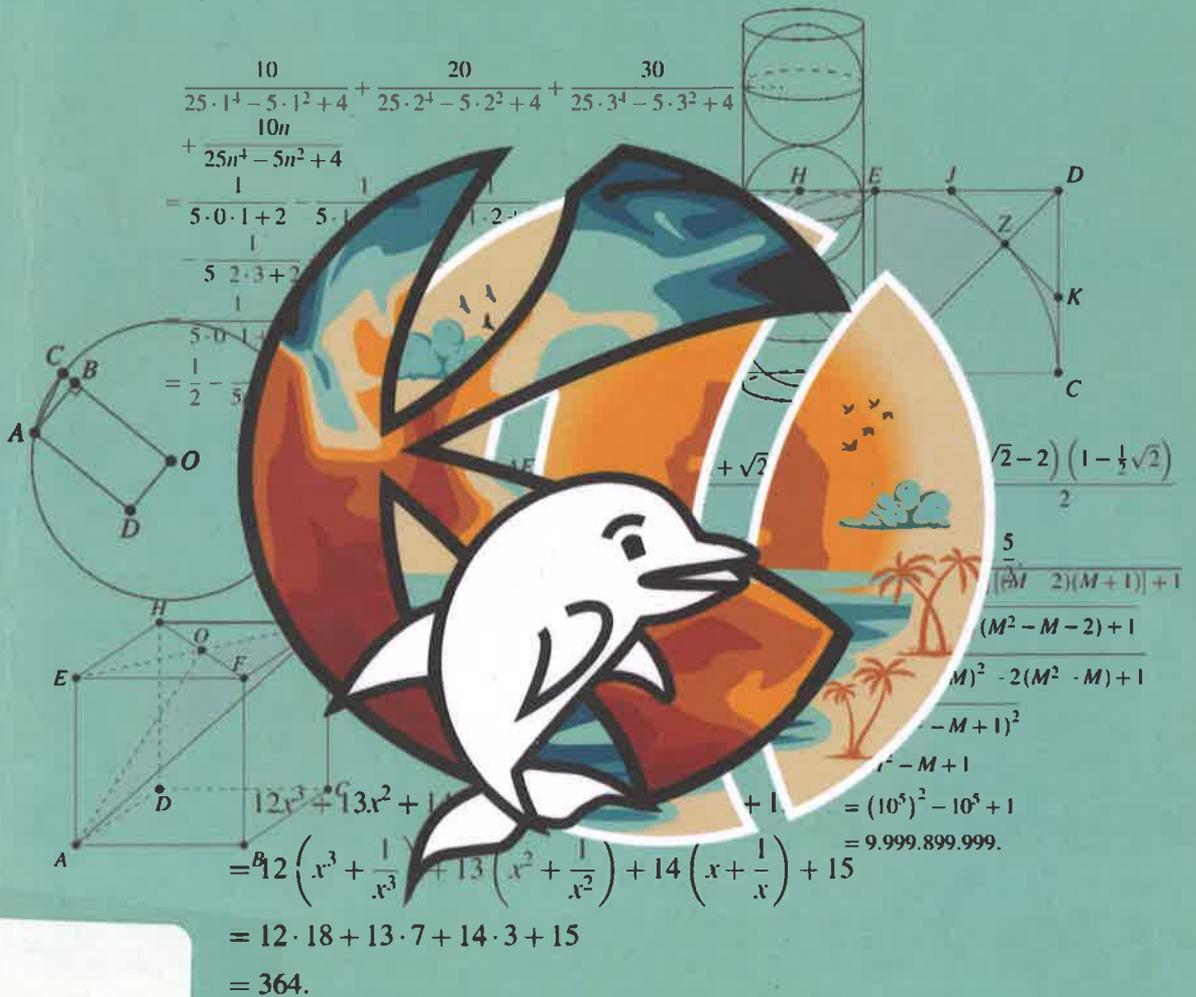


Soal-Jawab Kompetisi Matematika UNPAR 2023 Tingkat SMP



$$\frac{10}{25 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4} + \frac{20}{25 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4} + \frac{30}{25 \cdot 3^4 - 5 \cdot 3^2 + 4}$$

