MENGKONSTRUKSI FUNGSI GREEN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE-n

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG
AGUSTUS 2001

MENGKONSTRUKSI FUNGSI GREEN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE-n

OLEH :

IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

BANDUNG

AGUSTUS 2001

MENGKONSTRUKSI FUNGSI GREEN

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE -n

I. Latar Belakang

Tinjau persamaan diferensial linear orde - n :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = h(x)$$

dengan fungsi h kontinu pada daerah definisinya.

Fungsi Green untuk persamaan diferensial di atas dapat dicari sehingga dapat mudah menentukan solusi persamaan diferensial untuk fungsi h sebarang. Dalam skripsi ini, akan diperkenalkan mengkonstruksi fungsi Green persamaan diferensial linear.

II. Konsep Fungsi Green

Pandang persamaan diferensial linear tak homogen orde - n :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = h(x) \qquad \ldots \quad (1)$$

Fungsi $G(x,t)$ dikatakan *fungsi Green* untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas *jika* memenuhi kondisi berikut ini :

1. $G(x,t)$ terdefinisi pada daerah R dari semua titik (x,t) dengan x dan t terletak dalam selang I.

2. $G(x,t), \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n G}{\partial x^n}$ merupakan fungsi yang kontinu pada R.

3. Untuk setiap x_0 dalam selang I dan fungsi $h \in C(I)$, fungsi

$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\, h(t)\, dt$ adalah solusi persamaan difernesial (1) yang memenuhi

kondisi awal $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \cdots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$

III. Konstruksi Fungsi Green Persamaan Diferensial Linier Orde -n

Tinjau persamaan diferensial :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = h(x) \qquad \ldots \qquad (2)$$

Solusi umum persamaan diferensial di atas adalah :

$$y = y_h + y_p$$

dengan y_h merupakan solusi umum persamaan diferensial homogennya dan y_p salah satu solusi khususnya.

Misalkan $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ solusi basis untuk persamaan diferensial homogennya maka $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ merupakan konstanta. Sedangkan solusi khususnya adalah :

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \cdots + u_n(x)y_n \qquad \ldots \qquad (3)$$

dimana $u_1', u_2', \cdots, u_n'$ ditentukan dari sistem persamaan terdiri dari n persamaan :

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \cdots + u_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = h(x) \end{cases}$$

Dengan aturan Cramer, maka :

$$u_k' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{k-1}' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & h & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}$$

dengan $k = 1, 2, \cdots, n$ ... (4)

Misalkan $W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)]$ merupakan determinan Wronsky dengan

$$W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Misalkan pula $V_k(x)$ merupakan determinan yang diperoleh dari

$W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)]$ dengan menggantikan kolom ke- k dengan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

Jadi $V_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{k-1}' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & 1 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ dengan

$k = 1, 2, \cdots, n$

Dari persamaan (4) dapat ditulis :

$$u_k' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{k-1}' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & 1 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot h}{W\left[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\right]}$$

$$u_k' = \frac{V_k(x) \cdot h(x)}{W\left[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\right]}$$

$$u_k = \int_{x_0}^{x} \frac{V_k(t) \cdot h(t)}{W\left[y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)\right]}\, dt \quad \text{dengan } k = 1, 2, \cdots, n \qquad \ldots \qquad (5)$$

Dengan memasukkan (5) ke dalam (3) diperoleh :

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)V_1(t) + \cdots + y_n(x)V_n(t)}{W\left[y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)\right]} \cdot h(t)\, dt$$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} G(x,t) \cdot h(t)\, dt$$

dengan $G(x,t) = \dfrac{y_1(x)V_1(t) + \cdots + y_n(x)V_n(t)}{W\left[y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)\right]}$ $\qquad \ldots \qquad$ (6)

