yaitu volume rentangan panjang gelombang termal. Untuk panjang gelombang termal yang sangat kecil dibandingkan ruang gerak rata-rata molekul tadi, maka $A \gg 1$, dan kita lihat bahwa efek kuantum itu tidak akan terasa, sebab baik distribusi Bose-Einstein, maupun Fermi-Dirac kembali menyerupai distribusi Maxwell-Boltzmann.

Dampak kuantum itu akan mulai terasa apabila nilai A mendekati 1, atau malahan $A < 1$. Itu dapat dipahami secara fisika, karena gelombang partikel yang satu tumpang tindih dengan gelombang partikel lainnya, karena sesaknya ruang yang tersedia. Pada kondisi semacam inilah obyek kita (meskipun sering dikenal sebagai partikel) lebih menampilkan sifat gelombangnya.

Panjang gelombang termal tentunya, selain bergantung pada massa partikel, nilainya akan bergantung pada suhu T , makin tinggi suhunya makin kecil λ , jadi makin kecil pula nilai A . Berikut ini sedikit gambaran nilai $T = T_0$ yang menyebabkan $A=1$. Maksudnya, jika ingin melihat dampak kuantumnya, kita harus membuat suhu ruangnya lebih kecil dari T_0 .

Obyek alam	Jumlah partikel/cm ³	T_0 (Kelvin)
Gas H ₂	2×10^{19}	5×10^{-2}
Helium Cair	2×10^{22}	2
Elektron dlm logam	1×10^{22}	10^4

Tabel 3-5

“Gas” dalam ungkapan Statistik Bose-Einstein

Untuk statistik Bose-Einstein, salah satu obyek fisika yang berbentuk „molekul“ yang memenuhi kriteria boson (spinnya bilangan bulat) adalah atom Helium. Tetapi kita lihat dari daftar itu pada suhu ruang 300K dampak kuantum itu belum akan terasa. Jadi anggap saja sebagai obyek yang cukup diperlakukan dengan statistik Maxwell-Boltzmann, yang hitungannya lebih mudah.

Obyek alam yang bukan berupa molekul yang memenuhi kriteria sebagai boson adalah **foton**. Ada upaya untuk menerangkan perantai perubahan warna akibat perbedaan suhu, yang dikenal dengan nama “radiasi benda hitam”. Dalam sejarah perjalanan ilmu fisika awalnya obyek itu di”model”kan sebagai sebuah “lubang” kecil yang ada pada sebuah kotak tertutup. Bila ada sinar cahaya yang masuk lewat “lubang” ini, karena jalannya lurus dan mengikuti hukum-hukum pantulan, maka akibat terpantul bolak-balik oleh dinding bagian dalam dari kotak, peluang bagi cahaya itu untuk bisa keluar lagi praktis tidak ada. Artinya “lubang” itu menyerap seluruh berkas cahaya yang masuk ke kotak. Lalu diberi istilah “hitam”.

Pada suhu biasa, memang “lubang” semacam itu warnanya hitam. Tetapi kalau kotaknya dipanaskan maka warnanya akan berubah. Pada suhu sekitar $T = 2500\text{K}$ warnanya menjadi kemerahan, lalu pada suhu yang lebih tinggi sekitar $T = 5000\text{K}$ warnanya mendekati putih, dan pada suhu yang lebih tinggi lagi sekitar $T = 12500\text{K}$ warnanya cenderung ke arah biru. Bagaimana kita dapat menerangkan gejala seperti ini ?

Awalnya proses seperti itu di”model”kan sebagai kumpulan gelombang elektromagnetik yang berada dalam ruangan tertutup. Istilah yang digunakan : radiasi dari “cavity resonator”. Tetapi sejak ditemukannya efek fotolistrik seperti ditafsirkan oleh Einstein, “model” alternatifnya adalah kumpulan foton (paket partikel cahaya) yang dipancarkan oleh dinding-dalam dari ruang tertutup tadi. Jadi obyek yang ada dalam ruang tertutup itu berupa “gas” yang unsur pembangunnya adalah foton.

Ada perbedaan antara “gas molekul” dengan “gas foton”. Yang pertama, karena fotonnya dapat dihasilkan ataupun diserap oleh dinding-dalam ruangan tertutup tadi, maka jumlah foton yang ada di situ dapat bertambah ataupun berkurang. Yang kedua, foton itu “partikel” yang semuanya bergerak dengan kecepatan cahaya c yang nilainya tetap, foton harus diperlakukan dengan mekanika relativistik. Dua hal itu tak terjadi pada “gas molekul” seperti kita kenal sampai sekarang.

