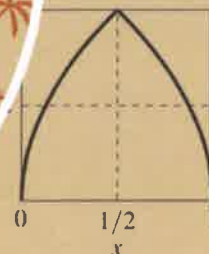
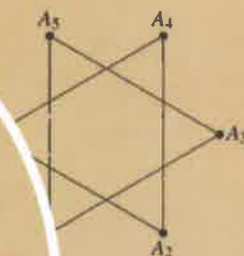
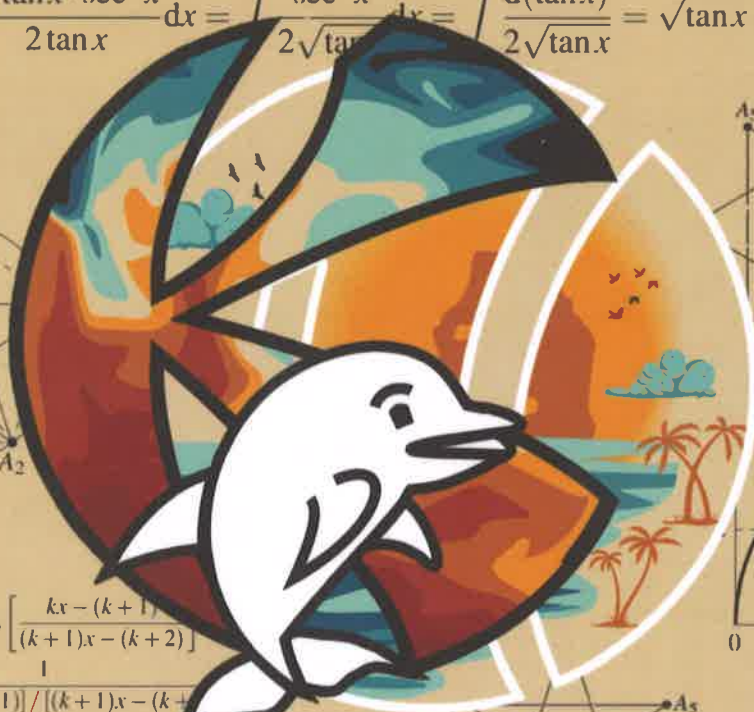
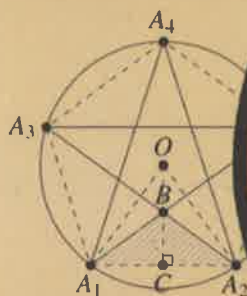
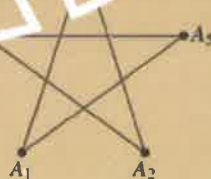


Soal-Jawab Kompetisi Matematika UNPAR 2023 Tingkat SMA

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin(2x)} dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{2 \sin x \cos x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} \cdot \frac{\sqrt{\tan x}}{2 \sin x \cos x} dx \\
 &= \int \frac{\sqrt{\tan x} \cdot \sec^2 x}{2 \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}} dx = \int \frac{d(\tan x)}{2\sqrt{\tan x}} = \sqrt{\tan x} + C
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(x) &= f_0(f_k(x)) = f_0 \left[\frac{kx - (k+1)}{(k+1)x - (k+2)} \right] \\
 &= \frac{2 - [kx - (k+1)] / [(k+1)x - (k+2)]}{1} \\
 &= \frac{2[(k+1)x - (k+2)] - [kx - (k+1)]}{(k+2)x - (k+3)}
 \end{aligned}$$



076

VI

R/SB

**Pusat Studi Matematika dan Masyarakat
dan
Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika
Universitas Katolik Parahyangan**

SOAL-JAWAB

KOMPETISI MATEMATIKA UNPAR

2023

Babak Penyisihan, Perempat Final, dan Semifinal

Tingkat SMA



510.076

UNI

S

147131 / R/SB-F5

14-10-24

PUSAT STUDI MATEMATIKA DAN MASYARAKAT
DAN
HIMPUNAN MAHASISWA PROGRAM STUDI MATEMATIKA
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

Judul Buku:

**Soal – Jawab Kompetisi Matematika UNPAR 2023
Babak Penyisihan, Perempat Final, dan Semifinal
Tingkat SMA**

Penulis:

**Pusat Studi Matematika dan Masyarakat
Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika**

Sampul:

Unpar Press

Tata Letak Isi:

Unpar Press

ISBN: 978-623-7879-61-9

Penerbit:

Unpar Press

Jalan Ciumbuleuit 100

Bandung 40141

Cetakan Pertama: 2024



DAFTAR ISI

Daftar Isi	iii
Kata Sambutan	iv
Prakata	v
Bab 1 – Babak Penyisihan SMA	1
Bab 2 – Babak Perempat Final SMA	36
Bab 3 – Babak Semifinal SMA	77

KATA SAMBUTAN

Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan sudah menjadi kegiatan tahunan hasil kerja sama Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan Jurusan Matematika sejak lebih dari dua puluh tahun yang lalu. Namun, sampai dengan tahun 2022 yang lalu, soal-soal Kompetisi Matematika selalu dirahasiakan dan tidak pernah dipublikasikan secara resmi. Akibatnya, sudah sejak lama panitia Kompetisi Matematika menerima masukan dari para peserta dan guru pendamping supaya soal-soal Kompetisi Matematika dapat dipublikasikan sebagai bahan belajar bagi para calon peserta kompetisi di tahun-tahun selanjutnya.

Oleh karena itu, Program Studi Matematika menyambut dengan baik peluncuran buku soal-solusi pertama ini. Program Studi Matematika mengapresiasi inisiatif dari Pusat Studi Matematika dan Masyarakat untuk mengadakan kerja sama dengan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan UNPAR PRESS, untuk penerbitan buku soal-solusi Kompetisi Matematika tingkat SMP dan SMA, yang diharapkan dapat dilanjutkan secara konsisten dari tahun ke tahun.

Program Studi Matematika mengharapkan supaya buku soal-solusi ini dapat mencapai tujuannya dengan baik, yaitu sebagai luaran tahunan dari Pusat Studi Matematika dan Masyarakat, serta sebagai referensi bagi para calon peserta Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan di tahun-tahun selanjutnya, bagi para calon peserta kompetisi-kompetisi matematika lainnya, maupun bagi siapa saja yang tertarik dengan matematika.

Bandung, Juni 2024

Jonathan Hoseana, Ph.D.
Ketua Program Studi
Sarjana Matematika

PRAKATA

Tak terasa Kompetisi Matematika UNPAR telah terselenggara sejak tahun 2003, artinya sudah 20 tahun kami ikut serta meningkatkan minat siswa-siswi untuk berkompetisi yang sehat. Sering kali soal-soal pada Kompetisi Matematika UNPAR ini baru pertama kali ditemui oleh siswa-siswi ini dan menumbuhkan keingintahuan yang lebih lanjut.

Untuk meningkatkan transparansi kompetisi, pada tahun 2023 panitia Kompetisi Matematika UNPAR menginisiasi menu bank soal yang dapat dibuka pada laman

<https://www.komat-unpar.com/bank-soal>.

Pada laman tersebut, soal-soal dari semua babak Kompetisi Matematika, baik tingkat SMP maupun tingkat SMA, tersedia untuk diunduh secara gratis. Sebagai pelengkap bagi bank soal tersebut, Pusat Studi Matematika dan Masyarakat menginisiasi kerja sama dengan UNPAR PRESS dan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika untuk menuliskan, menerbitkan, dan memasarkan pembahasan lengkap dari soal-soal tersebut dalam bentuk buku.

Dalam buku yang pertama untuk tingkat SMA ini, tersedia semua soal beserta solusi lengkap dari babak penyisihan, perempat final, dan semifinal Kompetisi Matematika UNPAR 2023 tingkat SMA. Hanya untuk babak-babak inilah solusi resmi dari semua soal dibuat oleh panitia dan oleh tim penilai, untuk keperluan pemeriksaan dan penilaian. Di lain pihak, untuk babak final, solusi resmi biasanya tidak dibuat, sebab soal-soal babak final dimaksudkan supaya bersifat terbuka, dan penilaian para juri didasarkan langsung pada jawaban-jawaban yang dipresentasikan oleh para peserta dan kemampuan para peserta menjawab pertanyaan-pertanyaan para juri.