Jadi solusi umum persamaan diferensial (2) adalah

$$y = y_h + \int_{x_0}^{x} G(x,t) \cdot h(t)\, dt$$

$G(x,t)$ yang didefinisikan oleh (6) merupakan *fungsi Green* untuk persamaan diferensial (2). Hal ini disebabkan $\int_{x_0}^{x} G(x,t) \cdot h(t)\, dt$ solusi persamaan diferensial (2) dan $G(x,t)$ memenuhi hal-hal berikut :

1. $G(x,t)$ terdefinisi $\forall(x,t)$ karena $W[y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)] \neq 0$, $\forall t \in [x_0, x]$

2. $G(x,t)$ kontinu $\forall(x,t)$ karena $V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)$, $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ kontinu $\forall(x,t)$. $V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)$ kontinu karena $y_1, y_2, \cdots, y_n$ dan turunan-turunannya kontinu sampai dengan orde ke $(n-1)$.

   $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ kontinu $\forall(x,t)$ karena $V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t), y_1'(x), y_2'(x), \cdots, y_n'(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

   $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ kontinu $\forall(x,t)$ karena $V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)$, $y_1''(x), y_2''(x), \cdots, y_n''(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

   $\vdots$

   $\dfrac{\partial^n G}{\partial x^n}$ kontinu $\forall(x,t)$ karena $V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)$, $y_1^n(x), y_2^n(x), \cdots, y_n^n(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

3. Dari konstruksi y_p, terlihat bahwa $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t) \cdot h(t)\; dt$ adalah solusi persamaan diferensial (2)

   Jelas bahwa $y_p(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} G(x,t) \cdot h(t)\; dt = 0$

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial G}{\partial x} h(t)\; dt + G(x,x)h(x) \qquad \ldots \qquad (7)$$

   Akan dibuktikan $G(x,x) = 0$, $\forall x$

$$G(x,x)=\frac{y_1(x)V_1(x)+y_2(x)V_2(x)+\cdots+y_n(x)V_n(x)}{W[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)]}=0$$

$$y_1V_1+y_2V_2+\cdots+y_nV_n$$

$$=y_1\begin{vmatrix}0 & y_2 & \cdots & y_n\\ 0 & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+y_2\begin{vmatrix}y_1 & 0 & \cdots & y_n\\ y_1' & 0 & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-1)} & 1 & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$y_n\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & 0\\ y_1' & y_2' & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

Untuk n ganjil maka

$$y_1V_1+y_2V_2+\cdots+y_nV_n$$

$$=y_1\begin{vmatrix}y_2 & y_3 & \cdots & y_n\\ y_2' & y_3' & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)}\end{vmatrix}-y_2\begin{vmatrix}y_1 & y_3 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_3' & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)}\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+y_n\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1}\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)}\end{vmatrix}$$

Menurut sifat determinan, karena ada dua baris yang terdiri dari elemen-elemen yang sama, maka $y_1V_1+y_2V_2+\cdots+y_nV_n=0$

Untuk n genap, maka

$$y_1V_1+y_2V_2+\cdots+y_nV_n$$

$$=-y_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}+y_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

$$-\cdots-y_n\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

Menurut sifat determinan, karena ada dua baris yang terdiri dari elemen-elemen yang sama, maka $y_1V_1+y_2V_2+\cdots+y_nV_n=0$

Karena $W\left[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)\right]\neq 0$ maka $G(x,x)=0$. Akibatnya (3.18) menjadi :

$$y_p'(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial G}{\partial x}h(t)\ dt$$

$$y_p'(x_0)=\int_{x_0}^{x_0}\frac{\partial G}{\partial x}h(t)\ dt=0$$

$$y_p''(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}h(t)\ dt+\frac{\partial G}{\partial x}(x,x)h(x)$$

$$y_p''(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} h(t)\ dt + 0 = 0$$

$$\vdots$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}} h(t)\ dt + \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}}(x,x)h(x)$$

$$y_p^{(n-1)}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}} h(t)\ dt + 0 = 0$$

Contoh : Konstruksilah fungsi Green dari persamaan diferensial : $3y'''+5y''-2y' = r(x)$, kemudian tentukan solusi umumnya !

