MODEL MATEMATIKA SISTEM PERSEDIAAN DENGAN PENGADAAN DARURAT

AGUS SUKMANA & IRENE LOKMAN

Published in :
MAJALAH ILMIAH INTEGRAL
VOL. 10-1, 8-17, ISSN 1410-1335
MARCH, 2005

Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Parahyangan Catholic University
2005

MODEL MATEMATIKA SISTEM PERSEDIAAN DENGAN PENGADAAN DARURAT

Agus Sukmana dan Irene Lokman
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Katolik Parahyangan, Bandung 40141 - Indonesia
Email : asukmana@home.unpar.ac.id

Intisari

*Sistem persediaan dengan pengadaan darurat adalah sistem yang menerapkan dua macam pengadaan yaitu pengadaan regular yang mengikuti kebijakan base stock dan pengadaan darurat dengan waktu ancang lebih singkat tetapi dengan biaya tambahan lebih mahal. Kami mengasumsikan biaya yang harus dibayarkan untuk kompensasi kekurangan persediaan lebih mahal dibandingkan dengan biaya pemesanan darurat. Variabel keputusan dari model adalah **S** (tingkat persediaan maksimum) dan **r** (ambang batas untuk persediaan bersih). Makalah ini membahas penurunan model untuk ekspektasi biaya total dan pencarian variable keputusan yang mengoptimalkan model. Solusi optimal diperoleh dengan menggunakan teknik integral numerik trapesium rekursif. Hasilnya dibandingkan dengan hasil simulasi dari Tagaras & Vlachos (2001) dengan menggunakan data yang sama. Teknik trapesium rekursif memberikan solusi optimal yang tidak berbeda jauh dengan hasil simulasi. Model persediaan dengan pengadaan darurat menghasilkan penghematan biaya yang cukup berarti dibandingkan dengan model persediaan tanpa pengadaan darurat.*

Kata kunci : model persediaan, pemesanan darurat

Abstract

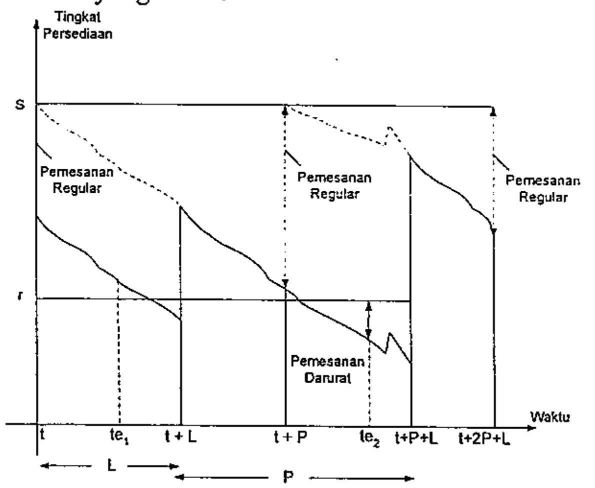
*A periodic inventory system with emergency replenishment is an inventory system with two replenishment modes. Regular orders are placed periodically following a base- stock policy and emergency orders are characterized by a shorter lead time and higher acquisition cost. We assume that penalty cost is more expensive than emergency order cost. The model has two decision variables: **S** (base stock) and **r** (threshold on the net- stock). This paper deals with a derivation of the expected total cost model and how to seek decision variables that optimize the model. An optimal solution is obtained by using trapezium recursive technique. Results are compared with simulation results of Tagaras & Vlachos (2001) using the same data. Trapezium recursive technique gives optimal solution that close to results from simulation. Model with emergency replenishment gives a substantial cost saving relative to a model without emergency replenishment option.*

