A. Rusli

Peran Syarat Batas Fisis : Suatu Contoh

Intisari

Ditunjukkan bagaimana perluasan sebuah soal fisika sederhana menimbulkan masalah, karena penggunaan langkah pengkuadratan tanpa memperhatikan batas berlakunya besaran fisis. Juga ditunjukkan manfaat cara grafis untuk melihat sifat atau kelakuan soal.

I. Latar Belakang

Sekitar akhir bulan Mei 1996, seorang mahasiswa menanyakan cara memecahkan sebuah soal mekanika (Giancoli 1991, bab 2 soal 43) kepada saya. Solusinya ternyata sederhana, asalkan dianggap laju rambat bunyi = ∞. Ketika saya mencoba menggunakan laju yang berhingga ($\neq \infty$), ternyata timbul masalah. Baru setelah beberapa kali dicoba, saya berhasil melihat **mengapa** masalah itu timbul. Ternyata penyebabnya adalah, karena saya mengkuadratkan sebuah persamaan, tetapi lupa memperhatikan syarat batas yang berlaku bagi peristiwa konkretnya ("keadaan fisis"nya).

Tulisan ini dibuat untuk menunjukkan bahwa hal itu penting untuk selalu diperhatikan. Maksud kedua adalah, untuk menunjukkan manfaat cara grafik untuk menerobos kemacetan menghadapi soal.

II. Soalnya, dan Solusi Mudahnya

Soalnya adalah tentang suatu cara eksperimental untuk mengukur jarak dengan pertolongan pengukuran waktu : Sebuah batu (yang bersih dan kecil, tentunya) dijatuhkan ke dalam sumur, dan setelah T detik terdengar bunyi gemericik tanda tibanya batu di air. Pertanyaan : Hitunglah kedalaman sumur itu. Solusi mudahnya : Karena percepatan gravitasi dapat dianggap konstan, g, maka gerak batu tergolong gerak lurus berubah beraturan, dan berlakulah persamaan $L = g\ T^2/2$ (L = kedalaman sumur). Karena g dan T diketahui, maka soal itu terselesaikan. Di sini laju rambat bunyi dianggap ∞.

III. Masalahnya

Untuk menguji kedalaman pemahaman kita tentang segi fisis suatu soal, ataupun sebagai **kontrol** tentang benar tidaknya solusi yang telah diperoleh, selalu baik untuk meninjau **variasi** soal itu. Ketika hal itu saya lakukan, yaitu pertama kali dengan menulis T untuk waktu antara saat mulai dijatuhkannya batu dan saat terdengarnya gemericik air (hal itu sejenak sempat menimbulkan masalah, tetapi tidak akan dibahas karena mudah diatasi), dan kedua dengan menulis v ($\neq \infty$) untuk laju rambat bunyi, ternyata timbul masalah. Masalahnya, seolah lalu ada **dua** harga L yang berlaku. Artinya : Kedalaman sumur ada **dua** macam ! Hal ini langsung terasa **tak masuk akal**. Artinya : **tak fisis**; terasa tidak mungkin bahwa ada dua macam kedalaman sumur yang memerlukan jangka waktu T yang sama.

Maka : Bagaimana menerobos dan memecahkan masalah ini ? Bagaimana dapat merujukkan rasa "tak mungkin" dengan hasil matematik "dua macam" itu ? Atau sebaliknya : Dimana terjadi kesalahan matematika ? Pasti bukan matematikanya yang keliru; pasti **saya** yang salah-pakai matematika; tetapi di langkah mana ?

IV. Langkah Awal Penyelidikan

Mula-mula saya memang memeriksa pematematikan soalnya. Tentulah waktu jatuh (t_1) ditambah waktu bunyi gemericik untuk tiba di telinga (t_2) harus sama dengan T :

$$t_1 + t_2 = T \qquad (1)$$

Dengan $L = g\ t_1^2/2$ dan $L = v\ t_2$ dapat ditulis :

$$\sqrt{(2L/g)} + L/v = T \qquad (2)$$

Maka untuk menemukan harga L, bukankah cara mudahnya adalah dengan mengkuadratkan persamaan itu? Akan diperoleh persamaan kuadrat dalam L, yang lalu dengan mudah diselesaikan. Mula-mula suku akar disendirikan :

$$\sqrt{(2L/g)} = T - L/v \qquad (3)$$

lalu dikuadratkan :