Lalu apa konsekuensinya ? Yang pertama, dalam mencari “most probable distribution” untuk jumlah partikel n_j ($j = 1, 2, 3, \dots$ dst) yang mengisi kotak nomer 1, 2, 3, ...dst, kita memasang syarat $(n_1 + n_2 + n_3 + \dots) = N$ (tetap). Syarat itu untuk kasus foton kali ini tidak berlaku lagi. Akibatnya, parameter “pelipat Lagrange” α dalam persamaan [2 - 19] tidak ada lagi. Maka distribusi Bose-Einstein yang akan diterapkan di sini menjadi lebih sederhana, yaitu

$$f_j = \frac{1}{\exp(E_j / kT) - 1} \quad [3-25]$$

Yang kedua, sebagai partikel relativistik, untuk foton hubungan antara energi E dengan momentum \mathbf{p} adalah $E = |\mathbf{p}|c$ atau kita singkat $E = pc$. Seperti waktu kita terapkan pada kasus gas ideal, maka energi foton yang ada dalam ruangan yang volumenya V pada suhu T menjadi

$$U = 2 \left(\frac{1}{h^3} \right) \int d^3\mathbf{r} \int \frac{pc}{\exp(pc/kT) - 1} d^3\mathbf{p} = \frac{8\pi c V}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{\exp(pc/kT) - 1} \quad [3-26]$$

Ada faktor 2 yang dimasukkan di ruas kanan persamaan itu, karena foton memiliki dua status polarisasi, yang satu rotasi searah jarum jam, yang lain rotasi berlawanan arah jarum jam.

Dengan menggunakan hitungan matematika

$$\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^4}{15} \quad [3-27]$$

kita dapatkan kerapatan energi (U/V) radiasi benda hitam itu memenuhi hubungan yang secara empirik ditemukan lebih dahulu oleh Stefan dan Boltzmann

$$(U/V) = \sigma \cdot T^4 \quad [3-28]$$

dengan nilai

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \quad [3-29]$$

“Gas” dalam ungkapan Statistik Fermi-Dirac

Untuk statistik Fermi-Dirac, salah satu obyek fisika yang memenuhi syarat sebagai Fermion (spinnya berupa bilangan ganjil $\times (1/2)$) adalah elektron. Tetapi kalau yang dibahas adalah gas elektron dalam plasma (pengendalian reaksi termonuklir) misalnya, dengan suhu dua juta derajat Kelvin, kita juga tak perlu menggunakan distribusi Fermi-Dirac, cukup digarap dengan statistik Maxwell-Boltzmann.

Untuk kumpulan elektron yang lincah bergerak dalam logam konduktor, karena (N/V) nya cukup tinggi (1000 kali Gas) dan massanya lebih kecil ($1/1000$ dari massa atom), perlu digunakan statistik Fermi-Dirac untuk mengenal perangnya. Anggapan kita bahwa kapasitas panas $C_v(T)$ bahan padat konduktor adalah $4.5 Nk$ mungkin memang keliru karena kita mengandaikan bahwa elektron-elektron bebas itu mengikuti statistik Maxwell-Boltzmann.

Menurut distribusi Fermi-Dirac, peluang untuk menghuni sebuah status energi nomer- i dengan nilai energi E_i , besarnya

$$n_i = \frac{1}{A \cdot \exp(E_i / kT) + 1}$$

Dari ungkapan matematika ini, n_i nilainya tidak akan pernah lebih besar dari 1, berapapun nilai parameter A , T , maupun E_i . Itu dapat dimengerti, sebab memang itu syarat yang namanya „larangan Pauli“ yang harus dipenuhi untuk partikel jenis ini. Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya, bilangan A akan kita tulis sebagai $\exp(-E_F/kT)$ sehingga bentuk eksplisitnya

$$n_i = \frac{1}{\exp[(E_i - E_F) / kT] + 1} \quad [3-30]$$

besaran E_F lazimnya dinamakan **energi-Fermi**, yang maknanya akan kita bahas sekarang.

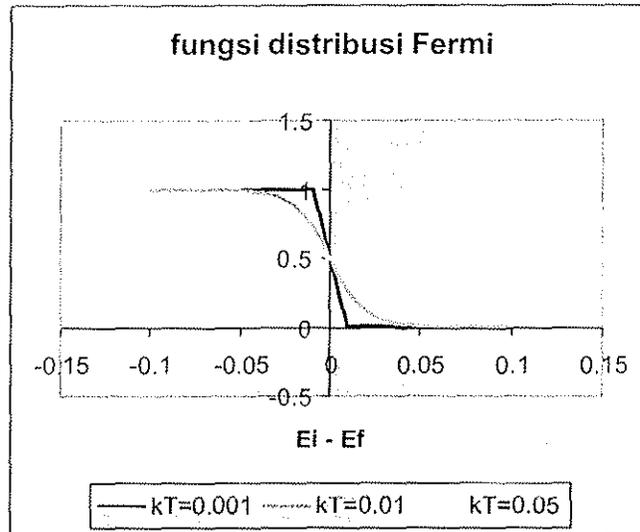
Jika suhu $T = 0$, maka ungkapan seperti pada persamaan [3-30] itu akan punya perangnya aneh. Besaran $\exp[(E_i - E_F)/kT]$ menjadi sangat besar dan peka sekali terhadap tanda dari besaran $(E_i - E_F)$

$$n_i = \frac{1}{\exp(-\infty) + 1} = 1 \quad \text{untuk } E_i < E_F \quad [3-31a]$$

$$n_i = \frac{1}{\exp(0) + 1} = 1/2 \quad \text{untuk } E_i = E_F \quad [3-31b]$$

$$n_i = \frac{1}{\exp(\infty) + 1} = 0 \quad \text{untuk } E_i > E_F \quad [3-31c]$$

Gambar grafiknya untuk $kT = 0.001$, $kT = 0.01$, $kT = 0.05$ adalah seperti di bawah ini:



Gambar 3 - 2

Kalau kita terapkan pada „gas elektron“ yang ada pada logam, perlu ditambahkan sedikit akibat dari partikel elektron yang memiliki spin ($1/2$), yang memunculkan tambahan faktor 2 pada fungsi kerapatan status. Jadi untuk mencari energi Fermi E_F digunakan

$$\int_0^{\infty} f(E)g(E).dE \equiv \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} V \int_0^{\infty} E^{1/2} \frac{1}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1} dE = N \quad [3-32]$$

Hitungannya untuk setiap nilai suhu T sedikit rumit memerlukan trik-trik tertentu dalam kalkulus. Tetapi kita dapat memperoleh gambaran profil utamanya dengan membahas kasus yang khusus, misalnya ketika $T = 0$. Saat itu, integral dalam ungkapan persamaan di atas dapat dibagi dua. Untuk E dari 0 hingga $E = E_F$ dan untuk $E > E_F$. Untuk wilayah yang terakhir itu $f(E) = 0$ sehingga hasil integralnya juga = 0. Jadi

$$\int_0^{\infty} f(E)g(E).dE \equiv \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} V \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = N \quad [3-33]$$

Dari sini kita dapatkan energi Fermi E_F pada suhu $T = 0$ sebagai

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad [3-34]$$

Makna fisiknya, pada suhu T yang sangat rendah itu, tentu saja elektron-elektron akan berdesakan untuk menempati status dengan energi yang paling rendah. Satu elektron akan menempati status i dengan $E = 0$ dan spin $(-)$ misalnya. Tempat itu tak boleh diisi oleh elektron lain, kecuali satu saja yang punya spin $(+)$. Dua elektron lagi satu dengan spin $(+)$ dan satu dengan spin $(-)$ boleh menempati status yang ada di atas status $E=0$. Begitu seterusnya sehingga seluruh elektron yang ada masing-masing sudah mendapat tempat. Tetapi akibatnya elektron terakhir harus menempati status dengan energi yang tinggi, dan itulah yang kita sebut sebagai energi-Fermi.

Tampak dari persamaan [3- 34] bahwa makin besar jumlah elektron N , makin tinggi pula letak energi Ferminya. Untuk sedikit memberi gambaran tentang nilainya, anda dapat menghitungnya dengan mengambil contoh logam yang atomnya melepas satu elektron seperti kasus bahan penghantar listrik : tembaga (Cu). Seperti daftar yang sudah disajikan, logam ini membentuk „gas elektron“ dengan kerapatan $(N/V) = 10^{22}$ elektron per cm^3 .

Energi dapat diungkap dalam pelbagai macam satuan. Satuan utamanya tentu Joule. Tetapi bagi mereka yang bekerja dalam arena berlainan, ukuran semacam itu susah di„rasakan“ besarnya. Mereka yang bekerja dalam arena fisika-atom, lebih senang menggunakan satuan elektron-volt, yaitu energi yang dimiliki oleh sebuah elektron setelah melewati wilayah dengan beda potensial 1 Volt. Tentu juga ada satuan yang lebih besar seperti keV (kilo elektron volt), atau MeV (mega elektron volt), atau GeV (giga elektron volt). Mereka yang bekerja dalam arena termodinamika, lebih senang kalau energi itu dikaitkan dengan suhu T , lewat besarnya nilai kT ($k =$ tetapan Boltzmann). Untuk energi Fermi, juga sering kali ungkapannya dinyatakan dalam skala suhu Kelvin, jadi temperatur Fermi T_F didefinisikan lewat hubungan $kT_F = E_F$. Energi Fermi untuk elektron dalam logam Cu itu kira-kira 20 000 K.

Karena pada suhu $T=0$, tidak semua elektron menempati status dengan energi terendah $E=0$, maka kumpulan Fermion ini pada suhu $T=0$ energi rata-ratanya cukup tinggi. Kita dapat menghitung energi rata-rata itu dari hubungan

$$\langle E(0) \rangle = \frac{\int E \cdot f(E) \cdot g(E) \cdot dE}{\int f(E) \cdot g(E) \cdot dE} = \frac{3}{5} E_F(0) \quad [3-35]$$

Jadi untuk kasus elektron dalam logam tembaga, energi rata-rata itu ekuivalen dengan kT untuk suhu $T=12000\text{K}$.

Pada suhu ruangan $T=300\text{K}$, karena $T \ll T_F$ maka kita dapat mencari hitungan untuk $E_F(T)$ bertolak dari kedekatannya dengan $E_F(0)$, begitu juga energi rata-rata dekat dengan energi rata-rata pada suhu $T=0$ seperti diungkap pada persamaan [3-35]. Hasilnya (hitungan rincinya disajikan di Lampiran),

$$E_F(T) \cong E_F(0) \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \quad [3-36]$$

sedangkan

$$\langle E(T) \rangle \cong E_F(0) \left[\frac{3}{5} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \quad [3-37]$$

Energi internal elektron dalam logam itu tentunya sama dengan jumlah elektron N dikalikan dengan energi rata-ratanya. Lalu kalau kita ingin mencari kapasitas panas sumbangan elektron bebas pada logam, kita turunkan energi total tersebut terhadap variabel suhu T . Mudah dilihat hasilnya

$$C_V(T) = \frac{\pi^2}{2} Nk \left(\frac{T}{T_F} \right) \quad [3-38]$$

bukan lagi $(3/2)Nk$ seperti yang kita perkirakan bila digunakan hitungan dengan statistik Maxwell-Boltzmann. Perbedaan utamanya terletak pada adanya faktor (T/T_F) seperti terlihat pada persamaan [3-33]. Bila $T = 300$ dan $T_F = 20\,000$, berarti faktor itu kira-kira $(1/65)$. Jadi $C_V(T)$ elektron hanya $\approx 0.03 Nk$ saja. Ini menerangkan mengapa kapasitas panas bahan padat konduktor nilainya hanya sedikit sekali di atas nilai kapasitas panas bahan pada isolator.