Keberhasilan penerbitan buku ini tentu saja tidak terlepas dari bantuan banyak pihak, yang kepadanya Pusat Studi mengucapkan terima kasih. Pertama, Pusat Studi mengucapkan terima kasih kepada UNPAR PRESS dan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika yang telah bersedia menerima ajakan kerja sama. Selain itu, Pusat Studi mengucapkan terima kasih kepada:

- segenap panitia Kompetisi Matematika UNPAR 2023, dengan ketua Gracia Stephanie dan wakil ketua Kevin Putra Pratama, khususnya divisi materi yang terdiri dari Clarissa Tania Tunggal sebagai koordinator, Jason sebagai wakil koordinator, serta

Kevin Tang, Nicholas Saputra Wibisono, Jonathan Soelistyo, Justin Ryan Pangestu, Verren Sen Riyanti, dan Wynona Aurelie sebagai anggota-anggotanya;

- dosen pendamping Kompetisi Matematika UNPAR 2023, yaitu Jonathan Hoseana;
- para dosen yang telah membuat dan memeriksa soal, yaitu Agus Sukmana, Andreas Parama Wijaya, Arfin, Benny Yong, Daniel Salim, Dharma Lesmono, Erwinna Chendra, Farah Kristiani, Felivia Kusnadi, Ferry Jaya Permana, Iwan Sugiarto, Liem Chin, Livia Owen, Maria Anastasia, Oriza Stepanus, Rizky Reza Fauzi, Robby, Robyn Irawan, Taufik Limansyah, dan Wono Setya Budhi;
- beberapa mahasiswa non-panitia yang secara sukarela membantu pemeriksaan dan pengetikan soal dan solusi penyisihan dan perempat final untuk dimuat dalam buku ini, yaitu Paul Taniwan, Jovan Brian Tanujaya, Arisnaufal Malik, dan Muhammad Ichsan Kurniawan;
- Kevin Mandira Limanta, yang telah memberikan masukan mengenai beberapa soal.

Akhir kata, semoga buku ini bermanfaat.

Bandung, Maret 2024

Dr. Livia Owen
Ketua Pusat Studi
Matematika dan Masyarakat

2. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$\left(\frac{2}{2x^2+9}\right) \log\left(\frac{x}{17}\right) > 1$$

adalah ...

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ (d) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$ (e) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 5\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\}$

Jawab: B

Pertama, haruslah $x/17 > 0$, yaitu $x > 0$. Untuk setiap $x > 0$, berlaku $0 < 2/(2x^2+9) < 1$. Karena fungsi logaritma dengan basis positif kurang dari 1 bersifat monoton turun, maka pertidaksamaan pada soal, yaitu

$$\left(\frac{2}{2x^2+9}\right) \log\left(\frac{x}{17}\right) > \left(\frac{2}{2x^2+9}\right) \log\left(\frac{2}{2x^2+9}\right),$$

terpenuhi jika dan hanya jika

$$\frac{x}{17} < \frac{2}{2x^2+9},$$

yaitu

$$0 > \frac{x}{17} - \frac{2}{2x^2+9} = \frac{2x^3+9x-34}{17(2x^2+9)} = \frac{(x-2)(2x^2+4x+17)}{17(2x^2+9)}.$$

Karena $2x^2+4x+17 = 2(x+1)^2+15 > 0$ dan $2x^2+9 > 0$, maka pertidaksamaan tersebut dipenuhi jika dan hanya jika $x-2 < 0$, yaitu $x < 2$. Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan pada soal adalah $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$.

3. Banyaknya bilangan kuadrat sempurna x yang memenuhi pertidaksamaan

$$6x+25+\frac{98}{x-4} \leq 0$$

adalah ...

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Jawab: B

Pertidaksamaan tersebut ekuivalen dengan

$$0 \geq 6x + 25 + \frac{98}{x-4} = \frac{6x^2 + x - 2}{x-4} = \frac{(3x+2)(2x-1)}{x-4},$$

yang dipenuhi jika dan hanya jika $x \in (-\infty, -2/3] \cup [1/2, 4)$. Bilangan kuadrat sempurna x yang termuat dalam himpunan $(-\infty, -2/3] \cup [1/2, 4)$ hanyalah 1. Jadi, banyaknya bilangan kuadrat sempurna x yang memenuhi pertidaksamaan pada soal adalah 1.

