PERSAMAAN DIFERENSIAL TINGKAT DUA

disampaikan pada acara :
Penataran dan Penguasaan Bidang MIPA di Cisarua Bogor

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG
SEPTEMBER 1999

PERSAMAAN DIFERENSIAL TINGKAT DUA

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG

SEPTEMBER 1999

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR TINGKAT DUA

1 Pendahuluan

Bentuk umum persamaan diferensial biasa tingkat dua adalah :

$$y'' + p(x)y' + q(x)\,y = f(x) \qquad \text{...(1)}$$

dengan $f(x)$ kontinu pada daerah definisinya.
Jika persamaan diferensial (1) memiliki bentuk $f(x) = 0$ maka dikatakan persamaan diferensial linear homogen tingkat dua. Bentuk umum persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan yang homogen memiliki bentuk :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad ; \quad a,\ b \text{ konstanta}$$

Kita akan mempelajari solusi persamaan diferensial linear tingkat dua dengan koefisien konstan baik yang homogen maupun yang tak homogen.

Solusi persamaan diferensial tak homogen selalu melibatkan solusi homogennya, ditambah dengan solusi khusus yang dapat ditentukan dengan dua metode yaitu :

1. metode koefisien tak tentu
2. metode variasi parameter

2. Persamaan Diferensial Homogen Tingkat Dua

Untuk menentukan solusi umum persamaan diferensial homogen :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad ;\ a,b \text{ konstan}$$

kita menulis persamaannya dalam bentuk :

$$(D^2 + aD + b)\,y = 0 \qquad \text{.....................................(2)}$$

dengan $D = d/dx$ dan $D^2 = d^2/dx^2$. Lambang D dinamakan *operator diferensial*.
Persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$(D - r_1)\,(D - r_2)y = 0 \qquad \text{.....................................(3)}$$

dengan r_1 dan r_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat dari : $r^2 + ar + b = 0$. Bentuk ini dinamakan *persamaan karakteristik* dan akar-akar r_1 dan r_2 dinamakan akar-akar karakteristik. Persamaan diferensial (3) dapat ditulis menjadi :

$$(D - r_1)u = 0 \quad atau \quad du/dx - r_1\,u = 0$$

dengan $u = (D\text{-}r_2)\,y$. Solusi umum persamaan diferensial ini $u = Ce^{r_1 x}$. Karena $u = (D - r_2)y$, maka diperoleh :

$$(D - r_2)y = Ce^{r_1x}. \qquad \text{.....................................(4)}$$

atau $\qquad y' - r_2y = Ce^{r_1x}.$

persamaan (4) merupakan persamaan diferensial linear tingkat satu yang solusi umumnya :

$$e^{-r_2x}\,y = C\int e^{(r_1-r_2)x}\,dx + C_2 \qquad \text{.....................................(5)}$$

Bentuk (5) dapat dikelompokkan menjadi tiga kasus sebagai berikut :

Kasus 1: r_1 dan r_2 real dan berbeda
Solusi umumnya menjadi :

$$y = [C/(r_1-r_2)]\, e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Kasus 2 : r_1 dan r_2 real dan sama $r_1 = r_2 = r$
Solusi umumnya menjadi :

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{rx}$$

Kasus 3 : : r_1 dan r_2 akar kompleks
Misal : $r_1 = p + qi$ dan $r_2 = p - qi$; $p, q \in R$, $i = \sqrt{-1}$
Maka solusi umumnya :

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

dengan C_1, C_2, r_1 dan r_2 semua bilangan kompleks
maka :

$$y = C_1 e^{(p + q_i)x} + C_2 e^{(p - q_i)x}$$

atau

$$y = e^{px}[C_1 e^{q_i x} + C_2 e^{-q_i x}]$$

Kita menggunakan persamaan *Euler* untuk bilangan kompleks sebagai berikut :

$$e^{q_i x} = \cos qx + i \sin qx \quad \text{dan} \quad e^{-q_i x} = \cos qx - i \sin qx$$

maka solusi umum persamaan diferensialnya :

$$y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$$

dengan p, q, C_1, dan $C_2 \in R$

Contoh soal

1. Diberikan persamaan diferensial : $y'' - 2y' - 3y = 0$. Tentukan solusi umum persamaan diferensialnya !
   Penyelesaian :
   Persamaan karakteristik persamaan diferensialnya : $r^2 - 2r - 3 = 0$.
   Akar-akar karakteristiknya : $r_1 = -1$ dan $r_2 = 3$
   Jadi solusi umumnya adalah : $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

