PERSAMAAN DIFERENSIAL TINGKAT SATU

disampaikan pada acara :
Penataran dan Penguasaan Bidang MIPA di Cisarua Bogor

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG
SEPTEMBER 1999

PERSAMAAN DIFERENSIAL TINGKAT SATU

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG
SEPTEMBER 1999

PERSAMAAN DIFERENSIAL TINGKAT SATU

1. Pendahuluan

Banyak masalah-masalah rekayasa dan terapan lainnya, seperti: masalah gerak partikel, rangkaian listrik, atau dinamika populasi, dirumuskan dalam bentuk model matematika yang melibatkan persamaan diferensial. *Persamaan diferensial* dapat diartikan sebagai persamaan yang mengandung fungsi tak diketahui dan turunannya. Fungsi tak diketahui tersebut dapat bergantung hanya pada satu peubah bebas atau pada lebih dari satu peubah bebas. Untuk kasus satu peubah bebas, persamaannya dikenal sebagai *persamaan diferensial biasa* , dan untuk kasus lainnya dikenal sebagai *persamaan diferensial parsial.*

Contoh persamaan diferensial biasa :

a. $2xy'' - 3xy' + 9 = 0$
b. $(y')^2 = 2 \cos x$
c. $3y''' - 2y'' + y' = e^x$

Contoh persamaan diferensial parsial :

a. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$
b. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Tingkat dari suatu persamaan diferensial adalah indeks turunan tertinggi yang terkait dengan persamaan diferensial . Pada contoh persamaan diferensial biasa di atas pada contoh a termasuk persamaan diferensial tingkat dua, pada contoh b termasuk persamaan diferensial tingkat satu, sedangkan pada contoh c termasuk persamaan diferensial tingkat tiga .

Persamaan diferensial dapat dituliskan sebagai suatu fungsi,

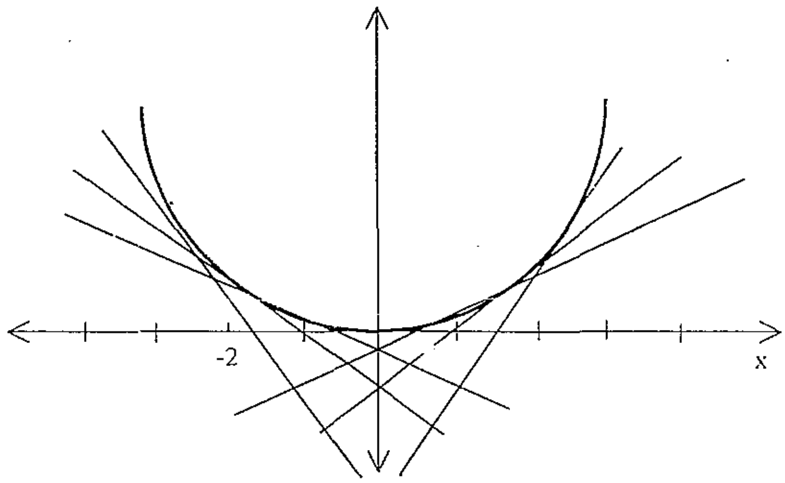
$$F(x,y,...,y^n) = 0 \quad \text{atau} \quad y^n = f(x,y, y',y'',...,y^{n-1})$$

dalam hal ini, y adalah fungsi yang tidak diketahui, atau solusi yang ingin dicari dari sebuah persamaan diferensial, dan y^n adalah turunan fungsi ke-n dari y. Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika F adalah fungsi linear dengan peubah $y,y',y'',...,y^{n-1}$. Bentuk umum persamaan diferensial biasa tingkat ke-n adalah

$$a_0(x)\, y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + ... + a_n(x)\, y = g(x)$$

sebagai contoh persamaan diferensial $2x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ adalah linear, tetapi persamaan diferensial $y''' + 2e^xy'' - yy' = x^2$ tak linear, karena terdapat suku yy'.

