MENGKONSTRUKSI FUNGSI GREEN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE DUA

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG
AGUSTUS 2001

MENGKONSTRUKSI FUNGSI GREEN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE DUA

OLEH :
IWAN SUGIARTO

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
BANDUNG
AGUSTUS 2001

MENGKONSTRUKSI FUNGSI GREEN

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE 2

I. Latar Belakang

Tinjau persamaan diferensial linier tak homogen orde dua :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=h(x)$$

dengan fungsi h kontinu pada daerah definisinya.

Fungsi Green untuk persamaan diferensial di atas dapat dicari melalui metode variasi parameter. Dengan mengkonstruksi fungsi Green kita dapat menentukan solusi persamaan diferensial untuk fungsi h sebarang.

II. Konsep Fungsi Green

Pandang persamaan diferensial linier tak homogen orde dua :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=h(x)$$

dengan fungsi h kontinu pada daerah definisinya.

Fungsi $G(x,t)$ dikatakan *fungsi Green* untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas *jika* memenuhi kondisi berikut ini :

1. $G(x,t)$ terdefinisi pada daerah R dari semua titik (x,t) dengan x dan t terletak dalam selang I.

2. $G(x,t), \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ merupakan fungsi yang kontinu pada R.

3. Untuk setiap x_0 dalam selang I dan fungsi $h \in C(I)$, fungsi

$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)\, h(t)\, dt$ adalah solusi persamaan difernesial (1) yang memenuhi

kondisi awal $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$.

III. Konstruksi Fungsi Green Persamaan Diferensial Linier Orde Dua

Tinjau persamaan diferensial linier tak homogen orde dua :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \qquad \dots (3.1)$$

Bentuk persamaan diferensial ini dapat ditulis menjadi :

$$Ly = h$$

dengan L operator diferensial linier berbentuk $D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$

Solusi umum persamaan diferensial di atas adalah :

$$y = y_h + y_p \qquad \dots (3.2)$$

dengan y_h merupakan solusi umum persamaan diferensial homogennya dan y_p salah satu solusi khususnya.

Misalkan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ solusi basis untuk persamaan diferensial homogennya

maka : $\quad y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \dots (3.3)$

dengan C_1 dan C_2 merupakan konstanta.

Sedangkan solusi khususnya ditentukan melalui metode variasi parameter.

Misalkan : $\quad y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad \dots (3.4)$

dimana $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang akan dicari .

Dengan mendiferensialkan y_p terhadap x maka (3.4) menjadi :

$$y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

Pilih u_1 dan u_2 sehingga $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$.

Maka $$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \qquad \ldots (3.5)$$

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' \qquad \ldots (3.6)$$

Dengan memasukkan (3.4), (3.5), (3.6) ke dalam persamaan diferensial (3.1) diperoleh :

$$u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + a_1 u_1 y_1' + a_1 u_2 y_2' + a_0 u_1 y_1 + a_0 u_2 y_2 = h$$

$$u_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1\right) + u_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2\right) + \left(u_1' y_1' + u_2' y_2'\right) = h \ldots (3.7)$$

Karena y_1 dan y_2 merupakan solusi homogen persamaan diferensial, maka $y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$ dan $y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$. Akibatnya (3.7) menjadi :

$$\left(u_1' y_1' + u_2' y_2'\right) = h$$

Jadi u_1 dan u_2 ditentukan dua sistem persamaan :

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 & \ldots (3.8) \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \text{h} & \ldots (3.9) \end{cases}$$

Dengan mengeliminasi (3.8), (3.9) diperoleh :

$$u_1' = -\frac{h y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \qquad u_2' = \frac{h y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

$$u_1 = -\int_{x_0}^{x} \frac{h(t) y_2(t)}{w\left[y_1(t), y_2(t)\right]} dt \qquad u_2 = \int_{x_0}^{x} \frac{h(t) y_1(t)}{w\left[y_1(t), y_2(t)\right]} dt \qquad \ldots (3.10)$$

dengan $w\left[y_1(t), y_2(t)\right]$ disebut determinan *Wronsky* dimana

$$w\left[y_1(t), y_2(t)\right] = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Dengan memasukkan (3.10) ke dalam (3.4) maka diperoleh :

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x) y_1(t) h(t)}{w\left[y_1(t), y_2(t)\right]} dt - \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x) y_2(t) h(t)}{w\left[y_1(t), y_2(t)\right]} dt$$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)}{w\left[y_1(t), y_2(t)\right]} h(t) dt$$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} G(x,t) h(t) dt \qquad \text{... (3.11)}$$

dengan $G(x,t) = \dfrac{y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)}{w\left[y_1(t), y_2(t)\right]}$ ... (3.12)

dan x_0 dipilih dalam selang I.