$$2L/g = \{T - (L/v)\}^2 \qquad (4)$$

yang dapat disusun menjadi bentuk baku :

$$L^2 - \{2vT + (2v^2/g)\}L + (vT)^2 \qquad (5)$$

Maka

$$L = vT + v^2/g \pm \sqrt{\{(vT + v^2/g)^2 - (vT)^2\}} \qquad (6)$$

Jadi ada **dua** harga L; yang lebih rendah (dan yang nanti ternyata adalah jawab yang benar secara fisis) adalah :

$$L = vT + v^2/g - v\sqrt{\{(2vT/g) + (v^2/g)^2\}} \qquad (7)$$

Yang lebih tinggi memang benar secara matematis, tetapi nanti ternyata **tidak** dapat ada (**tidak** sah) secara fisis (alamiah) :

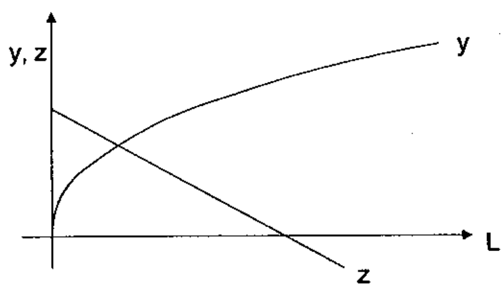
$$L = vT + v^2/g + v\sqrt{\{(2vT/g) + (v^2/g)^2\}} \qquad (8)$$

Kelebihan jawab ini saya coba pahami dengan meninjau limit $v \to \infty$; jawab yang benar seharusnya lalu menjadi sama dengan solusi mudah di atas ($L = g\ T^2/2$). Hasilnya dari persamaan (7) dan (8) : $L \to \infty$! Ini jelas tidak cocok; hal ini memberi petunjuk bahwa telah terjadi kekeliruan, misalnya "membagi dengan nol" atau "mengalikan dengan ∞". Ini petunjuk pertama bahwa ada sesuatu yang tidak beres dengan solusi yang memperhitungkan $v \neq \infty$ ini. Saya temukan bahwa memang telah terjadi pengalian dengan v^2 pada persamaan (5); hal ini lalu diikuti dengan pelimitan $v \to \infty$ tadi. Tampak bahwa jika limit $v \to \infty$ diterapkan sebelum pengkuadratan (5), akan dihasilkan (lihat (4)) jawab mudah $L = g\ T^2/2$ sebagaimana seharusnya.

Pelajarannya adalah : Pengalian dengan v^2 yang disusul dengan proses limit $v \to \infty$ memberi hasil yang keliru, serupa dengan kalau bilangan apa saja "dikalikan" dengan ∞ akan menjadi sama-sama $\to \infty$. Maka proses limit harus dilakukan dengan waspada; urutan pelaksanaannya kadang-kadang menjadi penting. Maka lalu bagaimana ?

V. Cara Grafis

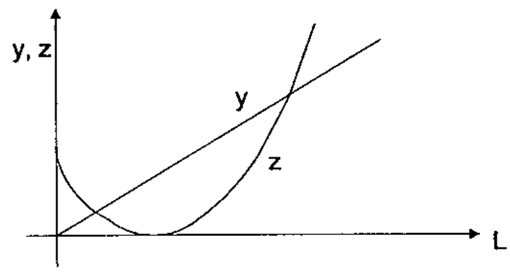
Setelah beberapa kali memikirkannya, saya lalu menyempatkan diri menggunakan cara grafis, yang telah saya alami cukup sering membantu menerobos kemacetan, karena memberi visualisasi keadaan dengan lebih mudah. Jika persamaan (3) dipandang-pandang, dapatlah persamaan itu dilihat sebagai grafik $y = \sqrt{(2/g)}\ \sqrt{L}$ dan grafik $z = T - (1/v)\ L$ yang lalu dicari **titik potong**nya (karena persamaan (3) mengatakan bahwa y harus = z). Maka marilah meninjau kedua grafik itu.



Gambar 1. Penggrafikan persamaan (3)

Tampak bahwa memang hanya ada satu titik potong. Artinya : Cuma ada satu solusi, satu L. Juga tampak bahwa makin cepat rambatan bunyi, makin kecil koefisien arah z, dan untuk $v \rightarrow \infty$, grafik z akan horisontal, dengan harga L terbesar, yaitu $g\ T^2/2$.
Sebaliknya jika laju rambat bunyi amat kecil, kecuraman grafik z makin besar, dan titik potong y dan z makin dekat ke L = 0. Bukankah hal ini cocok dengan rekaan kualitatif : Jika bunyi meambat amat lamban, tentu untuk jangka waktu tertentu T, kedalaman sumur perlu amat dangkal, $L \rightarrow 0$. Maka cara grafik seperti ini mengukuhkan "akal sehat".