Ilustrasi : perhatikan persamaan diferensial $y'^2 - xy + y = 0$, melalui pengintegralan diperoleh persamaan $y = cx - c^2$ yang merupakan *solusi umum*. Jika nilai c diberikan untuk sebarang bilangan maka solusi umum tersebut akan menjadi *solusi khusus*. Seperti persamaan $y = x - 1$ adalah solusi khusus untuk persamaan diferensial di atas, jika c = 1. Selain solusi umum dan khusus, dikenal pula solusi singular yaitu solusi yang tidak dapat diperoleh dengan memberikan nilai tertentu bagi konstanta dalam solusi umum. Dari persamaan diferensial $(y')^2 - xy + y = 0$, akan diperoleh pula persamaan $y = x^2/4$ yang tidak dapat diperoleh dengan mensubtitusi konstanta dalam solusi umum, sebagaimana nampak dalam Gambar 1 berikut



Gambar 1. Solusi singular (berupa parabola) dan solusi khusus bagi $y'^2 - xy' + y = 0$

Tidak setiap persamaan diferensial memiliki solusi, sebagai contoh : $(y')^2 = -1$. Persamaan diferensial tersebut tidak memiliki solusi untuk setiap $y \in R$, karena $y' = -1$.

2. Metode Pemisahan Peubah

Bentuk umum persamaan diferensial ordo satu :

$y' = f(x,y)$ atau $F(x,y,y') = 0$

dapat direduksi menjadi :

$g(y)\, y' = f(x)$

atau $g(y)\, dy = f(x)\, dx$

kemudian kedua ruas diintegralkan, sehingga diperoleh :

$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx + C$

jika fungsi f dan g kontinu, maka kedua integral di atas pasti ada, dan solusi umumpun akan diperoleh.

<u>Contoh soal</u>

Diberikan persamaan diferensial : $yy' + x = 0$. Tentukan solusi umum persamaan diferensial !

<u>Jawab</u> :

$y\, dy/dx + x = 0$

$ydy = -xdx$, kedua ruas diintegralkan sehingga menjadi :

$\frac{1}{2} y^2 + C_1 = -\frac{1}{2} x^2 + C_2$

$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + C$

$y^2 = -x^2 + C$

Jadi solusi umum persamaan diferensial : $x^2 + y^2 = C$

3. Persamaan Diferensial Linear Tingkat Satu.

Persamaan diferensial tingkat satu dikatakan linear jika dapat ditulis dalam bentuk: $y' + p(x)\,y = q(x)$ ....(1)

Dimana p dan q kontinu pada daerah definisinya. Untuk mencari solusi umum dari persamaan diferensial linear di atas adalah dengan mengalikan setiap ruas dengan faktor $e^{\int p(x)\,dx}$, sehingga persamaan (1) menjadi :

$$e^{\int p(x)\,dx}\, y' + p(x)\, y\, e^{\int p(x)\,dx} = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\, y\right) = e^{\int p(x)\,dx}\, q(x)$$

$$e^{\int p(x)\,dx} . y = \int e^{\int p(x)\,dx} . q(x)\,dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \left[\int e^{\int p(x)\,dx} . q(x)\,dx + C\right] \quad \text{..(2)}$$

Fungsi (2) di atas sebagai solusi umum persamaan diferensial linear.

Contoh soal

Tentukan solusi umum persamaan diferensial : $y' + xy = 5x$

Jawab

Persamaan diferensial di atas merupakan persamaan linear dengan $p(x) = x$; $q(x) = 5x$

Solusi umum persamaan diferensial :

$$y = e^{-\int x\,dx} \left[\int e^{\int x\,dx} .5x\,dx + C\right]$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}h} \left[5e^{\frac{1}{2}h} + C\right], \text{ dimana } h = x^2$$

$$y = 5 + Ce^{\frac{1}{2}h}, \text{ dimana } h = x^2$$

4. Persamaan Diferensial Homogen

Bentuk persamaan diferensial : $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ ....(3)

dinamakan persamaan diferensial homogen tingkat pertama jika M dan N adalah fungsi homogen berderajat sama. Contoh fungsi homogen:

1. $f(x,y) = x/y$ $\Rightarrow$ fungsi berderajat nol
2. $f(x,y) = \sin(x/y)$ $\Rightarrow$ fungsi berderajat nol
3. $f(x,y) = x - y$ $\Rightarrow$ fungsi berderajat satu
4. $f(x,y) = x + y + (x^2 + y^2)^{1/2}$ $\Rightarrow$ fungsi berderajat satu
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy^2$ $\Rightarrow$ fungsi berderajat tiga