Keywords: inventory model, emergency ordering

Diterima : 11 Februari 2005
Disetujui untuk dipublikasikan : 7 Maret 2005

1. Pendahuluan

Masalah persediaan senantiasa menjadi topik yang menarik untuk dibahas dari sisi matematika, terutama yang berkaitan dengan aspek permintaan probabilistik dan optimasi. Di dalam makalah ini dibahas suatu model persediaan yang ditinjau secara periodik (dengan periode P) dimana pemesanan regular dilakukan sebesar selisih antara S (*base stock / tingkat persediaan maksimum yang diinginkan*) dengan persediaan saat itu di gudang dan pesanan akan tiba setelah waktu ancang L, model-model tersebut antara lain dapat dilihat pada buku klasik Hadley&Whitin (1963) dan Hopp&Spearman(1999). Mengingat biaya kompensasi yang harus dibayar karena tidak bisa memenuhi permintaan pelanggan sangat mahal, sehingga perlu dipertimbangkan suatu sistem dengan pengadaan darurat (waktu ancang L_e) dengan biaya yang lebih murah dibandingkan dengan biaya kompensasi. Pengadaan darurat dilakukan bila menjelang akhir siklus tingkat persediaan kurang dari ambang batas *net-stock* **r** dan jumlah pesanan darurat disesuaikan sehingga tingkat persediaan kembali ke posisi **r**. Makalah ini membahas model matematika dari sistem persediaan dengan pengadaan darurat, serta bagaimana mencari solusi optimal.



Gambar 1. Ilustrasi model persediaan dengan pemesanan darurat

Pemesanan regular dilakukan pada saat t, pemesanan berikutnya dilakukan pada saat t+P dan tiba pada saat t+P+L. Laju siklus persediaan adalah interval waktu dimulai pada unit waktu t+L+1 dan berakhir pada unit waktu t+L+P. t_{e1} dan t_{e2} adalah waktu yang diperkenankan untuk melakukan pemesanan darurat, pada t_{e1} tidak dilakukan pemesanan darurat karena tingkat persediaan masih diatas *r*, sedangkan pada t_{e2} dilakukan pemesanan darurat karena tingkat persediaan berada dibawah *r* dan dilakukan pemesanan darurat sejumlah barang sehingga tingkat persedian dapat kembali ke posisi *r*.

Asumsi yang digunakan di dalam makalah ini adalah :

1. Model persediaan yang dibahas hanya untuk satu jenis barang, dan penanganan kekurangan persediaan menggunakan kebijakan *back-*

order. Kekurangan persediaan hanya mungkin terjadi paling cepat pada unit waktu P-1.
2. Dalam satu siklus hanya boleh dilakukan pemesanan darurat maksimal satu kali, dengan waktu ancang jauh lebih singkat dibandingkan dengan waktu ancang pemesanan regular (L_e << L). Biaya pemesanan darurat lebih murah dibandingkan dengan biaya kekurangan persediaan.
3. Permintaan berupa variabel acak tak-negatif mengikuti distribusi tertentu yang diketahui.
4. Jumlah barang yang diterima akibat pemesanan darurat tidak diperhitungkan pada periode pengadaan berikutnya karena nilainya kecil dan pemesanan darurat umumnya jarang dilakukan.

2. Formulasi Model

Formulasi model dibuat dengan mengacu pada Tagaras & Vlachos (2001)

2.1 Notasi:

L : waktu ancang pemesanan regular dan konstan

L_e : waktu ancang pemesanan darurat ($L_e \ll$ L)

P : periode peninjauan persediaan; besarnya sama dengan waktu antar kedatangan pesanan

c_p : biaya kekurangan persedian per unit barang per unit waktu

c_e : biaya pemesanan darurat per unit barang

c_h : biaya simpan per unit barang persatuan waktu

D : banyaknya permintaan per satuan waktu dengan fungsi kepadatan peluang g(y) dan distribusi kumulatif G(y), serta mean dan simpangan baku μ & σ.

D' : banyaknya permintaan di unit waktu L+P-1 dengan fungsi kepadatan f(y') dan fungsi distribusi F(y').