Jawab : Persamaan diferensial homogen : $3y'''+5y''-2y' = 0$

Persamaan karakteristik : $3m^3 + 5m^2 - 2m = 0$

$$m\left(3m^2 + 5m - 2\right) = 0$$

$$m(3m-1)(m+2) = 0$$

Akar-akar karakteristik : $m_1 = 0$, $m_2 = -2$, $m_3 = \frac{1}{3}$

Solusi homogen : $y_h = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{\frac{1}{3}x}$

$$\text{dengan} \begin{cases} y_1(x) = 1 & y_1'(x) = 0 & y_1''(x) = 0 \\ y_2(x) = e^{-2x} & y_2'(x) = -2e^{-2x} & y_2''(x) = 4e^{-2x} \\ y_3(x) = e^{\frac{1}{3}x} & y_3'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} & y_3''(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}x} \end{cases}$$

$$W[y_1(t), y_2(t), y_3(t)] = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{\frac{1}{3}t} \\ 0 & -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ 0 & 4e^{-2t} & \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ 4e^{-2t} & \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t} \end{vmatrix} = -\frac{14}{9}e^{-\frac{5}{3}t}$$

$$V_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{\frac{1}{3}t} \\ 0 & -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ 1 & 4e^{-2t} & \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{\frac{1}{3}t} \\ -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \end{vmatrix} = \frac{7}{3}e^{-\frac{5}{3}t}$$

$$V_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{\frac{1}{3}t} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ 1 & \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t}$$

$$V_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -2e^{-2t} & 0 \\ 0 & 4e^{-2t} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2e^{-2t} & 0 \\ 4e^{-2t} & 1 \end{vmatrix} = -2e^{-2t}$$

Jadi fungsi Green :

$$G(x,t) = \frac{y_1(x)V_1(t) + y_2(x)V_2(t) + y_3(x)V_3(t)}{W[y_1(t), y_2(t), y_3(t)]}$$

$$G(x,t)=\frac{1\cdot\left(\frac{7}{3}e^{-\frac{5}{3}t}\right)+e^{-2x}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t}\right)+e^{\frac{1}{3}x}\left(-2e^{-2t}\right)}{-\frac{14}{9}e^{-\frac{5}{3}t}}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{14}e^{-2(x-t)}+\frac{9}{7}e^{\frac{1}{3}(x-t)}$$

$$h(t)=\frac{r(t)}{3}$$

Solusi khususnya :

$$y_p=\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{14}e^{-2(x-t)}+\frac{9}{7}e^{\frac{1}{3}(x-t)}\right)\cdot\frac{r(t)}{3}\ dt$$

$$y_p=\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{14}e^{-2(x-t)}+\frac{3}{7}e^{\frac{1}{3}(x-t)}\right)\cdot r(t)\ dt$$

Jadi solusi umumnya :

$$y=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^{\frac{1}{3}x}$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{14}e^{-2(x-t)}+\frac{3}{7}e^{\frac{1}{3}(x-t)}\right)\cdot r(t)\ dt$$

Contoh : Konstruksilah fungsi Green dari persamaan diferensial : $x^3y'''+2x^2y''-2xy'=1+\frac{1}{x}$, $x>0$, kemudian tentukan solusi umumnya !

Penyelesaian : Persamaan diferensial Cauchy homogen : $x^3y'''+2x^2y''-2xy'=0$

Persamaan pembantu : $m(m-1)(m-2)+2m(m-1)-2m=0$

$$m((m-1)(m-2)+2(m-1)-2)=0$$

$$m\left(m^2-3m+2+2m-2-2\right)=0$$

$$m\left(m^2-m-2\right)=0$$

$$m(m+1)(m-2)=0$$

$$m_1=0\,,\ m_2=-1\,,\ m_3=2$$

Solusi homogen : $y_h = C_1 + C_2x^{-1} + C_3x^2$

$$\text{dengan}\begin{cases} y_1(x)=1 & y_1'(x)=0 & y_1''(x)=0 \\ y_2(x)=x^{-1} & y_2'(x)=-x^{-2} & y_2''(x)=2x^{-3} \\ y_3(x)=x^2 & y_3'(x)=2x & y_3''(x)=2 \end{cases}$$