LAMPIRAN

Beberapa hitungan kalkulus yang sifatnya sangat teknis, dikumpulkan pada lampiran ini agar perhatian terhadap makna fisika dimunculkan terlebih dahulu pada bahasan-bahasan yang ada di teks utamanya.

A. Pendekatan Stirling

Pendekatan Stirling bahwa untuk N yang sangat besar, $\ln(N!) \approx [N \ln(N) - N]$ dapat dipahami lewat penalaran sbb.

Menurut definisinya, $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots \times 2 \times 1$. Karena itu kita boleh menuliskan

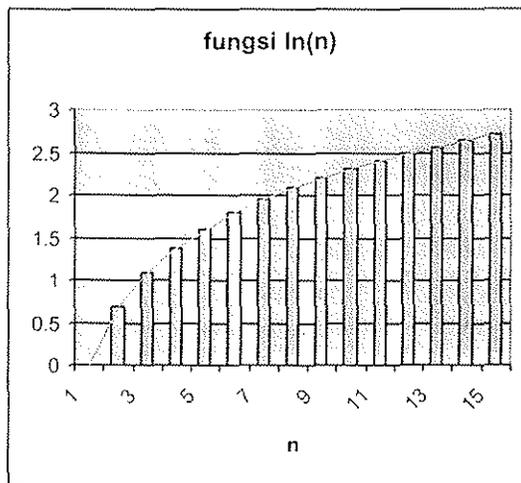
$$\ln(N!) = \ln(N) + \ln(N-1) + \dots + \ln(2) + \ln(1) = \sum_{j=1}^N \ln(j) \quad [A-1]$$

Ketika N sangat besar, maka beda nilai variabel j antara dua suku pada persamaan [A-1] di atas menjadi sangat kecil, sehingga kita boleh mengubah penjumlahan diskrit pada persamaan [A-1] menjadi bentuk integral. Jadi

$$\ln(N!) = \sum_{j=1}^N \ln(j) \approx \int_1^N \ln(x).dx \quad [A-2]$$

Dari bentuk diferensial

$$\frac{d[x \ln(x) - x]}{dx} = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) \quad [A-3]$$



kita boleh menulis $\ln(N!) \approx [x \ln(x) - x]_1^N = N \ln(N) - N + 1$

Bila N sangat besar tentunya bilangan 1 pada ruas kanan persamaan diatas tak ada artinya sehingga

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N \quad [A-4]$$

B. Dalil Pelipat Lagrange

Berikut adalah cara memahami dalil pelipat Lagrange melalui contoh yang relatif sederhana. Kita mengambil tiga variabel x,y, dan z yang melukiskan ruang 3-dimensi.

Kalau ada sebuah besaran W yang nilainya bergantung pada (x,y,z) melalui fungsi F(x,y,z), maka kita dapat mencari lokasi dalam ruang (x,y,z) itu, misalnya (x₀,y₀,z₀) yang membuat W maksimum atau minimum (sering juga disebut stasioner) dari hubungan

$$dF \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)dz = 0 \quad [B-1]$$

Pencapaian kita tentang nilai x,y dan z yang memenuhi persamaan tersebut diatas boleh dilakukan secara bebas dalam ruang 3-dimensi (x,y,z).

Akan tetapi jika ada kendala bagi pilihan (x,y,z) itu lewat ketentuan bahwa

$$G(x,y,z) = 0 \quad [B-2]$$

artinya ada sebuah “bidang lengkung permukaan” dalam ruang 3-dimensi yang dilukiskan oleh persamaan [B-2] yang membatasi pencapaian kita tentang nilai (x₀,y₀,z₀) tersebut dengan hanya memilih (x,y,z) yang letaknya ada di “bidang lengkung permukaan” tadi. Karena itu harus dipenuhi juga persyaratan

$$dG \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz = 0 \quad [B-3]$$

Persamaan [B-3] di atas juga dapat diungkap dalam bentuk lain, yaitu

$$dx = -\left\{\frac{\partial G/\partial y}{\partial G/\partial x}dy + \frac{\partial G/\partial z}{\partial G/\partial x}dz\right\} \quad [B-4]$$

Jika ungkapan [B-5] itu disubstitusikan pada persamaan [B-1] akan kita peroleh hubungan

$$dF \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left\{-\frac{\partial G/\partial y}{\partial G/\partial x}dy - \frac{\partial G/\partial z}{\partial G/\partial x}dz\right\} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)dz = 0$$

atau

$$dF \equiv \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F / \partial x}{\partial G / \partial x} \right) \frac{\partial G}{\partial y} \right\} dy + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - \left(\frac{\partial F / \partial x}{\partial G / \partial x} \right) \frac{\partial G}{\partial z} \right\} dz = 0 \quad [B-5]$$

