# MAKALAH

# SOLUSI DERET PANGKAT
# PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-n

**Disusun oleh :**

**Iwan Sugiarto, SSi, MSi**

Januari 2004
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Katolik Parahyangan
Bandung

# SOLUSI DERET PANGKAT
# PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-n

Oleh : Iwan Sugiarto

## 1. Pendahuluan

Tinjau persamaan diferensial linier orde-n dengan koefisien variabel :

$$p_N(t)y^{(N)}(t)+p_{N-1}(t)y^{(N-1)}(t)+\ldots+p_0(t)y(t)=f(t)$$

dengan $p_N(t_0)\neq 0$.

Tak asing lagi bagi kita untuk menentukan solusi persamaan diferensial di atas dengan menggunakan metode deret pangkat. Di sini akan dikaji ulang bagaimana proses pencariannya.

## 2. Landasan Teori

Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ mempunyai turunan ke- 1 , 2, 3, ...n .

Maka : $$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}. \qquad \text{....................(2.1)}$$

Formula ini dikenal sebagai formula *Binomial Leibniz* untuk turunan.

Untuk n = 1: $(fg)'=f\,g'+f'g$.

Untuk n = 2: $(fg)''=\binom{2}{0}f\,g''+\binom{2}{1}f'g'+\binom{2}{2}f''g=f\,g''+2f'g'+f''g$

Untuk n = 3: $(fg)'''=\binom{3}{0}f\,g'''+\binom{3}{1}f'g''+\binom{3}{2}f''g'+\binom{3}{3}f'''g$

$$=f\,g'''+3f'g''+3f''g'+f'''g$$

dan seterusnya.

Definisikan: $P=(p_N(t),p_{N-1}(t),\ldots,p_0(t))$ dan $Y=(y^{(N)}(t),y^{N-1}(t),\ldots,y(t))$,

dengan $p_i(t)$ memiliki turunan ke – 1,2,...n , untuk $i=0,1,2,..,N$ .

Maka: $$(P.Y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}.\, Y^{(n-k)}. \qquad \text{..................(2.2)}$$

Untuk n = 1 : $(P.\,Y)' = P.\,Y' + P'.\,Y$

Untuk n = 2 : $(P.\,Y)'' = P.\,Y'' + 2P'.\,Y' + P''.\,Y$

dan seterusnya.

Formula (2.2) mirip dengan formula (2.1) , dimana perkalian biasa digantikan dengan hasil kali titik.

## 3. Solusi Deret Pangkat Persamaan Diferensial Linier Orde-n

Tinjau persamaan diferensial linier orde-n dengan koefisien variabel :

$$p_N(t)y^{(N)}(t) + p_{N-1}(t)y^{(N-1)}(t) + \ldots + p_0(t)y(t) = f(t) \qquad \text{..........(3.1)}$$

dengan $p_N(t_0) \neq 0$.

Definisikan : $P = (p_N(t), p_{N-1}(t), \ldots, p_0(t))$ dan $Y = (y^{(N)}(t), y^{N-1}(t), \ldots, y(t))$

dengan $p_i(t)$ memiliki turunan ke – 1,2,...n , untuk $i = 0,1,2,..,N$.

Jadi persamaan diferensial (3.1) dapat ditulis sebagai : $P.\,Y = f(t)$.

Asumsikan koefisien-koefisien $f(t)$ dan $p_k(t)$ dapat diekspansikan dalam deret pangkat yang konvergen di sekitar $t = t_0$ dengan jari –jari konvergensi positif dan $p_N(t_0) \neq 0$ ($t_0$ adalah titik ordinary persamaan diferensial ).

Tulislah: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}(t - t_0)^n$ , $p_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{(k,n)}}{n!}(t - t_0)^n$ ; $k = 0,1,2,\ldots,N$

dengan : $f_n = f^{(n)}(t_0)$, dan $p_{k,n} = p_k^{(n)}(t_0)$.