4. Jika a , b , dan c adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi

$$\begin{cases} 4a^2 + 4b + 7 = 0, \\ b^2 - 12c + 4 = 0, \\ 9c^2 - 4a - 2 = 0, \end{cases}$$

maka nilai dari $2000a^{b^2} + 23c^2$ adalah ...

(a) $\frac{1207}{9}$ (b) $\frac{1217}{9}$ (c) $\frac{1227}{9}$ (d) $\frac{1237}{9}$ (e) $\frac{1247}{9}$

Jawab: B

Jumlahkan semua persamaan pada soal, diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= 4a^2 + 4b + b^2 - 12c + 9c^2 - 4a + 9 \\ &= 4a^2 - 4a + 1 + b^2 + 4b + 4 + 9c^2 - 12c + 4 \\ &= (2a - 1)^2 + (b + 2)^2 + (3c - 2)^2, \end{aligned}$$

sehingga haruslah $2a - 1 = b + 2 = 3c - 2 = 0$, yang artinya $a = 1/2$, $b = -2$, dan $c = 2/3$. Jadi,

$$\begin{aligned} 2000a^{b^2} + 23c^2 &= 2000 \left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)^2} + 23 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2000 \cdot \frac{1}{16} + 23 \cdot \frac{4}{9} = 125 + \frac{92}{9} \\ &= \frac{1217}{9}. \end{aligned}$$

5. Misalkan $x > 0$ dan $x \neq \frac{1}{3}$. Deret geometri tak berhingga

$$1 + {}^{3x}\log 5 + {}^{3x}\log^2 5 + \dots$$

konvergen jika dan hanya jika ...

(a) $0 < x < \frac{1}{15}$ atau $x > 5$

(d) $0 < x < \frac{1}{15}$ atau $x > 3$

(b) $0 < x < \frac{1}{3}$ atau $x > 5$

(e) $0 < x < \frac{1}{3}$ atau $x > 3$

(c) $0 < x < \frac{1}{15}$ atau $x > \frac{5}{3}$

Jawab: C

Deret tersebut konvergen jika dan hanya jika $|^{3x}\log 5| < 1$, yaitu jika dan hanya jika $^{3x}\log 5 > -1$ dan $^{3x}\log 5 < 1$. Kedua pertidaksamaan ini masing-masing dapat dituliskan sebagai $^{3x}\log 5 > ^{3x}\log[1/(3x)]$ dan $^{3x}\log 5 < ^{3x}\log 3x$. Ada dua kasus.

Kasus 1: $x \in (0, 1/3)$. Dalam kasus ini, $3x \in (0, 1)$. Karena fungsi logaritma dengan basis positif kurang dari 1 bersifat monoton turun, maka pertidaksamaan $^{3x}\log 5 > ^{3x}\log[1/(3x)]$ dan $^{3x}\log 5 < ^{3x}\log 3x$ terpenuhi jika dan hanya jika $5 < 1/(3x)$ dan $5 > 3x$. Kedua pertidaksamaan ini terpenuhi jika dan hanya jika $x \in (0, 1/15)$ dan $x \in (-\infty, 5/3)$. Oleh karena itu, semua x yang memenuhi dalam kasus ini adalah $x \in ((0, 1/15) \cap (-\infty, 5/3) \cap (0, 1/3)) = (0, 1/15)$.

Kasus 2: $x \in (1/3, \infty)$. Dalam kasus ini, $3x \in (1, \infty)$. Karena fungsi logaritma dengan basis lebih dari 1 bersifat monoton naik, maka pertidaksamaan $^{3x}\log 5 > ^{3x}\log[1/(3x)]$ dan $^{3x}\log 5 < ^{3x}\log 3x$ terpenuhi jika dan hanya jika $5 > 1/(3x)$ dan $5 < 3x$. Kedua pertidaksamaan ini terpenuhi jika dan hanya jika $x \in (-\infty, 0) \cup (1/15, \infty)$ dan $x \in (5/3, \infty)$. Oleh karena itu, semua x yang memenuhi dalam kasus ini adalah $x \in (((-\infty, 0) \cup (1/15, \infty)) \cap (5/3, \infty)) \cap (1/3, \infty) = (5/3, \infty)$.

Jadi, deret tersebut konvergen jika dan hanya jika $x \in (0, 1/15) \cup (5/3, \infty)$, yaitu jika dan hanya jika $0 < x < 1/15$ atau $x > 5/3$.