$$+ \frac{10n}{25n^4 - 5n^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{5 \cdot 0 \cdot 1 + 2} + \frac{1}{5 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3 + 2} + \frac{1}{5 \cdot 0 \cdot 1 + 2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$12x^3 + 13x^2 + 14x + 15$$

$$= 12 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 13 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 14 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 15$$

$$= 12 \cdot 18 + 13 \cdot 7 + 14 \cdot 3 + 15$$

$$= 364.$$

$$\frac{5}{(M-2)(M+1)+1}$$

$$(M^2 - M - 2) + 1$$

$$(M^2 - 2(M-1) + 1)$$

$$= (10^5)^2 - 10^5 + 1$$

$$= 9.999.899.999.$$

076
NI
R/SB

**Pusat Studi Matematika dan Masyarakat
dan
Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika
Universitas Katolik Parahyangan**

SOAL-JAWAB

KOMPETISI MATEMATIKA UNPAR

2023

Babak Penyisihan, Perempat Final, dan Semifinal

Tingkat SMP



510.076
UNI
S
147132/R/SB-FS
14 OKT 24

PUSAT STUDI MATEMATIKA DAN MASYARAKAT
DAN
HIMPUNAN MAHASISWA PROGRAM STUDI MATEMATIKA
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

Judul Buku:

**Soal – Jawab Kompetisi Matematika UNPAR 2023
Babak Penyisihan, Perempat Final, dan Semifinal
Tingkat SMP**

Penulis:

**Pusat Studi Matematika dan Masyarakat
Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika**

Sampul:

Unpar Press

Tata Letak Isi:

Unpar Press

ISBN: 978-623-7879-62-6

Penerbit:

Unpar Press

Jalan Ciumbuleuit 100

Bandung 40141

Cetakan Pertama: 2024



DAFTAR ISI

Daftar Isi	iii
Kata Sambutan	iv
Prakata	v
Bab 1 – Babak Penyisihan SMP	1
Bab 2 – Babak Perempat Final SMP	31
Bab 3 – Babak Semifinal SMP	65

KATA SAMBUTAN

Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan sudah menjadi kegiatan tahunan hasil kerja sama Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan Jurusan Matematika sejak lebih dari dua puluh tahun yang lalu. Namun, sampai dengan tahun 2022 yang lalu, soal-soal Kompetisi Matematika selalu dirahasiakan dan tidak pernah dipublikasikan secara resmi. Akibatnya, sudah sejak lama panitia Kompetisi Matematika menerima masukan dari para peserta dan guru pendamping supaya soal-soal Kompetisi Matematika dapat dipublikasikan sebagai bahan belajar bagi para calon peserta kompetisi di tahun-tahun selanjutnya.

Oleh karena itu, Program Studi Matematika menyambut dengan baik peluncuran buku soal-solusi pertama ini. Program Studi Matematika mengapresiasi inisiatif dari Pusat Studi Matematika dan Masyarakat untuk mengadakan kerja sama dengan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan UNPAR PRESS, untuk penerbitan buku soal-solusi Kompetisi Matematika tingkat SMP dan SMA, yang diharapkan dapat dilanjutkan secara konsisten dari tahun ke tahun.

Program Studi Matematika mengharapakan supaya buku soal-solusi ini dapat mencapai tujuannya dengan baik, yaitu sebagai luaran tahunan dari Pusat Studi Matematika dan Masyarakat, serta sebagai referensi bagi para calon peserta Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan di tahun-tahun selanjutnya, bagi para calon peserta kompetisi-kompetisi matematika lainnya, maupun bagi siapa saja yang tertarik dengan matematika.