Sekarang kita akan membuat lambang baru yang disebut α nilainya

$$\alpha = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial G / \partial x},$$

artinya

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad [B-6]$$

Maka persamaan [B-5] menjadi

$$dF \equiv \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} + \alpha \frac{\partial G}{\partial y} \right\} dy + \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + \alpha \frac{\partial G}{\partial z} \right\} dz = 0 \quad [B-7]$$

Karena pada titik (x_0, y_0, z_0) yang kita cari itu persamaan [B-7] harus berlaku bagi setiap pergeseran dy dan dz , maka harus dipenuhi juga hubungan

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial y} + \alpha \frac{\partial G}{\partial y} \right\} = 0 \quad \text{dan} \quad \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} + \alpha \frac{\partial G}{\partial z} \right\} = 0$$

Kesimpulannya : ada sebuah besaran yang, nilainya belum tahu tetapi kita sebut saja α , sehingga di titik (x_0, y_0, z_0) yang kita cari itu berlaku hubungan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial G}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \alpha \frac{\partial G}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} + \alpha \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad [B-8]$$

Aturan semacam ini dapat diperluas pada variabel yang lebih dari 3, dan tentunya juga bila fungsi pembatas / kendalanya bukan hanya $G(x,y,z)$ tetapi juga ditambah dengan $H(x,y,z)$ yang bentuknya lain lagi.

C. Kerapatan Status Energi untuk Kumpulan Partikel Bebas

Dalam ungkapan mekanika menurut Hamilton, sebuah partikel bebas (tak dikenai gaya atau medan) yang bergerak dalam “ruang” 1-dimensi dilukiskan oleh koordinat x dan momentum p_x . Keadaan (posisi dan momentumnya) partikel tersebut dilukiskan pada titik dalam bidang (x, p_x) . Prinsip ketidak-pastian Heisenberg yang dianut dalam Mekanika Kuantum tidak memberi kepastian tentang “lokasi” semacam itu. Segmen dalam bidang (x, p_x) harus dibagi-bagi dalam satuan ukuran tetapan Planck h , maksudnya dalam segmen bidang yang luasnya $[\Delta x \cdot \Delta p_x = h]$ hanya boleh ada satu status kuantum saja. Jadi dalam bidang (x, p_x) dengan rentangan $(-Lebar/2) < x < (Lebar/2)$ dan $(-Tinggi/2) < p_x < (Tinggi/2)$ dengan Luas = (Lebar X Tinggi) hanya ada titik-status yang jumlahnya (Luas/h) saja.

Untuk partikel yang bergerak dalam 3-dimensi, lukisan status partikel itu harus diungkap pada “ruang-U” yang dimensinya 6 : (x, y, z, p_x, p_y, p_z) . Dengan rentangan seperti di atas, maka “volume-U” adalah

$$\Omega = (\text{Lebar}^3 \times \text{Tinggi}^3) \tag{C-1}$$

dengan jumlah status $J = \Omega / h^3$ [C-2]

Untuk partikel dengan massa m yang bergerak bebas, energi yang dimilikinya hanyalah energi kinetik, yang merupakan fungsi dari momentum saja

$$E(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2m \tag{C-3}$$

Jadi, kalau kita ingin tahu berapa jumlah status sebuah partikel bebas dengan massa m yang bergerak dalam ruangan yang volumenya V , dan memiliki energi (kinetik) yang rentangnya antara $E=0$ s/d $E=E_b$, maka

$$J(E_b) = \frac{1}{h^3} \iiint dx dy dz \iiint_{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \leq E_b / 2m} dp_x dp_y dp_z \tag{C-4}$$

Integral lipat-3 yang pertama menghasilkan volume V , sedangkan integral lipat-3 yang berikutnya menghasilkan isi sebuah bola dengan jari-jari $\sqrt{(2mE_b)}$. Artinya,

$$J(E_b) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{3} (2mE_b)^{3/2} \tag{C-5}$$

Banyaknya status dengan energi dalam rentang antara E dan $E+dE$ dihitung dengan

$$g(E) \cdot dE = \frac{dJ(E)}{dE} = \frac{2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2}}{h^3} V \cdot dE \tag{C-6}$$

D. Integral yang melibatkan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann

Hitungan dengan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann melibatkan integral yang dikenal sebagai Integral Gamma. Fungsi itu didefinisikan untuk nilai $n > 0$ sebagai

$$\Gamma(n + 1) \equiv \int_0^{\infty} x^n \exp(-x) \cdot dx \quad [D-1]$$

Fungsi semacam ini ternyata memiliki sifat :

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) \quad [D-2]$$

Itu dapat dibuktikan dengan melakukan integrasi parsial terhadap $\Gamma(n+1)$

$$\Gamma(n + 1) = -\int_0^{\infty} x^n d[\exp(-x)] = -\left[x^n e^{-x} \right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} x^{n-1} \exp(-x) \cdot dx$$

dengan kenyataan bahwa

$$-\left[x^n e^{-x} \right]_0^{\infty} = 0$$

Bila n bilangan bulat, maka

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-x) \cdot dx = n! \quad [D-3]$$

Bagaimana kalau n itu bilangan setengah, misalnya

$$\Gamma(5/2) = (5/2) \cdot (3/2) \cdot \Gamma(1/2) = (5/2) \cdot (3/2) \cdot \int_0^{\infty} x^{-1/2} \exp(-x) \cdot dx \quad [D-4]$$