Dengan mensubstitusikan (3.3) dan (3.11) ke dalam (3.2), akibatnya solusi umum persamaan diferensial (3.1) menjadi :

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} G(x,t) h(t) dt$$

dengan x_0 dipilih dalam selang I.

$G(x,t)$ yang didefinisikan oleh (3.12) merupakan *fungsi Green* untuk persamaan diferensial (3.1). Hal ini disebabkan : $\int_{x_0}^{x} G(x,t) h(t) dt$ solusi persamaan diferensial (3.1) dan $G(x,t)$ memenuhi hal-hal berikut :

1. $G(x,t)$ terdefinisi untuk $\forall (x,t)$ karena $w\left[y_1(t), y_2(t)\right] \neq 0, \forall t \in \left[x_0, x\right]$

2. $G(x,t)=\dfrac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{w[y_1(t),y_2(t)]}$ kontinu $\forall(x,t)$ karena

$y_1(t),y_2(t),y_1(x),y_2(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

$\dfrac{\partial G}{\partial x}=\dfrac{y_1(t)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(t)}{w[y_1(t),y_2(t)]}$ kontinu $\forall(x,t)$ karena

$y_1(t),y_2(t),y_1'(x),y_2'(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\dfrac{y_1(t)y_2''(x)-y_1''(x)y_2(t)}{w[y_1(t),y_2(t)]}$ kontinu $\forall(x,t)$ karena

$y_1(t),y_2(t),y_1''(x),y_2''(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

3. Dari konstruksi y_p, terlihat bahwa $y_p=\int_{x_0}^{x} G(x,t)h(t)\,dt$ adalah solusi persamaan diferensial (3.1).

Jelas bahwa $y_p(x_0)=\int_{x_0}^{x_0} G(x,t)h(t)\,dt=0$

Akan ditentukan bahwa $y_p'(x_0)=0$

Menurut formula *Leibnitz* :

$$y_p'=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial G}{\partial x}h(t)\,dt+G(x,x).h(x)$$

$$y_p'(x_0)=\int_{x_0}^{x_0}\frac{\partial G}{\partial x}h(t)\,dt+G(x_0,x_0).h(x_0)=0$$

Contoh : konstruksilah fungsi Green dari persamaan diferensial : $y''+y=\tan x$, kemudian tentukan solusi umumnya !

Penyelesaian : Persamaan diferensial homogen : $y''+y=0$

Persamaan karakteristik : $m^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm i$.

Solusi homogen : $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

dengan $\begin{cases} y_1(x) = \sin x \\ y_2(x) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = \cos x \\ y_2' = -\sin x \end{cases}$

Fungsi Green :

$$G(x,t) = \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin t - \sin x \cdot \cos t}{-\sin^2 t - \cos^2 t}$$

$$= \sin x \cdot \cos t - \cos x \cdot \sin t$$

$$h(t) = \tan t$$

Dengan memilih $x_0 = 0$, maka solusi khusus :

$$y_p = \int_0^x (\sin x \cdot \cos t - \cos x \cdot \sin t) \tan t \, dt$$

$$= \int_0^x \sin x \cdot \sin t \, dt - \int_0^x \cos x \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt$$

$$= \sin x \int_0^x \sin t \, dt - \cos x \int_0^x (\sec t - \cos t) \, dt$$

$$= -\sin x \cdot (\cos t)\Big|_0^x - \cos x \cdot \left(\ln|\sec t + \tan t| - \sin t\right)\Big|_0^x$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x \cdot \ln|\sec x + \tan x| + \sin x \cos x$$

$$= \sin x - \cos x \cdot \ln|\sec x + \tan x|$$

Jadi solusi umum persamaan diferensial :

$$y = y_h + y_p$$

$$= C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

$$= A \sin x + B \cos x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

Contoh : Konstruksilah fungsi Green dari persamaan diferensial

$$\left(4D^2 + 4D + 1\right)y = xe^{-x/2}\sin x$$, kemudian tentukan solusi umumnya !