Bandung, Juni 2024

Jonathan Hoseana, Ph.D.
Ketua Program Studi
Sarjana Matematika

PRAKATA

Tak terasa Kompetisi Matematika UNPAR telah terselenggara sejak tahun 2003, artinya sudah 20 tahun kami ikut serta meningkatkan minat siswa-siswi untuk berkompetisi yang sehat. Sering kali soal-soal pada Kompetisi Matematika UNPAR ini baru pertama kali ditemui oleh siswa-siswi ini dan menumbuhkan keingintahuan yang lebih lanjut.

Untuk meningkatkan transparansi kompetisi, pada tahun 2023 panitia Kompetisi Matematika UNPAR menginisiasi menu bank soal yang dapat dibuka pada laman

<https://www.komat-unpar.com/bank-soal>.

Pada laman tersebut, soal-soal dari semua babak Kompetisi Matematika, baik tingkat SMP maupun tingkat SMA, tersedia untuk diunduh secara gratis. Sebagai pelengkap bagi bank soal tersebut, Pusat Studi Matematika dan Masyarakat menginisiasi kerja sama dengan UNPAR PRESS dan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika untuk menuliskan, menerbitkan, dan memasarkan pembahasan lengkap dari soal-soal tersebut dalam bentuk buku.

Dalam buku yang pertama untuk tingkat SMP ini, tersedia semua soal beserta solusi lengkap dari babak penyisihan, perempat final, dan semifinal Kompetisi Matematika UNPAR 2023 tingkat SMP. Hanya untuk babak-babak inilah solusi resmi dari semua soal dibuat oleh panitia dan oleh tim penilai, untuk keperluan pemeriksaan dan penilaian. Di lain pihak, untuk babak final, solusi resmi biasanya tidak dibuat, sebab soal-soal babak final dimaksudkan supaya bersifat terbuka, dan penilaian para juri didasarkan langsung pada jawaban-jawaban yang dipresentasikan oleh para peserta dan kemampuan para peserta menjawab pertanyaan-pertanyaan para juri.

Keberhasilan penerbitan buku ini tentu saja tidak terlepas dari bantuan banyak pihak, yang kepadanya Pusat Studi mengucapkan terima kasih. Pertama, Pusat Studi mengucapkan terima kasih kepada UNPAR PRESS dan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika yang telah bersedia menerima ajakan kerja sama. Selain itu, Pusat Studi mengucapkan terima kasih kepada:

- segenap panitia Kompetisi Matematika UNPAR 2023, dengan ketua Gracia Stephanie dan wakil ketua Kevin Putra Pratama, khususnya divisi materi yang terdiri dari Clarissa Tania Tunggal sebagai koordinator, Jason sebagai wakil koordinator, serta

Kevin Tang, Nicholas Saputra Wibisono, Jonathan Soelistyo, Justin Ryan Pangestu, Verren Sen Riyanti, dan Wynona Aurelie sebagai anggota-anggotanya;

- dosen pendamping Kompetisi Matematika UNPAR 2023, yaitu Jonathan Hoseana;
- para dosen yang telah membuat dan memeriksa soal, yaitu Agus Sukmana, Andreas Parama Wijaya, Arfin, Benny Yong, Daniel Salim, Dharma Lesmono, Erwinna Chendra, Farah Kristiani, Felivia Kusnadi, Ferry Jaya Permana, Iwan Sugiarto, Liem Chin, Livia Owen, Maria Anastasia, Oriza Stepanus, Rizky Reza Fauzi, Robby, Robyn Irawan, Taufik Limansyah, dan Wono Setya Budhi;
- beberapa mahasiswa non-panitia yang secara sukarela membantu pemeriksaan dan pengetikan soal dan solusi penyisihan dan perempat final untuk dimuat dalam buku ini, yaitu Paul Taniwan, Jovan Brian Tanujaya, Arisnaufal Malik, dan Muhammad Ichsan Kurniawan;
- Kevin Mandira Limanta, yang telah memberikan masukan mengenai beberapa soal.