2. Diberikan persamaan diferensial : $y'' - 4y' + 4y = 0$. Tentukan solusi umum persamaan diferensialnya.!
   Penyelesaian :
   Persamaan karakteristiknya : $r^2 - 4r + 4 = 0$.
   Akar-akar karakteristiknya : $r_1 = r_2 = r = 2$
   Jadi solusi umumnya adalah : $y = (C_1 x + C_2)\, e^{2x}$

3. Diberikan persamaan diferensial : $y'' + 4y' + 13y = 0$. Tentukan solusi umum persamaan diferensialnya!
   Penyelesaian :
   Persamaan karakteristiknya : $r^2 + 4r + 13 = 0$.
   Akar-akar karakteristiknya : $r_{1,2} = -2 \pm 3i$
   Jadi solusi umumnya : $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

3. Persamaan Diferensial Tak Homogen Tingkat Dua dengan Metoda Koefisien Tak Tentu dan Metoda Variasi Parameter.

Solusi umum persamaan diferensial (1) adalah jumlah dari solusi homogennya dan solusi tak homogennya. Solusi tak homogen tidak memuat parameter, sehingga dinamakan dinamakan *solusi khusus* yang ditulis dengan lambang y_k, maka :

$$y_k'' + a\,y_k' + b\,y_k = f(x) \qquad \text{...(6)}$$

Selisih dengan persamaan (1) menghasilkan :

$$(y - y_k)'' + a(y - y_k)' + b(y - y_k) = 0 \qquad \text{...(7)}$$

Solusi persamaan diferensial homogennya adalah : $y - y_k = y_h$ atau $y = y_h + y_k$ dengan : y_h solusi homogen dan y_k solusi khusus

3.1 Metoda Koefisien Tak Tentu

Pada metoda ini harus dapat dipilih bentuk solusi khusus yang memuat beberapa koefisien yang dicari. Bentuk solusi khusus ini harus diatur agar $y_k \neq y_h$ yang memenuhi : $y_h'' + a\,y_h' + b\,y_h = 0$

Beberapa patokan pemilihan solusi khusus y_k diperlihatkan pada tabel berikut :

Bentuk $f(x)$ dari Persamaan Diferensial $y'' + ay' + by = f(x)$	**y_k yang diminta**
$f(x) = e^{px}$	$y_k = ke^{px}$
$f(x) = x^2$	$y_k = Kx^2 + Lx + M$
$f(x) = \sin x$	$y_k = K \cos x + L \sin x$
$f(x) = \cos x$	$y_k = K \cos x + L \sin x$

Catatan :

1. y_k tidak boleh muncul pada y_h nya. Jika terjadi kalikan y_k nya dengan faktor x atau x^2.
2. Jika $f(x)$ memuat bentuk suku banyak dan salah satu akar karakteristiknya nol. untuk kasus ini kalikan y_k nya dengan faktor x.

Contoh soal

1. Diberikan persamaan diferensial : $y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x}$. Tentukan solusi umum persamaan diferensial !

   Penyelesaian:

   Persamaan karakteristik : $r^2 - 2r - 3 = 0.$

   Akar – akar karakteristiknya : $r_1 = -1$ dan $r_2 = 3$.

   Solusi homogen : $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

   Misal solusi khusus $y_k = K x e^{-x}$ karena y_k memuat bentuk e^{-x}, maka :

   $y' = Ke^{-x} - K xe^{-x}$

   $y'' = -Ke^{-x} - [Ke^{-x} - K xe^{-x}] \Rightarrow y'' = -Ke^{-x} - Ke^{-x} + K xe^{-x}$

   Kemudian disubstitusi ke persamaan diferensial pada soal di atas, sehingga diperoleh k = -1/2.

   Jadi solusi khususnya adalah : $y_k = - ½ x e^{-x}$

   Maka solusi umumnya : $y = y_h + y_k$

   $$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - ½ x e^{-x}$$

2. Diberikan persamaan diferensial $y'' - 2y' + y = 2 e^x$. Tentukan solusi umum persamaan diferensialnya !

   Penyelesaian :

   Solusi homogen persamaan diferensial $y_h = C_1 xe^x + C_2 e^x$

   Misalkan solusi khusus $y_k = K x^2 e^x$, maka:

   $y' = 2 K x e^x + K x^2 e^x$

   $y'' = 2 K e^x + 2 K x e^x + 2 K x e^x + K x^2 e^x = 2 K e^x + 4 K x e^x + K x^2 e^x$

   sehingga persamaan diferensial di atas sehingga menjadi :