Penyelesaian : Persamaan diferensial dapat ditulis sebagai :

$$\left(D^2 + D + \frac{1}{4}\right)y = \frac{1}{4}xe^{-x/2}\sin x$$

Persamaan diferensial homogen : $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Persamaan karakteristik : $m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$m_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

Solusi homogen : $y_h = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 xe^{-\frac{1}{2}x}$

dengan $\begin{cases} y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \\ y_2(x) = xe^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \\ y_2' = e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

Fungsi Green :

$$G(x,t)=\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}x}te^{-\frac{1}{2}t}}{\left(e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}\right)-\left(-\frac{1}{2}te^{-t}\right)}$$

$$=\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}x}te^{-\frac{1}{2}t}}{e^{-t}}$$

$$=xe^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}x}te^{\frac{1}{2}t}$$

$$h(t)=\frac{te^{-\frac{1}{2}t}\sin t}{4}$$

Dengan memilih $x_0=0$, maka solusi khusus :

$$y_p=\int_0^x\left(xe^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}x}te^{\frac{1}{2}t}\right)\frac{te^{-\frac{1}{2}t}\sin t}{4}dt$$

$$=\int_0^x\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}t\sin t}{4}dt-\int_0^x\frac{e^{-\frac{1}{2}x}t^2\sin t}{4}dt$$

$$=\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}}{4}\int_0^x t\sin t\,dt-\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4}\int_0^x t^2\sin t\,dt$$

$$=\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}}{4}(\sin t-t\cos t)\Big|_0^x-\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4}\left(-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t\right)\Big|_0^x$$

$$=\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}}{4}(\sin x-x\cos x)-\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4}\left(-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x-2\right)$$

$$=\frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x}\sin x-\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{1}{2}x}\cos x+\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{1}{2}x}\cos x-\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}\sin x$$
$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cos x+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$=-\frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x}\sin x-\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}\sin x-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cos x+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

Jadi solusi umum persamaan diferensial :

$$y = y_h + y_p$$

$$= C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{4} x e^{-\frac{1}{2}x} \sin x - \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x} \sin x$$

$$- \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cos x + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x} (A + Bx - x \sin x - 2 \cos x)$$

Contoh : Konstruksilah fungsi Green dari persamaan diferensial : $x^2 y'' + xy' = x^2 + x$, $x > 0$, kemudian tentukan solusi umumnya !

Penyelesaian : Dalam bentuk (3.1) persamaan diferensial menjadi :

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{x^2 + x}{x^2} \ , \ x > 0$$

Disini $h(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2}$

Persamaan diferensial Cauchy homogen : $x^2 y'' + xy' = 0$

Persamaan Pembantu : $m^2 + (1-1)m + 0 = 0$

$$m^2 = 0$$
$$m_{1,2} = 0$$

Solusi homogen : $y_h = C_1 + C_2 \ln x$

dengan $\begin{cases} y_1(x) = 1 \\ y_2(x) = \ln x \end{cases}$

$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Fungsi Green :

$$G(x,t) = \frac{\ln x - \ln t}{\frac{1}{t} - 0} = t \ln x - t \ln t$$

$$h(t) = \frac{t^2 + t}{t^2}$$

Dengan memilih $x_0 = 1$, maka solusi khusus :

$$\begin{aligned}
y_p &= \int_1^x (t \ln x - t \ln t)\frac{t^2 + t}{t^2}\,dt \\
&= \int_1^x t \ln x\left(1 + \frac{1}{t}\right)dt - \int_1^x t \ln t\left(1 + \frac{1}{t}\right)dt \\
&= \ln x \int_1^x (t+1)\,dt - \int_1^x t \ln t\,dt - \int_1^x \ln t\,dt \\
&= \ln x\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\Big|_1^x - \left(\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2\right)\Big|_1^x - (t \ln t - t)\Big|_1^x \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right)\ln x - \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right) - (x \ln x - x + 1) \\
&= -\frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4} + x
\end{aligned}$$

Solusi umum persamaan diferensial :

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p \\
&= C_1 + C_2 \ln x - \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{5}{4} \\
y &= A + B \ln x + \frac{1}{4}x^2 + x
\end{aligned}$$

IV. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan, maka diperoleh kesimpulan bahwa melalui metode variasi parameter kita dapat mengkonstruksi fungsi Green suatu persamaan diferensial linier orde dua. Tujuannya kita dapat menentukan solusi persamaan diferensialnya untuk fungsi h sebarang.

DAFTAR PUSTAKA

1. Brauer. F., Nohel, J.A., Problems and Solutions in Ordinary Differential Equation, W.A. Benjamin, New York, 1968, 131-136
2. Martono, K., Kalkulus, ITB, 1992.
3. Ostberg, D.R., Perkins, F.W., An Introduction to Linear Analysis, Addison-Wesley, Donn Mills, 1996, 126-154
4. Roach, G.F., Green's Functions, 2, Cambridge University Press, London, 1982, 141-148
5. Carrier, G.F., Pearson, C.E. , Ordinary Differential Equations, SIAM, 1991, 64-68