Maka "penimbul gara-gara" mestinya adalah tindakan "mengkuadratkan persamaan (4)". Karena itu lalu dicoba diperiksa bagaimana bentuk grafik Y = (2/g)L dan Z = $\{T - (L/v)\}^2$ hasil pengkuadratan (lihat pers. (4)). Grafiknya :



Gambar 2. Penggrafikan pers.(4)

Tampak bahwa Y dan Z akan **selalu** berpotongan di **dua** titik, karena parabola Z **pasti** akan memotong Y pada L cukup besar. Bukti : Solusi "tinggi" pers. (8) pasti dan selalu ada, untuk v, T, g berapa pun.
Solusi L yang "rendah" juga akan **selalu** ada, dan L nya selalu juga positif karena tampak memotong Y pada L > 0. Juga tampak dari pers.(6) bahwa nilai suku dengan akar selalu lebih **kecil** daripada bagian di depan tanda $\pm$, sehingga L selalu > 0.

Dengan membandingkan gambar 1 dan 2, lalu mulai tampak bahwa "penimbul gara-gara" memang adalah "kuadratisasi", yang "membelokkan" grafik z yang lurus menjadi Z yang berbentuk **parabola**, sehingga menghasilkan titik potong tambahan pada L cukup besar.

VI. Terobosan

Setelah memandang-mandang peristiwa pembelokan ("pembelotan"?) ini, perhatian saya lalu memfokus pada pertanyaan : Bolehkah grafik z berharga negatif? Hal ini muncul karena itulah yang menimbulkan masalah di atas. Lalu tiba-tiba saya sadar bahwa grafik z **tidak** boleh negatif, karena z bermakna fisis t_1 (= waktu jatuhnya batu) yang jelas **wajib** positif (pernahkah ada batu yang memerlukan waktu negatif untuk menempuh suatu jarak?).

Inilah terobosannya. Grafik z hanya berlaku antara $0 < L < vT$. Ini syarat yang timbul dari pertimbangan fisika. Ini syarat tentang batas-batas (berlakunya) suatu soal, syarat yang menetapkan wilayah berlakunya soal. Ini memang agak berbeda dengan pengertian syarat batas matematik yang menetapkan harga-harga (atau sifat) yang berlaku di perbatasan soal (di sini : $z(\text{di } L=0) = T$ dan $z(L=vT) = 0$).

Memang, juga y (yang bermakna t_1 juga) harus selalu positif; jadi kurva $\sqrt{L}$ memang hanya berada pada rentang $0 < L < \infty$; tetapi hal ini tidak berperan di sini, karena tidak secara jelas menimbulkan persoalan.

VII. Penutup

Maka akhirnya terpecahkanlah masalah di atas. Pelajarannya :

a) Pengalian dengan sesuatu, yang lalu dibuat menuju ∞, adalah langkah yang keliru. Hal ini setara dengan mengalikan sesuatu dengan ∞.
   Dapat ditunjukkan pula bahwa kita boleh membagi dengan sesuatu, yang lalu ditujukan ke ∞. Juga boleh untuk **mengalikan** dengan sesuatu, lalu menujukannya ke nol (dan **tidak** boleh membagi dengan sesuatu, lalu menujukannya ke nol).
b) Proses pengkuadratan menghasilkan solusi tambahan, serupa dengan hal $y = a$; jika dikuadratkan, $y^2 = a^2$ akan memberi kesempatan bentuk $y = -a$ untuk juga menjadi kebenaran (padahal semula hal ini jelas **tidak** tercakup, kecuali tentunya untuk $a = 0$).
c) Peninjauan cara memecahkan soal dengan grafik ternyata berhasil menunjukkan jalan ke arah penyelesaian soal. Maka sebaiknya cara ini tidak lupa dipertimbangkan dalam menghadapi soal atau variasi soal.

Pustaka

Giancoli, D.C. *Physics - Principles with Applications*, 3rd ed., Prentice-Hall, London, 1991.

Penulis

A. Rusli adalah dekan FMIPA Universitas Katolik Parahyangan.