Variabel keputusan di dalam makalah ini meliputi : **r**, ambang batas persediaan bersih (*net- stock*) dan S, tingkat persediaan maksimum yang diinginkan (*base-stock*)

2.2 Beberapa Istilah

Beberapa istilah yang dipergunakan dalam makalah ini meliputi:

- *On-hand inventory* (OH_i) adalah jumlah barang yang nyata ada pada saat *i* dan nilainya tak negatif.
- *Net-stock* (NS_i) adalah jumlah persediaan barang yang telah memperhitungkan permintaan yang belum terpenuhi pada saat *i* ; nilainya dapat negatif.
- *Back order* (BO_i) adalah kebijakan penanganan kekurangan persediaan dimana pelanggan bersedia menunggu sampai pemasok dapat memenuhi permintaannya. Selama menunggu, pelanggan diberi kompensasi yang besarnya bergantung pada jumlah kekurangan barang dan lamanya menunggu.

2.3 Biaya Simpan

Biaya simpan diperhitungkan pada akhir setiap unit waktu, berdasarkan *on-hand inventory* (OH_i, $i = 1,2,\ldots\ldots,P$) pada saat itu dengan biaya simpan c_h per unit barang per unit waktu. Ekspektasi *on-hand inventory* pada akhir unit waktu ke-*i*:

$$E(OH_i) = \begin{cases} S-(L+i)\mu & i=1,\ldots,P-2 \\ \int_{y'=0}^{S} F(y')dy' & i=P-1 \\ \int_{y'=0}^{r} G(y) + \int_{y=r}^{S} G(y)F(S-y)dy & i=P \end{cases} \qquad (1)$$

sehingga rata-rata biaya simpan per siklus adalah : $c_h \sum_{i=1}^{P} E(OH_i)$.

Penjelasan untuk formula (1) adalah sebagai berikut:
Pada unit waktu *i= 1,2,……., P-2* tidak mungkin terjadi kekurangan persediaan (sesuai asumsi 1) sehingga nilai *on-hand inventory* sama dengan *net stock* pada akhir waktu ke-*i*:

$$E(OH_i) = E(NS_i) = S-(L+i)\mu$$

<u>Pada saat *i*=P-1</u>: $E(OH_{P-1}) = \int_{y'=0}^{S}(S-y')f(y')dy' = S\int_{y'=0}^{S}f(y')dy' - \int_{y'=0}^{S}y'f(y')dy' = \int_{y'=0}^{S}F(y')dy'$ dengan menggunakan hasil integral parsial $\int_{y'=0}^{S}y'f(y')dy' = SF(S) - \int_{y'=0}^{S}F(y')dy'$.

<u>Pada saat *i* =P</u>: $E(OH_P) = \int_{y'=0}^{S-r}\left[\int_{y=0}^{S-y'}(S-y-y')g(y)dy\right]f(y')dy' + \int_{y'=S-r}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{r}(r-y)g(y)dy\right]f(y')dy'$

- Karena $\int_{y=0}^{S-y'}(S-y-y')g(y)dy = S\int_{y=0}^{S-y'}g(y)dy - \int_{y=0}^{S-y'}y\,g(y)dy - y'\int_{y=0}^{S-y'}g(y)dy = \int_{y=0}^{S-y'}G(y)dy$

  maka $\int_{y'=0}^{S-r}\left(\int_{y=0}^{S-y'}G(y)dy\right)f(y')dy' = F(y')\int_{y=0}^{S-y'}G(y)dy + \int_{y'=0}^{S-r}F(y')G(S-y')dy'$

  $$= F(S-r)\int_{y=0}^{r}G(y)dy - F(0)\int_{y=0}^{S}G(y)dy + \int_{y'=0}^{S-r}F(y')G(S-y')dy \qquad (*)$$