$$W[y_1(t),y_2(t),y_3(t)]=\begin{vmatrix} 1 & t^{-1} & t^2 \\ 0 & -t^{-2} & 2t \\ 0 & 2t^{-3} & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -t^{-2} & 2t \\ 2t^{-3} & 2 \end{vmatrix}=-6t^{-2}$$

$$V_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & t^{-1} & t^2 \\ 0 & -t^{-2} & 2t \\ 1 & 2t^{-3} & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{vmatrix}=2+1=3$$

$$V_2(t)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2t$$

$$V_3(t)=\begin{vmatrix} 1 & t^{-1} & 0 \\ 0 & -t^{-2} & 0 \\ 0 & 2t^{-3} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -t^{-2} & 0 \\ 2t^{-3} & 1 \end{vmatrix}=-t^{-2}$$

Jadi fungsi Green :

$$G(x,t)=\frac{y_1(x)V_1(t)+y_2(x)V_2(t)+y_3(x)V_3(t)}{W[y_1(t),y_2(t),y_3(t)]}$$

$$G(x,t)=\frac{1\cdot 3+x^{-1}(-2t)+x^2\left(-t^{-2}\right)}{-6t^{-2}}$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3x^{-1}+\frac{1}{6}x^2$$

$$h(t)=\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}$$

Dengan memilih $x_0=1$, maka solusi khususnya :

$$y_p=\int_1^x\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3x^{-1}+\frac{1}{6}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)\,dt$$
$$y_p=\int_1^x\left(-\frac{1}{2}t^{-1}-\frac{1}{2}t^{-2}+\frac{1}{3}x^{-1}+\frac{1}{3}t^{-1}x^{-1}+\frac{1}{6}x^2t^{-3}+\frac{1}{6}x^2t^{-4}\right)\,dt$$
$$y_p=-\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}t^{-1}+\frac{1}{3}x^{-1}t+\frac{1}{3}x^{-1}\ln|t|-\frac{1}{12}x^2t^{-2}-\frac{1}{18}x^2t^{-3}\Big|_1^x$$
$$y_p=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}x^{-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^{-1}\ln|x|-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}x^{-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x^{-1}+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{18}x^2$$
$$y_p=\frac{1}{9}x^{-1}+\frac{5}{36}x^2-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{3}x^{-1}\ln|x|-\frac{1}{4}$$

Jadi solusi umumnya :

$$y=C_1+C_2x^{-1}+C_3x^2+\frac{1}{9}x^{-1}+\frac{5}{36}x^2-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{3}x^{-1}\ln|x|$$
$$y=A+Bx^{-1}+Cx^2-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{3}x^{-1}\ln|x|$$

IV. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan, maka diperoleh kesimpulan bahwa melalui metode variasi parameter kita dapat mengkonstruksi fungsi Green suatu persamaan diferensial linier orde -n. Tujuannya kita dapat menentukan solusi persamaan diferensialnya untuk fungsi h sebarang.

DAFTAR PUSTAKA

1. Brauer. F., Nohel, J.A., Problems and Solutions in Ordinary Differential Equation, W.A. Benjamin, New York, 1968, 131-136
2. Martono, K., Kalkulus, ITB, 1992.
3. Ostberg, D.R., Perkins, F.W., An Introduction to Linear Analysis, Addison-Wesley, Donn Mills, 1996, 126-154
4. Roach, G.F., Green's Functions, 2, Cambridge University Press, London, 1982, 141-148
5. Carrier, G.F., Pearson, C.E. , Ordinary Differential Equations, SIAM, 1991, 64-68