Akhir kata, semoga buku ini bermanfaat.

Bandung, Maret 2024

Dr. Livia Owen
Ketua Pusat Studi
Matematika dan Masyarakat

BAB 1

BABAK PENYISIHAN SMP

Pilihan Ganda

1. Terdapat tiga kotak yang berisi cokelat. Banyaknya cokelat pada kotak pertama adalah 10 kali banyaknya cokelat pada kotak ketiga, sedangkan banyaknya cokelat pada kotak ketiga adalah 50 kurangnya dari banyaknya cokelat pada kotak kedua. Jika total banyaknya cokelat adalah 122, maka selisih banyaknya cokelat pada kotak pertama dan kedua adalah ...

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

Jawab: D

Misalkan banyaknya cokelat pada kotak pertama, kedua, dan ketiga masing-masing adalah a , b , dan c . Dengan demikian,

$$\begin{cases} a + b + c = 122, \\ a = 10c, \\ c = b - 50. \end{cases}$$

Dari persamaan kedua diperoleh $b = c + 50$. Substitusikan persamaan ini dan persamaan kedua ke persamaan pertama, diperoleh

$$10c + (c + 50) + c = 122, \quad \text{sehingga} \quad c = \frac{122 - 50}{10 + 1 + 1} = 6.$$

Dengan demikian, $a = 10 \cdot 6 = 60$ dan $b = 6 + 50 = 56$. Jadi, selisih banyaknya cokelat pada kotak pertama dan kedua adalah $a - b = 60 - 56 = 4$.

2. Pertidaksamaan $5x - 3a > \frac{2x - 3}{3} + \frac{5ax}{4}$ memiliki penyelesaian $x > 7$. Nilai dari a adalah ...

(a) $\frac{8}{3}$

(b) $\frac{3}{8}$

(c) $\frac{7}{3}$

(d) $\frac{3}{7}$

Jawab: A

Pertidaksamaan tersebut ekuivalen dengan

$$\left(5 - \frac{2}{3} - \frac{5}{4}a\right)x > 3a - 1, \quad \text{yaitu} \quad (52 - 15a)x > 36a - 12.$$

Karena penyelesaiannya adalah $x > 7$, maka haruslah

$$\frac{36a - 12}{52 - 15a} = 7, \quad \text{sehingga} \quad 36a - 12 = 364 - 105a.$$

Dari sini diperoleh $a = (364 + 12)/(36 + 105) = 8/3$.

3. Misalkan fungsi $f(x) = ax + b$ memenuhi $f(-10) = -22$ dan $f(3) = 17$. Nilai dari $f(5)$ adalah ...

(a) 21

(b) 23

(c) 25

(d) 27

Jawab: B

Misalkan $f(x) = ax + b$. Karena $f(-10) = -22$ dan $f(3) = 17$, maka diperoleh sistem persamaan

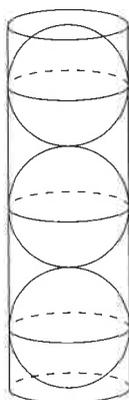
$$\begin{cases} -10a + b = -22, \\ 3a + b = 17. \end{cases}$$

Kurangkan kedua persamaan di atas, diperoleh

$$-13a = -39, \quad \text{sehingga} \quad a = 3.$$

Substitusikan hasil ini ke persamaan kedua, diperoleh $b = 17 - 3 \cdot 3 = 8$. Artinya, $f(x) = 3x + 8$. Jadi, $f(5) = 3 \cdot 5 + 8 = 23$.

4. Perhatikan gambar berikut.



Sebuah tabung yang berisi penuh air memiliki diameter tabung 24 cm. Ke dalam tabung tersebut dimasukkan 3 bola pejal yang identik (sama bentuk), sehingga bola-bola tersebut menyinggung sisi-sisi tabung dan saling bersinggungan satu sama lain, serta sebagian air dalam tabung keluar. Volume sisa air di dalam tabung adalah ...