- karena $\int_{y=0}^{r}(r-y)g(y)dy = \int_{y=0}^{r}G(y)dy$, maka $\int_{y'=S-r}^{\infty}\left(\int_{y=0}^{r}G(y)dy\right)f(y')dy' = F(y')\int_{y=0}^{r}G(y)dy =$

  $$F(\infty)\int_{y=0}^{r}G(y)dy - F(S-r)\int_{y=0}^{r}G(y)dy \qquad (**)$$

Jumlah (*) dengan (**): $E(OH_P) = F(\infty)\int_{y=0}^{r}G(y)dy - F(0)\int_{y=0}^{S}G(y)dy + \int_{y'=0}^{S-r}F(y)G(S-y)dy$ dengan membuat transformasi $S\text{-}y' = y$ dan menggunakan sifat *F(0)=0* dan *F(~)=1* diperoleh:

$$E(OH_P) = \int_{y=0}^{r}G(y)dy + \int_{y=r}^{S}G(y)F(S-y)dy$$

2.4 Biaya Kekurangan Persediaan

Jika *net-stock* pada akhir waktu *i* negatif ($NS_i < 0$), maka terjadi kekurangan persediaan. Penanganan kekurangan persediaan menggunakan kebijakan *back-order* dan pelanggan diberi kompensasi sebesar c_p untuk setiap unit kekurangan per unit waktu. Rata-rata jumlah kekurangan persediaan pada akhir unit waktu ke-i :

$$E(BO_i)=\begin{cases}0 & i=1,\dots,P-2\\ \mu(L+P-1)-S+E(OH_{P-1}) & i=P-1\\ E(OH_P)+\mu-r+\int_{y'}^{S-r}F(y')dy' & i=P\end{cases} \tag{2}$$

sehingga rata-rata biaya kekurangan yang harus dibayar per siklus adalah: $c_p(BO_{P-1}+BO_P)$

Penjelasan untuk formula (2) adalah sebagai berikut:

Pada unit waktu $i=1,\dots,P-2$, $E(BO_i)=0$ karena tidak mungkin terjadi kekurangan persediaan (sesuai asumsi 1).

Untuk $i=P-1$:

$$E(BO_{P-1})=\int_{y'=S}^{\infty}(y'-S)f(y')dy'=\int_{y'=S}^{\infty}y'f(y')dy'-S\int_{y'=S}^{\infty}f(y')dy'=\int_{y'=0}^{\infty}y'f(y')dy'-\int_{y'=0}^{S}y'f(y')dy'-S\left[1-\int_{y'=0}^{S}f(y')dy'\right]$$

$$=E(y')-S\int_{y'=0}^{S}f(y')dy'+\int_{y'=0}^{S}F(y')dy'-S+S\int_{y'=0}^{S}f(y')dy'=E(y')-S+\int_{y'=0}^{S}F(y')dy'=\mu(L+P-1)-S+E(OH_{P-1})$$

Untuk $i=P$: $E(BO_P)=\int_{y'=0}^{S-r}\left[\int_{y=S-y'}^{\infty}(y+y'-S)g(y)dy\right]f(y')dy'+\int_{y'=S-r}^{\infty}\left[\int_{y=r}^{\infty}(y-r)g(y)dy\right]f(y')dy'$

Dengan menggunakan integral parsial dua kali diperoleh:

$$E(BO_P)=\int_{y=0}^{r}G(y)dy+\int_{y=r}^{S}G(y)F(S-y)dy+\mu-r-\int_{y'=0}^{S-r}F(y')dy'=E(OH_P)+\mu-r-\int_{y'=0}^{S-r}F(y')dy'$$

2.5 Biaya Pemesanan Darurat

Pemesanan darurat dilakukan paling lambat saat $P-L_e$. Jika $NS_{P-L_e}<r$ maka dipesan sebanyak $Q_e=r-NS_{P-L_e}$ untuk mengembalikan tingkat persediaan ke posisi r. Biaya pemesanan adalah c_e per unit barang yang dipesan. Rata-rata jumlah barang yang dipesan per siklus :

$$E(Q_e)=\int_{y'=0}^{S-r}F(y')dy'+(r-S)+(L+P-1)\mu \tag{3}$$

sehingga rata-rata biaya pemesanan darurat per siklus adalah: $c_eE(Q_e)$.