6. Banyaknya akar real dari polinomial $20x^{2023} - 7x^{2022} - 20x^5 + 7x^4$ adalah ...

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Jawab: E

Karena

$$\begin{aligned} 20x^{2023} - 7x^{2022} - 20x^5 + 7x^4 &= x^4 (20x^{2019} - 7x^{2018} - 20x + 7) \\ &= x^4 [x^{2018}(20x - 7) - (20x - 7)] \\ &= x^4 (x^{2018} - 1) (20x - 7) \\ &= x^4 (x^{1009} - 1) (x^{1009} + 1) (20x - 7), \end{aligned}$$

maka akar-akar dari polinomial tersebut adalah pembuat-pembuat nol dari x^4 , $x^{1009} - 1$, $x^{1009} + 1$, dan $20x - 7$, yang masing-masing adalah 0, 1, -1, dan $7/20$. Oleh karena itu, banyaknya akar real dari polinomial tersebut adalah 4.

7. Diketahui bilangan-bilangan real positif a, b, c, d, e, f yang memenuhi $37a^2 + 42b^2 + 47c^2 + 22d^2 + 17e^2 + 10f^2 = 7$. Nilai maksimum dari $37a + 42b + 47c + 22d + 17e + 10f$ adalah ...

- (a) 25 (b) 30 (c) 35 (d) 40 (e) 45

Jawab: C

Dengan menggunakan ketidaksamaan QM-AM untuk 175 bilangan yang terdiri dari 37 bilangan a , 42 bilangan b , 47 bilangan c , 22 bilangan d , 17 bilangan e , dan 10 bilangan f , diperoleh

$$\sqrt{\frac{37a^2 + 42b^2 + 47c^2 + 22d^2 + 17e^2 + 10f^2}{175}} \geq \frac{37a + 42b + 47c + 22d + 17e + 10f}{175},$$

yaitu

$$37a + 42b + 47c + 22d + 17e + 10f \leq 175 \sqrt{\frac{7}{175}} = 35,$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika 175 bilangan itu sama, yaitu $a = b = c = d = e = f = x$, yang artinya $7 = 37x^2 + 42x^2 + 47x^2 + 22x^2 + 17x^2 + 10x^2 = 175x^2$, sehingga $x = 1/5$. Oleh karena itu, nilai maksimum dari $37a + 42b + 47c + 22d + 17e + 10f$ adalah 35.

8. Hasil dari

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 2024 & -2023 \\ 2023 & -2022 \end{bmatrix}$$

adalah ...

(a) $\begin{bmatrix} 2043232 & -2043231 \\ 2043231 & -2043230 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2049301 & -2049300 \\ 2049300 & -2049299 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2045254 & -2045253 \\ 2045253 & -2045252 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2051326 & -2051325 \\ 2051325 & -2051324 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2047277 & -2047276 \\ 2047276 & -2047275 \end{bmatrix}$

"Dalam buku Soal-Jawab Kompetisi Matematika untuk tingkat SMA ini, tersedia semua soal beserta solusi lengkap dari babak penyisihan, perempat final, dan semifinal Kompetisi Matematika UNPAR 2023 tingkat SMA. Hanya untuk babak-babak inilah solusi resmi dari semua soal dibuat oleh panitia dan oleh tim penilai, untuk keperluan pemeriksaan dan penilaian." - *Dr. Livia Owen, Ketua Pusat Studi Matematika dan Masyarakat.*

"Kompetisi Matematika Universitas Katolik Parahyangan sudah menjadi kegiatan tahunan hasil kerja sama Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan Jurusan Matematika sejak lebih dari dua puluh tahun yang lalu. Program Studi Matematika menyambut dengan baik peluncuran buku soal-solusi ini. Program Studi Matematika mengapresiasi inisiatif dari Pusat Studi Matematika dan Masyarakat untuk mengadakan kerja sama dengan Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika dan UNPAR PRESS, untuk penerbitan buku soal-solusi Kompetisi Matematika tingkat SMP dan SMA, yang diharapkan dapat dilanjutkan secara konsisten dari tahun ke tahun." - *Jonathan Hoseana, Ph.D., Ketua Program Studi Sarjana Matematika.*



Jalan Ciumbuleuit 100
Bandung 40141
unparpress@unpar.ac.id