- (a) $3456\pi \text{ cm}^3$ (b) $5760\pi \text{ cm}^3$ (c) $6912\pi \text{ cm}^3$ (d) $8640\pi \text{ cm}^3$

Jawab: A

Karena diameter tabung adalah 24 cm, maka jari-jari tabung dan jari-jari masing-masing bola adalah 12 cm, sedangkan tinggi tabung adalah $24 + 24 + 24 = 72$ cm. Dengan demikian, volume tabung adalah $\pi \cdot 12^2 \cdot 72 \text{ cm}^3$ dan jumlah volume ketiga bola adalah $3 \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot 12^3 = \pi \cdot 12^2 \cdot 48 \text{ cm}^3$, sehingga volume sisa air dalam tabung adalah

$$\pi \cdot 12^2 \cdot 72 - \pi \cdot 12^2 \cdot 48 = \pi \cdot 12^2 \cdot 24 \cdot (3 - 2) = 3456\pi \text{ cm}^3.$$

5. Rata-rata nilai peserta KOMAT 2023 sama dengan banyaknya peserta yang hadir. Karena terjadi tindakan kecurangan, terdapat tiga peserta yang didiskualifikasi. Ketiga peserta tersebut masing-masing memiliki nilai 85. Setelah ketiga peserta tersebut didiskualifikasi, rata-rata nilai peserta tetap sama dengan banyaknya peserta yang tersisa. Banyaknya peserta yang hadir sebelum terjadi diskualifikasi adalah ...

- (a) 40 (b) 42 (c) 44 (d) 46

Jawab: C

Misalkan S adalah hasil penjumlahan nilai semua peserta sebelum terjadi diskualifikasi, dan x adalah banyaknya peserta yang hadir sebelum terjadi diskualifikasi. Karena rata-rata nilai peserta adalah S/n , maka diperoleh persamaan

$$\frac{S}{n} = n, \quad \text{sehingga} \quad S = n^2.$$

Setelah tiga peserta dengan nilai masing-masing 85 didiskualifikasi, diperoleh persamaan

$$\frac{S - 3 \cdot 85}{n - 3} = n - 3, \quad \text{yaitu} \quad n^2 - 255 = (n - 3)^2.$$

Persamaan ini ekuivalen dengan $6n = 264$, sehingga $n = 44$.

6. Jarak pada peta dari UNPAR ke Gedung Sate adalah 3 cm, dari Gedung Sate ke PVJ 6 cm, dari UNPAR ke ITB 3 cm, dan dari ITB ke PVJ 4 cm. Darto berkendara dari UNPAR ke PVJ melewati Gedung Sate, dan Darko berkendara dari UNPAR ke PVJ melewati ITB. Asumsikan bahwa jalan dari UNPAR ke Gedung Sate, Gedung Sate ke PVJ, UNPAR ke ITB, dan ITB ke Gedung Sate semuanya lurus. Jika peta tersebut mempunyai skala 1 : 2.500.000, maka selisih jarak tempuh yang dilalui Darto dan Darko adalah ...

(a) 5 km (b) 25 km (c) 50 km (d) 35 km

Jawab: C

Di peta, jarak tempuh dari UNPAR ke PVJ melalui Gedung Sate adalah $3 + 6 = 9$ cm, sedangkan jarak tempuh dari UNPAR ke PVJ melalui ITB adalah $3 + 4 = 7$ cm. Selisih kedua jarak tempuh di peta itu adalah $9 - 7 = 2$ cm. Dengan demikian, selisih kedua jarak tempuh sebenarnya adalah $2 \cdot 2.500.000 = 5.000.000$ cm, yaitu 50 km.

7. Digit terakhir dari hasil $1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$ adalah ...

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Jawab: D

Karena $5!$, $6!$, ..., $2023!$ semuanya memiliki digit terakhir 0, maka digit terakhir dari hasil $1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$ sama saja dengan digit terakhir dari hasil $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$, yaitu 3.