   $2 K e^x = 2 e^x$

   $K = 1$

   Maka solusi khususnya adalah : $y_k = x^2 e^x$

   Jadi solusi umumnya : $y = C_1 x e^x + C_2 e^x + x^2 e^x$

3.2. Metode Variasi Parameter

Solusi homogen dari persamaan $y'' + ay' + by = f(x)$ adalah :

$$y_h = C_1 U_1(x) + C_2 U_2(x)$$

dengan C_1 dan C_2 parameter. Bentuk-bentuk yang mungkin dari $U_1(x)$ dan $U_2(x)$ adalah e^{px}, xe^{px}, $e^{px}cosqx$, atau $e^{px}sinqx$. Metode variasi parameter adalah mengandaikan bahwa y_k mempunyai bentuk yang sama dengan y_h dengan parameter yang bervariasi yaitu berubah menjadi fungsi yaitu $V_1(x)$ dan $V_2(x)$ sehingga:

$$y_k = V_1(x)\ U_1(x) + V_2(x)\ U_2(x)$$

Dengan :

$V_1 = - \int u_1 . f(x) / w\ dx$

$V_2 = \int u_1 . f(x) / w\ dx$

W = *determinan Wronskian* = $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$

Contoh :

Diberikan persamaan diferensial $y'' - 2y' + y = 2e^x$. Tentukan solusi umumnya !

Jawab : Solusi homogen : $y_h = (C_1 + C_2 x)\, e^x$

Solusi khusus :

$$y_p = U_1 V_1(x) + U_2 V_2(x)$$
$$= V_1 e^x + V_2 xe^x$$
$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$v_1 = -\int (xe^x.2e^x) / e^{2x}\, dx = -x^2$$
$$v_2 = \int (e^x.2e^x) / e^{2x}\, dx = 2x$$

Jadi : $y_p = 2x^2e^x - x^2e^x = x^2e^x$

Solusi umumnya :

$$y = y_h + y_p$$
$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x^2e^x$$

4. Perluasan ke Persamaan Diferensial Linear Tingkat Lebih Tinggi

Bentuk umum persamaan diferensial liniar orde tinggi dengan koefisien konstanta yang homogen adalah :

$$y^n + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + a_n y = 0 \ldots\ldots (8)$$

dengan a_1, a_2 ...., a_n adalah konstanta.

Persamaan karakteristik persamaan diferensial adalah :

$$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Persamaan karakteristik tersebut memiliki n buah akar real dan kompleks.

Solusi homogen persamaan diferensial (8) dapat dilihat melalui tabel berikut :

	Akar-akar karakteristik	**Kontribusi dalam solusi**
1	Akar real berlainan ; $m_1, m_2, \ldots, m_k$	$e^{m_1x}, e^{m_2x}, \ldots\ e^{m_kx}$
2	Akar real sama $m = \alpha$ kelipatan k	$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x}$
3	Akar kompleks $m = \alpha \pm \beta i$ berkelipatan k $(\beta \neq 0)$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, x\, e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x\, e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Contoh soal :

Diberikan persamaan diferensial orde sepuluh dengan persamaan karakteristik $(m-2)^4\,(m-3)(m^2-2m+5)^2\,(m+2)=0$. Tentukan solusi umumnya !

Jawab :

Akar-akar karakteristik : $m_{1,2,3,4} = 2 \quad m_5 = 3 \quad m_{6,7,8,9} = 1 \pm 2i \quad m_{10} = -2$.

Solusi umumnya :

$$y = A_1e^{3x} + A_2e^{-2x} + B_1e^{2x} + B_2xe^{2x} + B_3x^2e^{2x} + B_4x^3e^{2x} + C_1e^x\cos 2x +$$
$$+ D_1e^x\sin 2x + C_2xe^x\cos 2x + D_2xe^x\sin 2x$$
$$y = A_1e^{3x} + A_2e^{-2x} + (B_1 + B_2x + B_3x^2 + B_4x^3)e^{2x} + [(C_1+C_2x)\cos 2x +$$
$$(D_1 + D_2x)\sin 2x]\,e^x.$$

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde tinggi tak homogen adalah:

$$y^n + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + a_ny = f(x) \qquad (9)$$

dengan a_1, a_2,..., a_n adalah konstanta.