Untuk menghitung $\Gamma(1/2)$, kita rubah variabel x menjadi $x = y^2$, sehingga $dx = 2y \cdot dy$. Maka

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &\equiv \int_0^{\infty} x^{-1/2} \exp(-x) \cdot dx = 2 \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \\ \Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx \cdot dy \end{aligned}$$

Bila kita ganti dengan koordinat polar $r^2 = (x^2 + y^2)$, ungkapan tersebut dapat di tuliskan sebagai

$$\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} 2\pi r \exp(-r^2) dr = \pi \int_0^{\infty} \exp(-t) dt = \pi \quad [D-5]$$

Dengan demikian

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad [D-6]$$

Pada hitungan distribusi Maxwell-Boltzmann untuk Gas Ideal, kita menjumpai integral dalam bentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha p_x^2) \cdot dp_x$$

Untuk itu dapat dituliskan misalnya $x^2 = \alpha p_x^2$, sehingga $dp_x = dx / \sqrt{\alpha}$ sehingga

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha p_x^2) \cdot dp_x = \sqrt{\pi/\alpha}} \quad [D-7]$$

Juga pada distribusi Maxwell-Boltzmann kita menjumpai bentuk integral

$$\int_0^{\infty} E^{1/2} \exp(-\alpha E) \cdot dE$$

Jika ubah variabel $\alpha E = x$, maka

$$\int_0^{\infty} E^{1/2} \exp(-\alpha E) \cdot dE = (\sqrt{\alpha})^{-3} \int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x) dx = \frac{3}{2\alpha^{3/2}} \Gamma(1/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} \quad [D-8]$$

E. Integral yang melibatkan fungsi distribusi Fermi-Dirac

Distribusi Fermi-Dirac melibatkan fungsi yang teknik analitiknya sedikit lebih rumit daripada yang terjadi pada distribusi Maxwell-Boltzmann. Pada contoh yang digarap, energi Fermi umumnya jauh di atas suhu ruang, sehingga yang perlu ditinjau khususnya adalah kondisi dengan $kT \ll E_F$, atau dalam skala ini T dekat dengan 0.

Ada aturan matematika yang sering disebut Integrasi Parsial. Jika ada fungsi $A(x)$, $a(x)$, $B(x)$, dan $b(x)$ yang memenuhi hubungan

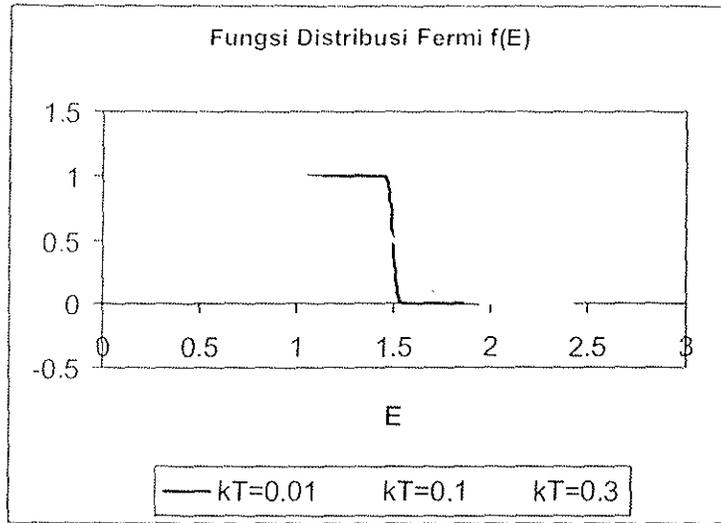
$$a(x) = dA(x)/dx \quad b(x) = dB(x)/dx \quad [E-1]$$

maka
$$\frac{d[A(x)B(x)]}{dx} = a(x)B(x) + A(x)b(x) \quad [E-2]$$

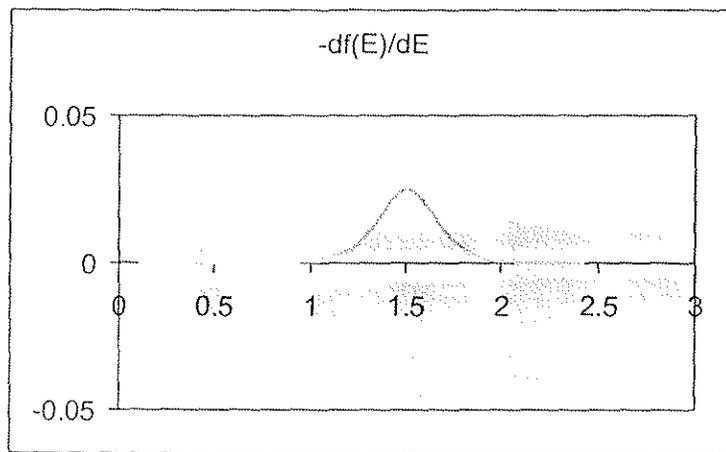
sehingga
$$\int_0^{\infty} a(x)B(x) dx = [A(x)B(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} A(x)b(x) dx \quad [E-3]$$

Fungsi distribusi Fermi-Dirac memiliki karakteristik yang khas seperti terlukis pada grafik di bawah ini, bila dipilih $E_F = 1.5$, dan nilai kT yang berbeda-beda.