Contoh persamaan diferensial homogen :

1. $y' = (x-y)/(x+y)$
2. $y' = \sin(x/y)$
3. $y' = (x + (x^2 + y^2)^{1/2}) / (x - (x^2 + y^2)^{1/2})$

Persamaan diferensial homogen dapat diselesaikan dengan penggantian $z = y/x$. dy/dx dapat ditulis sebagai $f(x,y)$ sehingga bentuk persamaan diferensial (3) dapat ditulis menjadi : $f(x,y) = -M(x,y) / N(x,y)$ dengan M dan N merupakan fungsi homogen yang sama. Karena $z = y/x$ atau $y = xz$ maka :

$$dy = z\,dx + x\,dz \quad \text{..............................(4)}$$

Bentuk persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan diferensial (3) sehingga solusi persamaaan diferensial dapat diperoleh melalui metode pemisahan variabel.

Contoh soal

Diberikan persamaan diferensial : $y' = (x^3 + y^3) / (xy^2)$. Tentukan solusi umumnya !

Jawab

Persamaan diferensial diatas merupakan persamaan diferensial homogen. Misalkan $z = y/x$ maka $dy = z\,dx + x\,dz$ atau $dy/dx = z + xz'$, sehingga persamaan diferensial diatas menjadi :

$$z + xz' = (x^3 + x^3z^3) / x^3z^2$$
$$z + xz' = (1 + z^3) / z^2$$
$$xz' = 1 / z^2$$
$$x\,dz/dx = 1 / z^2$$
$$z^2\,dz = dx / x$$

Kedua ruas diintegralkan sehingga menjadi :

$$z^3/3 = \ln|x| + c$$
$$z^3 = 3 \ln|x| + c$$

Jadi solusi umum persamaan diferensial : $(y/x)^3 = 3 \ln|x| + c$

5. Persamaan Diferensial Bernoulli

Bentik umum persamaan diferensial Bernoulli adalah :

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^a \qquad \text{.................................(5)}$$

dimana a adalah bilangan real.

Persamaan (5) bila dibagi dengan y^a menjadi :

$$y'/y^a + p(x)\,y^{1-a} = q(x)$$

Misalkan $u = y^{1-a}$ maka $u' = (1-a)\,y' / y^a$ atau $y' = u'\,y^a / (1-a)$, kemudian disubstitusi ke persamaan diferensial (5) yang penyelesaiannya seperti pada persamaan diferensial linear tingkat satu.

Contoh soal

Diberikan persamaan diferensial : $dy/dx - y = xy^5$. Tentukan solusi umumnya !

Jawab

Persamaan diferensial di atas merupakan persamaan diferensial Bernoulli. Cara menyelesaikannya dengan substitusi $u = y^{-4}$, maka $u' = -4y^{-5}\,y'$ atau $y' = -u'\,y^5 / 4$. Sehingga persamaan diferensial pada soal diatas dapat ditulis menjadi :

$$(-u'\,y^5 / 4) - y = xy^5$$
$$-u'/4 - u = x$$
$$u' + 4u = -4x$$

Persamaan diferensialnya menjadi persamaan diferensial linear, dengan :

$$p(x) = 4 \quad ; \quad q(x) = -4x$$

Jadi solusi umum persamaan diferensial :

$$u = e^{-\int p(x)\,dx}\,[\int e^{\int p(x)\,dx}.\, q(x)\,dx + C]$$
$$= e^{-4x}\,[-\int e^{4x}.\, 4x\,dx + C]$$
$$= e^{-4x}\,[-xe^{4x} + (e^{4x} / 4) + C]$$
$$1/y^4 = -x + ¼ + Ce^{-4x}$$

6. Persamaan Diferensial Eksak

Bentuk persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut eksak jika terdapat fungsi $F(x,y)$ sehingga $dF = Mdx + Ndy$.

Teorema

Misalkan M dan N fungsi dua peubah sehingga M, N, My dan Nx kontinu, maka $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ disebut eksak jika dan hanya jika $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.

Contoh

Diberikan persamaan diferensial : $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$ tentukan solusi persamaan diferensial tersebut !