Solusi umum persamaan (9) adalah solusi homogen ditambah dengan solusi khusus, yang dapat ditulis menjadi: $y = y_h + y_k$ dengan y_h = solusi homogen dan y_k = solusi khusus. Untuk menentukan solusi khusus dapat menggunakan metode: (1) koefisien tak tentu, dan (2) variasi parameter.

4.1 Metode Koefisien Tak Tentu

Untuk menentukan solusi khusus dapat dilihat dalam tabel berikut:

	Bentuk $f(x)$	Solusi khusus	Syarat
1	$f(x) = P(x)$, $P(x)$ polinom derajat n	$y_k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$	m = 0 bukan akar karakteristik
		$y_k = x^k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)$	m = 0 akar karakteristik
2	$f(x) = P(x)\,e^{\alpha x}$, $P(x)$ polinom derajat n	$y_k = e^{\alpha x}\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)$	m = α bukan akar karakteristik
		$y_k = x^ke^{\alpha x}\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)$	m = α akar karakteristik kelipatan k
3	$f(x) = e^{\alpha x}\,[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]$	$y_k = e^{\alpha x}\,[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)\cos\beta x + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)\sin\beta x]$	m = α ± βi bukan akar karakteristik
		$y_k = x^k\,e^{\alpha x}\,[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)\cos\beta x + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)\sin\beta x]$	m = α ± βi akar karakteristik kelipatan k

Contoh soal.

Diberikan persamaan diferensial $y''' - y'' + y' - y = x^2 + 2$.

Tentukan solusi umumnya!

Jawab:

Persamaan karakteristik persamaan diferensial: $m^3 - m^2 + m - 1 = 0$

Akar-akar karakteristik: m =1, m = ± i

Solusi homogen: $y_h = Ae^x + B\cos x + C\sin x$

Solusi khusus: $y_k = A + Bx + Cx^2$

Jika y_k diturunkan tiga kali kemudian disubstitusi ke persamaan diferensial pada soal di atas, maka diperoleh: A = -2, B = -2, C = -1

Jadi, solusi khusus: $y_k = -2 - 2x - x^2$

Maka solusi umum: $y = y_h + y_k$

$$y = Ae^x + B\cos x + C\sin x - 2 - 2x - x^2$$

4.2. Metode Variasi Parameter

Tinjau persamaan diferensial linear tak homogen orde tinggi:

$$y^{n} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x). \qquad (10)$$

Misalkan solusi khususnya: $y_k = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \dots + v_n y_n$ dengan $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ solusi homogen dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ ditentukan dari persamaan:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3 + \dots + v_n' y_n = 0$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3' + \dots + v_n' y_n' = 0$$
$$v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'' + \dots + v_n' y_n'' = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$v_1' y_1^{n-1} + v_2' y_2^{n-1} + v_3' y_3^{n-1} + \dots + v_n' y_n^{n-1} = f(x)$$

Contoh soal:

Diberikan persamaan diferensial $y'' + y = tg\ x$. Tentukan solusi umumnya !

Penyelesaian:

Tidak dapat diselesaikan dengan koefisien tak tentu, karena $f(x) = tg\ x$ bukan bentuk yang sesuai dengan koefisien tak tentu.

Persamaan karakteristik: $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$

Solusi homogen: $y_h = A\cos x + B\sin x$

Ambil solusi basis $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

Solusi khusus: $y_k = v_1 \cos x + v_2 \sin x$, di mana v_1', v_2' ditentukan dari sistem persamaan:

$$v_1'\cos x + v_2'\sin x = 0$$
$$v_1'(-\sin x) + v_2'\cos x = tg\ x$$

Kedua persamaan di atas dieliminasi sehingga diperoleh:

$$v_1' = (-\sin^2 x) / \cos x$$
$$= -\ln\left|\sec x + tg\ x\right| + \sin x$$
$$v_2 = -\cos x$$

Jadi solusi khusus $y_k = (-\ln \left| \sec x + tg\, x \right| + \sin x)\cos x + (-\sin x \cos x)$

Solusi umum persamaan diferensial: $y = y_k + y_h$

$= A \cos x + B \sin x + y_k$

DAFTAR PUSTAKA

1. Boyce & Di Prima, Elementary Diferential Equation and Boundary Value Peoblems, 5th ed, Wiley, 1992
2. Kreyzig. E, Advanced Engineering Mathematics, 7th edition, John Wiley, 1993
3. Martono. K, Persamaan Diferensial Biasa, edisi 3, ITB,1992
4. Thomas, Calculus And Analytic Geometry, 4^{th} edition, Addison-Wesley, 1977