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - E_f)/kT] + 1} \quad [E-4]$$



Berikut dilukis juga fungsi $-df(E)/dE$ untuk nilai $kT = 0.1$



Dapat diduga, bahwa untuk $kT = 0$ lukisan $-df(E)/dE$ rentangan disekitar nilai $E = E_f$ akan semakin sempit, untuk semua E nilai fungsinya = 0, kecuali pada $E = E_f$. Artinya, integral yang melibatkan $df(E)/dE$ hanya perlu dihitung nilainya di sekitar $E = E_f$ saja. Dalam kalkulus fungsi semacam itu dinamakan Fungsi Delta Dirac, lambangnya $\delta(E - E_f)$. Sifat fungsi semacam itu adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) G(x) dx = G(a)$$

Jadi untuk sebarang fungsi $B(E)$ yang bentuknya

$$B(E) = \int_0^E b(x) dx \quad [E-5]$$

kita boleh menulis integrasi parsial

$$I \equiv \int_0^{\infty} f(E) b(E) dE = [f(E)B(E)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} B(E) \frac{df(E)}{dE} dE \quad [E-6]$$

Suku pertama ruas kanan persamaan di atas nilainya = 0, sebab $B(0)=0$ dan untuk $E \rightarrow \infty$ $f(E)=0$. Jadi tinggal

$$I \equiv \int_0^{\infty} f(E) b(E) dE = - \int_0^{\infty} B(E) \frac{df(E)}{dE} dE \quad [E-7]$$

Pada ruas kanan persamaan di atas, kita dapat menguraikan fungsi $B(E)$ di sekitar nilai $E = E_F$, menggunakan deret Taylor

$$B(E) = B(E_F) + b(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \frac{db(E_F)}{dE_F} (E - E_F)^2 + \dots \quad [E-8]$$

Jadi

$$I = -B(E_F) \int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} dE + b(E_F) \int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_F) dE + \frac{1}{2} \frac{db(E_F)}{dE_F} \int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_F)^2 dE + \dots \quad [E-9]$$

Suku pertama ruas kanan persamaan [E-9] nilainya

$$= -B(E_F) [f(E)]_0^{\infty} = -B(E_F) \frac{-1}{\exp(-E_F/kT) + 1}$$

tetapi karena yang kita bahas adalah kasus pada $kT \ll E_F$, maka faktor keduanya praktis sama dengan -1 , sehingga suku pertama itu nilainya $+B(E_F)$.

$$B(E_F) = \int_0^{E_F} b(E) dE \quad [E-10]$$

Untuk menghitung suku kedua dari ruas kanan persamaan [E-9], kita tuliskan $df(E)/dE$ secara eksplisit

$$\frac{df(E)}{dE} = -\frac{1}{kT} \frac{\exp[(E - E_f)/kT]}{\{\exp[(E - E_f)/kT] + 1\}^2} \quad [E-11]$$

sehingga

$$\int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_f) dE = -\frac{1}{kT} \int_0^{\infty} \frac{(E - E_f) \cdot \exp[(E - E_f)/kT]}{\{\exp[(E - E_f)/kT] + 1\}^2} d(E - E_f) \quad [E-12]$$

atau kalau kita gunakan variabel $x = (E - E_f)/kT$ ungkapannya menjadi lebih sederhana

$$\int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_f) dE = -kT \int_{-E_f/kT}^{\infty} \frac{x \cdot \exp(x)}{[\exp(x) + 1]^2} dx \quad [E-13]$$

Karena $kT \ll E_f$, maka batas bawah integral pada ruas kedua persamaan [E-13] boleh digantikan dengan nilai $(-\infty)$. Lalu kalau kita lihat integrandnya adalah fungsi ganjil dari variabel x yang merentang dari $(-\infty)$ hingga $(+\infty)$,

$$\frac{x \cdot \exp(x)}{[\exp(x) + 1]^2} = -\left\{ \frac{(-x) \exp(-x)}{[\exp(-x) + 1]^2} \right\} \quad [E-14]$$

jadi integralnya dengan rentang dari $(-\infty)$ hingga $(+\infty)$, menjadi 0.

Suku ketiga dari ruas kanan persamaan [E-9] dapat diperlakukan dengan cara serupa.

Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_f)^2 dE \cong -(kT)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cdot \exp(x)}{[\exp(x) + 1]^2} dx \quad [E-15]$$

kali ini integrandnya fungsi genap dalam variabel x , jadi rentang antara 0 dengan $(+\infty)$ menghasilkan nilai yang sama dengan rentang antara 0 dengan $(-\infty)$. Dapat dituliskan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cdot \exp(x)}{[\exp(x) + 1]^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot \exp(x)}{[\exp(x) + 1]^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot \exp(-x)}{[\exp(-x) + 1]^2} dx \quad [E-16]$$

Kita gunakan deret

$$[1 + \exp(-x)]^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot \exp[-(n-1)x] \quad [E-17]$$

maka

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot \exp(-x)}{[\exp(-x) + 1]^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot \exp(-nx) \cdot dx \quad [E-18]$$

Menurut Integral Gamma

$$\int_0^{\infty} x^2 \cdot \exp(-nx) dx = \frac{1}{n^3} \Gamma(3) = \frac{2}{n^2} \quad [E-19]$$

Jadi

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \exp(-x)}{[\exp(-x) + 1]^2} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad [E-20]$$