Jawab

$M(x,y) = x + y$ dan $N(x,y) = x - y$, persamaan diferensial di atas dikatakan eksak karena $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = 1$

Solusi persamaan diferensial eksak dapat diperoleh dari : $dF = (\partial F/\partial x)\,dx + (\partial F/\partial y)\,dy = M\,dx + N\,dy$, ini berarti bahwa $\partial F/\partial x = M$ dan $\partial F/\partial y = N$. Solusi dapat dicari dengan mengintegralkan kedua ruas sehingga diperoleh solusi $F(x,y) = C$

Contoh

Diberikan persamaan diferensial : $(4xy + 2y^2 - x)\,dx + 2x(x-2y)\,dy = 0$

Jawab

$M(x,y) = 4xy + 2y^2 - x \quad \Rightarrow \partial M/\partial y = 4x + 4y$

$N(x,y) = 2x^2 + 4xy \quad \Rightarrow \partial N/\partial x = 4x + 4y$

Persamaan diferensial di atas eksak karena $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = 4x + 4y$

Solusi persamaan diferensial eksak di atas dapat dicari :

$\partial F/\partial x = M = 4xy + 2y^2 - x$

$F(x,y) = \int (4xy + 2y^2 - x)\,dx \quad \Rightarrow$ peubah dianggap konstan

$\quad = 2x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{2}x^2 + \phi(y)$

$\partial F/\partial y = 2x^2 + 4xy + \phi'(y) = N = 2x^2 + 4xy$

$\phi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \phi(y) = C$

Jadi solusi persamaan diferensial eksaknya :

$F(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$ atau

$2x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{2}x^2 = C$

7. Faktor Integrasi

Bentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy=0$ yang bukan eksak dapat dibuat eksak dengan cara mengalikan suatu faktor integral $\mu(x,y)$ sehingga diperoleh PD eksak.

$$\boxed{\mu\, M\, dx + \mu\, N\, dy = 0}$$

Di sini kita hanya membatasi faktor integrasi yang berbentuk $\mu = \mu(x)$ atau $\mu = \mu(y)$. Faktor integrasi yang berbentuk $\mu = \mu(x)$ adalah $\mu(x) = e^{\int[(My - Nx)/N]\,dx}$. Sedangkan integrasi yang berbentuk $\mu=\mu(y)$ adalah $\mu(y)= e^{-\int[(My - Nx)/M]\,dy}$.

Contoh.

Diberikan persamaan diferensial $(4xy + 3y^2 - x)dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$. Tentukan solusi PD tersebut!

Jawab:

$M(x,y) = 4xy + 3y^2 - x \longrightarrow \partial M/\partial y = 4x + 6y$

$N(x,y) = x^2 + 2xy \longrightarrow \partial N/\partial y = 2x + 2y$

Persamaan diferensial di atas tidak eksak sehingga perlu dikalikan dengan faktor integrasi supaya persamaan diferensial di atas menjadi eksak. Faktor integrasi yang dipakai adalah $\mu(x) = e^{\int [My - Nx)/N]\,dx} = e^{\int (2x + 4/x2+2xy)\,dx} = e^{\int (2/x)\,dx} = e^{2\ln x} = x^2$.

Diperoleh persamaan diferensial eksak:

$(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)\,dx + (x^4 + 2x^3y)\,dy = 0$.

Solusi persamaan diferensial eksaknya adalah:

$F(x,y) = \int (4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)\,dx = x^4y + x^3y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \phi(y)$

$\partial F/\partial y = x^4 + 2x^3y + \phi'(y) = x^4 + 2x^3y$

$\phi'(y) = 0$; $\phi(y) = c$

Jadi solusi persamaan diferensial

$F(x,y) = x^4y + x^3y^2 - \frac{1}{4}x^4 + C$

DAFTAR PUSTAKA

1. Boyce & Di Prima, Elementary Diferential Equation and Boundary Value Peoblems, 5th ed, Wiley, 1992
2. Kreyzig. E, Advanced Engineering Mathematics, 7th edition, John Wiley, 1993
3. Martono. K, Persamaan Diferensial Biasa, edisi 3, ITB,1992
4. Thomas, Calculus And Analytic Geometry, 4^{th} edition, Addison-Wesley, 1977