Misalkan $y(t)$ solusi persamaan diferensial (3.1) yang diekspansikan dalam deret

pangkat : $$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{n!}(t - t_0)^n \qquad \text{.....................(3.2)}$$

dengan syarat awal : $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(N-1)}(t_0) = y_{N-1}$ .

Maka : $y_N = \dfrac{-p_{(N-1,0)}y_{N-1} - \dots - p_{(0,0)}y_0 + f_0}{p_{(N,0)}}$.

Diferensialkan persamaan (3.1) sebanyak n kali dan terapkan formula (2.2), sehingga diperoleh :

$$p_{(N,o)}y_{N+n} + \sum_{k=1}^{N} p_{(N-k,0)}y_{N+n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_k.Y_{n-k} = f_n \quad \text{..............(3.3)}$$

Dari relasi rekursif (3.3) diperoleh solusi deret pangkat (3.2).

Contoh : Diberikan persamaan diferensial : $y''' + t^2 y'' + y' - y = t$ dengan syarat awal : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Perhatikan bahwa : $p_3(t) = 1$, $p_2(t) = t^2$, $p_1(t) = 1$, $p_0(t) = -1$, $f(t) = t$,

sehingga : $f_k = \begin{cases} 1 & ,k = 1 \\ 0 & ,k = 0,2,\dots,n \end{cases}$ $\qquad p_{0,k} = \begin{cases} -1 & ,k = 0 \\ 0 & ,k = 1,2,\dots,n \end{cases}$

$$p_{1,k} = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ 0 & ,k = 1,2,\dots,n \end{cases} \qquad p_{2,k} = \begin{cases} 2 & ,k = 2 \\ 0 & ,k = 0,1,3,\dots,n \end{cases}$$

$$p_{3,k} = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ 0 & ,k = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Diketahui : $y_0 = 0$ , $y_1 = 1$ , $y_2 = 1$, $y_3 = \dfrac{-p_{2,0}y_2 - p_{1,0}y_1 - p_{0,0}y_0 + f_0}{p_{3,0}} = -1$

Dengan menggunakan rumus (3.3), diperoleh :

$$y_{3+n} + y_{1+n} - y_n + n(n-1)y_n = f_n \ ,n \geq 1$$

sehingga : $y_4 = 1$, $y_5 = 0$, $y_6 = 4$, $y_7 = -11$, dst.

Jadi solusi persamaan diferensial : $y(t) = t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{4}{6!}t^6 - \frac{11}{7!}t^7 + \dots$

## 4. Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya, kita dapat menarik kesimpulan bahwa persamaan diferensial linear : $p_N(t)y^{(N)}(t) + p_{N-1}(t)y^{(N-1)}(t) + \dots + p_0(t)y(t) = f(t)$ , dengan

$p_N(t_0) \neq 0$, kita dapat menggunakan metode deret pangkat untuk menentukan solusinya.

## 5. Referensi


- [BOYCE & DIPRIMA-01] Wiliiam E. Boyce and Richard DiPrima, "*Elementary Differential Equation*", Seventh edition, John Wiley & Sons,Inc. , 2001.
- [BOYER & MERZBACH-89] Carl B.Boyer and Uta C. Merzbach , "*A History of Mathematics*", Second edition, John Wiley & Sons,Inc. , 1989.
- [BARTLE & SHERBERT-94] Robert G. Bartle & Donald R. Sherbert, "*Introduction to Real Analysis*", Second edition, John Wiley & Sons,Inc. , 1994.
- [GOLDBERG-76] Goldberg, Richard R., "*Methods of Real Analysis*", Second edition, John Wiley & Sons,Inc. , 1976.
- [MEZZINO & PINSKY-98] Michael Mezzino & Mark Pinsky, "*Leibniz's Formula, Cauchy Majorants, and Linear Differential Equations* ", Mathematics Magazine , Vol 71. No. 5, Desember 1994.