Penjelasan dan penurunan formula (3) adalah sebagai berikut :

$$E(Q_e)=\int_{y'=S-r}^{\infty}(r+y'-S)f(y')dy'=r\int_{y'=S-r}^{\infty}f(y')dy'+\int_{y'=S-r}^{\infty}y'f(y')dy'-S\int_{y'=S-r}^{\infty}f(y')dy'$$

$$=r\int_{y'=S-r}^{\infty}f(y')dy'+\int_{y'=0}^{\infty}y'f(y')dy'+\int_{y'=0}^{S-r}y'f(y')dy'-S\int_{y'=S-r}^{\infty}f(y')dy'$$

$$=(r-S)\int_{y'=S-r}^{\infty}f(y')dy'+E(y')-\int_{y'=0}^{S-r}y'f(y')dy'=(r-S)\int_{y'=S-r}^{\infty}f(y')dy'+E(y')-\left[(S-r)\int_{y'=0}^{S-r}f(y')dy'-\int_{y'=0}^{S-r}F(y')dy'\right]$$

$$=(r-S)\left[1-\int_{y'=0}^{S-r}f(y')dy'\right]+E(y')-\left[(S-r)\int_{y'=0}^{S-r}f(y')dy'-\int_{y'=0}^{S-r}F(y')dy'\right]$$

$$= (r-S)-(r-S)\int_{y'=0}^{S-r} f(y')dy' + E(y') + (r-S)\int_{y'=0}^{S-r} f(y')dy' + \int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' = (r-S)+E(y')+\int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy'$$

$$= (r-S)+(L+P-1)\mu + \int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' = \int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' + (r-S)+(L+P-1)\mu$$

2.6 Biaya Total Per Siklus

Komponen biaya yang diperhitungkan dalam biaya total terdiri dari biaya penyimpanan, biaya kekurangan dan biaya pemesanan darurat. Biaya pemesanan regular tidak diperhitungkan karena diasumsikan tetap untuk setiap kali pemesanan. Rata-rata total biaya per siklus adalah:

$$E(C) = c_h \sum_{i=1}^{P} E(OH_i) + c_p\left[E(BO_{P-1}) + E(BO_P)\right] + c_e\, E(Q_e)$$

$$\begin{aligned} E(C) = {} & c_h \mu \left[\frac{P(P-1)}{2} - 1\right] + c_h (P-2)[S - \mu(L+P)] - c_p[r + S - \mu(L+P)] \\ & + (c_h + c_p)\left[\int_{y'=0}^{S} F(y')dy' + \int_{y=0}^{r} G(y)dy + \int_{y=r}^{S} G(y)F(S-y)dy\right] \\ & + (c_e - c_p)\int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' - c_e[S - r - (L+P-1)\mu] \end{aligned} \tag{4}$$

3. Optimasi

Tujuan dari optimasi adalah mencari nilai variabel keputusan: ***r*** dan ***S*** yang meminimumkan rata-rata biaya total per siklus E(C). Untuk memperoleh nilai r yang meminimumkan E(C), dilakukan turunan pertama E(C) terhadap r :

$$\frac{\partial E(C)}{\partial r} = -c_p + (c_h + c_p)\frac{\partial}{\partial r}\left[\int_{y=0}^{r} G(y)dy + \int_{y=r}^{S} G(y)F(S-y)dy\right] + (c_e - c_p)\frac{\partial}{\partial r}\left[\int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy'\right] + c_e$$

Dengan menggunakan aturan Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial S}\int_{x=a_1(S)}^{x=a_2(S)} [f(x,S)]dx = \int_{x=a_1(S)}^{x=a_2(S)} \frac{\partial}{\partial S}[f(x,S)]dx + f(a_2(S),S)\frac{\partial a_2(S)}{\partial S} - f(a_1(S),S)\frac{\partial a_1(S)}{\partial S}$$

diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{y=0}^{r} G(y)dy = \int_{y=0}^{r} \frac{\partial}{\partial r} G(y)dy + G(r)1 - G(0)0 = G(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{y=r}^{S} G(y)F(S-y)dy = \int_{y=r}^{S} \frac{\partial}{\partial r}(G(y)F(S-y))dy + G(S)F(0)0 - G(r)F(S-r)1 = -G(r)F(S-r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' = \int_{y'=0}^{S-r} \frac{\partial}{\partial r} F(y')dy' + F(S-r)(-1) - F(0)0 = -F(S-r)$$

sehingga dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(C)}{\partial r} &= -c_p + (c_h + c_p)G(r) - (c_h + c_p)G(r)F(S-r) - (c_e - c_p)F(S-r) + c_e \\ &= [1 - F(S-r)][c_e - c_p + (c_h + c_p)G(r)] \end{aligned}$$

dengan mengambil $\partial E(C)/\partial r = 0$, diperoleh:

$$[1 - F(S-r)][c_e - c_p + (c_h + c_p)G(r)] = 0 \quad (5)$$

karena $0 < F(S-r) < 1$ maka :

$$G(r) = \frac{c_p - c_e}{c_h + c_p} \quad (6)$$

G(r) adalah fungsi distribusi kumulatif, monoton naik, satu kesatu dan memiliki invers $G^{-1}(.)$ sedemikian sehingga nilai **r** dapat dicari dan nilainya tunggal:

$$r = G^{-1}\left(\frac{c_p - c_e}{c_h + c_p}\right) \quad (7)$$

Turunan pertama E(C) terhadap S adalah:

$$\frac{\partial E(C)}{\partial S} = c_h(P-2) - c_p - c_e + (c_e - c_p)\frac{\partial}{\partial S}\int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' + (c_h + c_p)\frac{\partial}{\partial S}\left[\int_{y'=0}^{S} F(y')dy' + \int_{y=r}^{S} G(y)F(S-y)dy\right]$$

Karena Y adalah peubah acak tak negatif dan F(Y) adalah fungsi distribusi kumulatif untuk Y, maka:

F(0)= P(y ≤0) = 0 , demikian pula untuk *G(0)=0*. sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial S}\int_{y'=0}^{S-r} F(y')dy' = \int_{y'=0}^{S-r} \frac{\partial}{\partial S} F(y')dy' + F(S-r)1 - F(0)0 = 0 + F(S-r) - 0 = F(S-r)$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\int_{y'=0}^{S} F(y')dy' = \int_{y'=0}^{S} \frac{\partial}{\partial S} F(y')dy' + F(S)1 - F(0)0 = 0 + F(S) - 0 = F(S)$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\int_{y=r}^{S} G(y)F(S-y)dy = \int_{y=r}^{S} \frac{\partial}{\partial S}(G(y)F(S-y))dy + [G(S)F(0)1] - G(r)F(S-r)0$$

$$= \int_{y=r}^{S} G(y)f(S-y)dy$$

sehingga dapat ditulis:

$$\frac{\partial E(C)}{\partial S} = c_h(P-2) - c_p - c_e + (c_h + c_p)\left[F(S) + \int_{y=r}^{S} G(y)f(S-y)dy\right] + (c_e - c_p)F(S-r)$$

dengan mengambil $\partial E(C)/\partial S = 0$, diperoleh:

$$(c_h + c_p)\left[F(S) + \int_{y=r}^{S} G(y)f(S-y)dy\right] + = c_p + c_e - c_h(P-2) - (c_e - c_p)F(S-r) \quad (8)$$

Misalkan $x = S - y$, maka $\int_{y=r}^{S} G(y)f(S-y)dy = \int_{0}^{S-r} G(S-x)f(x)dx$ Dengan menggunakan integral parsial diperoleh:

$$\int_{0}^{S-r} G(S-x)f(x)dx = F(S-r)G(r) + \int_{0}^{S-r} F(x)g(S-x)dx$$

Dengan mensubstitusikan persamaan di atas ke persamaan (8) dan menggantikan *G(r)* dengan persamaaan (6) diperoleh persamaan:

$$F(S)+\int_{0}^{S-r}F(x)g(S-x)dx=\frac{c_p+c_e-c_h(P-2)}{c_h+c_p} \tag{9}$$

Nilai r dan S yang memenuhi persamaan (7) dan (9) adalah titik kritis dimana nilai rata-rata biaya total $E(C)$ mencapai minimum, dan dapat ditunjukan melalui penurunan berikut:

- $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S\,\partial r}=\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial r\,\partial S}=-f(S-r)(c_e-c_p+(c_h+c_p)G(r))=A$
- $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial r^2}=f(S-r)[c_e-c_p+(c_h+c_p)G(r)]+[1-F(S-r)](c_h+c_p)g(r)=B-A$ dimana $B=[1-F(S-r)](c_h+c_p)\,g(r)>0$ karena g(r) adalah fungsi kepadatan peluang.
- $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S^2}=(c_h+c_p)(f(S)+\dfrac{\partial}{\partial S}\int_{y=r}^{S}G(y)f(S-y)dy)+(c_e-c_p)f(S-r)$ dengan mengubah $x = S\text{-}y$ diperoleh : $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S^2}=C-A$ dimana $C=(c_h+c_p)\int_{x=0}^{S}g(S-x)f(x)dx>0.$

Persamaan (5) mengakibatkan $-f(S-r)(c_e-c_p+(c_h+c_p)G(r))=0=A$ sehingga:

dan matriks Hessian: $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S\,\partial r}=0$, $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial r^2}=B$, $\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S^2}=C$

$$H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial r^2} & \dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial r\,\partial S}\\ \dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S\,\partial r} & \dfrac{\partial^2 E(C)}{\partial S^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B-A & A\\ A & C-A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}$$

Determinan |H| = BC > 0 karena B > 0 dan C > 0

$$H=\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}\ ,\ H_1=|B|=B>0\ ,\ H_2=\begin{vmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{vmatrix}=BC>0$$

jadi H adalah matriks definit positif, sehingga di titik S dan r yang memenuhi persamaan (7) dan persamaan (9), rata-rata biaya total E(C) mencapai minimum.

4. Solusi Numerik

Untuk mencari nilai S dan r yang memenuhi persamaan (9) digunakan teknik numerik. Kami menggunakan metoda trapesium rekursif yang relatif lebih sederhana dan hasilnya akan dibandingkan dengan hasil simulasi oleh Tagaras&Vlachos (2001) yang lebih kompleks komputasinya

4.1 Data

Data diambil dari contoh 1-4 dan 9-12 dari Tagaras&Vlachos (2001). Permintaan berdistribusi normal dengan μ = 500 dan koefisien variasi yang berbeda (diambil 0.2 dan 0.3) untuk memeriksa pengaruh variabilitas permintaan yang lebih tinggi. Biaya simpan per unit per waktu c_h = 1 untuk semua kasus, dua nilai yang berbeda untuk biaya kekurangan persediaan c_p dan biaya pemesanan darurat c_e. Periode *review* P = 7 unit waktu.

	Permintaan		*Lead Times*		Biaya per unit		
Contoh	Distribusi	σ/μ	L	L_e	c_h	c_p	c_e
1	Normal	0.2	7	1	1	50	20
2	Normal	0.2	7	1	1	100	20
3	Normal	0.2	7	1	1	50	40
4	Normal	0.2	7	1	1	100	40
5	Normal	0.3	7	1	1	50	20
6	Normal	0.3	7	1	1	100	20
7	Normal	0.3	7	1	1	50	40
8	Normal	0.3	7	1	1	100	40

Tabel 1. Data distribusi permintaan, lead times, dan biaya-biaya.

4.2 Algoritma

Algoritma yang digunakan meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mencari nilai r optimal menggunakan persamaan (7), dengan G(.) distribusi kumulatif Normal (500, σ^2) variansi σ^2 disesuaikan dengan koefisien variasi σ/μ dari tabel 1.
2. Mencari nilai S yang memenuhi persamaan integral (9) menggunakan teknik pengintegralan numerik trapesium rekursif.
3. Berdasarkan hasil pada langkah 2 dan langkah 3 dihitung E(C) yang merupakan nilai minimumnya. Untuk menghitung E(C) kembali digunakan metoda trapesium rekursif.