8. Sebuah kotak berisi 55 bola yang terdiri dari bola-bola berwarna hitam, putih, dan merah. Perbandingan banyaknya bola putih dan hitam adalah 16 : 27, sedangkan perbandingan banyaknya bola merah dan hitam adalah 4 : 9. Jika seseorang mengambil dari kotak itu tiga bola sekaligus, maka peluang terambilnya dua bola putih dan satu bola merah adalah ...

(a) $\frac{1}{96}$ (b) $\frac{32}{583}$ (c) $\frac{1024}{6561}$ (d) $\frac{9216}{166375}$

Jawab: B

Misalkan banyaknya bola hitam, putih, dan merah masing-masing adalah h , p , dan m . Diketahui bahwa $p/h = 16/27$, sehingga $p = (16/27)h$, dan $m/h = 4/9$, sehingga $m = (4/9)h$. Dengan demikian,

$$55 = h + p + m = h + \frac{16}{27}h + \frac{4}{9}h = \frac{55}{27}h,$$

sehingga $h = 27$. Akibatnya, $p = (16/27) \cdot 27 = 16$ dan $m = (4/9) \cdot 27 = 12$. Oleh karena itu, peluang yang dimaksud adalah

$$\frac{\binom{16}{2} \binom{12}{1}}{\binom{55}{3}} = \frac{32}{583}.$$

9. Bilangan kawaii adalah bilangan asli empat digit yang terdiri dari dua angka berbeda yang dituliskan berselang-seling. Sebagai contoh, 2323 dan 9595 merupakan bilangan kawaii, tetapi 1111 dan 4774 bukan bilangan kawaii. Banyaknya bilangan kawaii yang bersisa 1 bila dibagi 5 adalah ...

- (a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16

Jawab: D

Bilangan kawaii yang bersisa 1 bila dibagi 5 adalah yang digit terakhirnya 1 atau 6.

- Yang digit terakhirnya 1 adalah yang berbentuk $\overline{x1x1}$, di mana $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ada 8 bilangan yang berbentuk seperti ini.
- Yang digit terakhirnya 6 adalah yang berbentuk $\overline{x6x6}$, di mana $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$. Ada 8 bilangan yang berbentuk seperti ini.

Jadi, banyaknya bilangan kawaii yang bersisa 1 bila dibagi 5 adalah $8 + 8 = 16$.

"Dalam buku Soal-Jawab Kompetisi Matematika untuk tingkat SMP ini, tersedia semua soal beserta solusi lengkap dari babak penyisihan, perempat final, dan semifinal Kompetisi Matematika UNPAR 2023 tingkat SMP. Hanya untuk babak-babak inilah solusi resmi dari semua soal dibuat oleh panitia dan oleh tim penilai, untuk keperluan pemeriksaan dan penilaian." - *Dr. Livia Owen, Ketua Pusat Studi Matematika dan Masyarakat.*

"Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan sudah menjadi kegiatan tahunan hasil kerja sama Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan Jurusan Matematika sejak lebih dari dua puluh tahun yang lalu. Program Studi Matematika menyambut dengan baik peluncuran buku soal-solusi ini. Program Studi Matematika mengapresiasi inisiatif dari Pusat Studi Matematika dan Masyarakat untuk mengadakan kerja sama dengan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan UNPAR PRESS, untuk penerbitan buku soal-solusi Kompetisi Matematika tingkat SMP dan SMA, yang diharapkan dapat dilanjutkan secara konsisten dari tahun ke tahun." - *Jonathan Hoseana, Ph.D., Ketua Program Studi Sarjana Matematika.*



PERPUSTAKAAN UNPAR



000000147132

ISBN 978-623-7879-62-6



9 786237

879626



Jalan Ciumbuleuit 100
Bandung 40141
unparpress@unpar.ac.id