Dengan demikian pers. [E-15] menjadi

$$\int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_f)^2 dE \equiv -(kT)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cdot \exp(x)}{[\exp(x) + 1]^2} dx = -(kT)^2 \frac{\pi^2}{3} \quad [E-21]$$

dan suku ketiga persamaan [E-9] nilainya

$$\frac{1}{2} \frac{db(E_f)}{dE_f} \int_0^{\infty} \frac{df(E)}{dE} (E - E_f)^2 dE \equiv -\frac{db(E_f)}{dE_f} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad [E-22]$$

Besaran integral yang ingin kita hitung (pers.[E-7]) nilainya dapat dituliskan sebagai

$$I \equiv \int_0^{\infty} f(E)b(E)dE = \int_0^{E_f} b(E)dE + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{db(E_f)}{dE_f} \quad [E-23]$$

Dengan bekal rumus {B-23} di atas kita dapat mencari misalnya besarnya energi Fermi pada suhu T yang tidak terlalu jauh dari T=0, untuk gas fermion. Kerapatan status energi untuk "gas elektron" dalam zat padat adalah

$$g(E) = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} E^{1/2} \quad [E-24]$$

Kita perlu nilai dg(E)/dE, itu mudah dihitung

$$\frac{dg(E)}{dE} = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{E^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{g(E)}{E} \quad [E-25]$$

Jumlah elektron bebas misalnya, kita hitung dari

$$N = \int_0^{\infty} f(E)b(E)dE = \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{dg(E_f)}{dE_f} + \int_0^{E_f} g(E)dE \quad [E-26]$$

Pada $T=0$, didapat hubungan antara N dengan $E_F(0)$ dari

$$N = \int_0^{E_F(0)} g(E) dE \quad [E-27]$$

Jadi boleh kita tulis

$$\frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{dg(E_F)}{dE_F} = \int_0^{E_F} g(E) dE - \int_0^{E_F(0)} g(E) dE = \int_{E_F(0)}^{E_F} g(E) dE \quad [E-28]$$

Untuk nilai $[E_F - E_F(0)]$ yang kecil integral di ruas kanan itu $\cong g[E_F(0)] \cdot [E_F(0) - E_F]$, sehingga dengan menggunakan persamaan [E-25] kita peroleh

$$\frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{g(E_F)}{2E_F} \cong \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \frac{g[E_F(0)]}{E_F(0)} = g[E_F(0)] [E_F(0) - E_F] \quad [E-29]$$

Atau

$$E_F(T) \cong E_F(0) \cdot \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{E_F(0)^2} \right] \quad [E-30]$$

Energi rata-rata elektron pada suhu T , juga dapat kita peroleh melalui

$$\langle E(T) \rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} E g(E) f(E) dE = \frac{\int_0^{\infty} E g(E) f(E) dE}{\int_0^{\infty} g(E) f(E) dE} \quad [E-31]$$

Pada $T = 0$, $f(E) = 1$ untuk $E \leq E_F$, dan $f(E) = 0$ untuk $E > E_F$ sehingga

$$\langle E(0) \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \cdot g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE} = \frac{(2/5) E_F(0)^{5/2}}{(2/3) E_F(0)^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F(0) \quad [E-32]$$

Dengan substitusi $b(E) = E \cdot g(E)$ pada persamaan [E-23] kita dapatkan

$$U(T) = \int_0^{E_F} E \cdot g(E) dE + \left[g(E_F) + E_F \frac{dg(E_F)}{dE_F} \right] \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \quad [E-33]$$

Suku pertama ruas kanan persamaan di atas

$$\int_0^{E_f} E \cdot g(E) dE = \int_0^{E_f(0)} E g(E) dE - \int_{E_f}^{E_f(0)} E g(E) dE = U(0) - E_f(0) g[E_f(0)] [E_f(0) - E_f]$$

Dengan menggunakan hasil persamaan [E-29] ungkapan tersebut menjadi

$$\int_0^{E_f} E \cdot g(E) dE = U(0) - g[E_f(0)] \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \tag{E-34}$$

Dengan menggunakan persamaan [E-24] dan [E-25], kita juga dapat menuliskan suku kedua ruas kanan persamaan [E-33] sebagai

$$\left[g(E_f) + E_f \frac{dg(E_f)}{dE_f} \right] \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \cong \frac{3}{2} g[E_f(0)] \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \tag{E-35}$$

sehingga

$$U(T) = U(0) - g[E_f(0)] \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 + \frac{3}{2} g[E_f(0)] \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 = U(0) + g[E_f(0)] \frac{\pi^2}{6} (kT)^2$$

Adapun $g[E_f(0)]$ juga dapat dituliskan dalam ungkapan N dan $E_f(0)$, dari ungkapan persamaan [E-24] dan [E-27]

$$N = \int_0^{E_f(0)} g(E) dE = \frac{3}{2} E_f(0) g[E_f(0)]$$

atau

$$g[E_f(0)] = \frac{2}{3} \frac{N}{E_f(0)} \tag{E-36}$$

Jadi, energi rata-rata fermion $[U(T)/N]$ jika kita nyatakan dalam ungkapan $E_f(0)$ atau T_f yang kita definisikan sebagai $kT_f = E_f(0)$ bentuknya

$$\langle E(T) \rangle \cong E_f(0) \left[\frac{3}{5} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{T}{T_f} \right)^2 \right] \tag{E-37}$$