4.3 Hasil Perhitungan

Perbandingan antara solusi dengan teknik trapezium rekursif dengan hasil simulasi oleh Tagaras&Vlachos (2001), diberikan pada tabel 2 di bawah ini:

	Solusi Simulasi [Tagaras&Vlachos]			Solusi Trapesium Rekursif					
contoh	S*	r*	$E(C)^*$	S^1	r^1	$E(C)^1$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	7202	532	13831.9	7191	522	14182	0.15	1.87	2.53
2	7244	590	14139.9	7150	581	14985.9	1.29	1.52	5.98
3	7346	447	14470.6	7435	414	14639.7	1.21	7.38	1.16
4	7399	537	14838.2	7300	524	15459.3	1.33	2.42	4.18
5	7375	555	15772.4	7449	533	16147.7	1	3.96	2.37
6	7467	639	16314.2	7455	622	16961.1	0.16	2.66	3.96
7	7558	428	16600.6	7768	372	17009.6	2.77	13.08	2.46
8	7643	559	17180.3	7644	536	17539.9	0.01	4.11	2.09

Tabel 2. Perbandingan hasil Solusi Simulasi dengan solusi Trapesium Rekursif.

Keterangan :

Δ_1 = galat antara S hasil simulasi dan S trapesium rekursif $= \dfrac{S^* - S^1}{S^*} \times 100\ \%$

Δ_2 = galat antara r hasil simulasi dan r trapesium rekursif $= \frac{r^* - r^1}{r^*}$ x 100 %

Δ_3 = galat antara E(C) simulasi dan E(C) trapesium rekursif $= \frac{E(C)^* - E(C)^1}{E(C)^*}$ x 100 %

Bila digunakan model persediaan tanpa pemesanan darurat, hasil yang diperoleh:

Contoh	S	E (C)
1	7418	14714.7
2	7559	15538.3
3	7418	14705.9
4	7559	15537.3
5	7657	16941.3
6	7858	18147.0
7	7657	16956.7
8	7858	17638.9

Tabel 3. Tingkat Persediaan Maksimum dan Ekspektasi Biaya tanpa Kebijakan Pemesanan Darurat

Ekspektasi biaya total untuk model tanpa persediaan darurat lebih besar daripada model dengan persediaan darurat. Model dengan persediaan darurat memberikan penghematan yang cukup berarti dibandingkan dengan model tanpa persediaan darurat.

5. Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang dapat ditarik dalam makalah ini adalah:

1. Parameter S yang diperoleh melalui teknik trapesium rekursif tidak jauh berbeda dengan hasil simulasi dengan rata-rata selisihnya sekitar 0,99 %. Sedangkan untuk parameter *r* perbedaan rata-ratanya sekitar 4,625 % selisih terbesar terjadi pada contoh 7. Rata-rata galat antara total biaya hasil simulasi dengan teknik trapesium rekursif juga tidak jauh berbeda sekitar 3,09%.
2. Model persediaan dengan pengadaan darurat menghasilkan penghematan biaya total yang cukup berarti dibandingkan dengan model persedian tanpa pengadaan darurat.

6. Daftar Pustaka

[1] Hadley.G. & Whitin,T.M. , "*Analysis of Inventory Systems*", Prentice-Hall , 1963.

[2] Hopp, W.J. & Spearman, M.L., "*Factor Physics: Foundations of Manufacturing Management*", Richard D. Irwin.Inc., 1999

[3] Irene, "*Model Persediaan Periodik Dengan Pengadaan Darurat* ", Jurusan Matematika Universitas Katolik Parahyangan, 2004.

[4] Tagaras, G. & Vlachos, D. , A Periodic Review Inventory System with Emergency Replenishments, "*Management Science*", vol 47 (3) pp. 415-429 , 2001.