MAKALAH

Graf Transitif Titik

Disusun oleh :

Iwan Sugiarto, SSi, MSi

Maret 2004
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Katolik Parahyangan
Bandung

Graf Transitif Titik

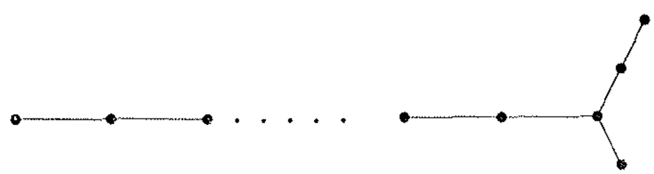
Oleh: Iwan Sugiarto

1. Pendahuluan

Automorfisma graf Γ adalah permutasi π dari $V\Gamma$ yang memiliki sifat $\{u,v\} \in E\Gamma$ jika dan hanya jika $\{\pi(u),\pi(v)\} \in E\Gamma$. Himpunan semua automorfisma dari graf Γ dengan operasi komposisi disebut automorfisma grup dari Γ yang dinyatakan dengan $Aut(\Gamma)$.

Sebagai contoh :

1. Automorfisma grup dari graf lengkap K_n memuat n! permutasi
2. Untuk $n \geq 7$, pohon dengan n titik seperi yang ditunjukkan pada gambar dibawah ini, memiliki automorfisma grup yang trivial yaitu hanya memuat permutasi identitas.



Dapat dibuktikan bahwa :

1. Jika Γ pohon dengan $|V\Gamma| \langle \infty$ maka Γ memiliki titik v yang disebut sentroid dengan v ditetapkan oleh setiap automorfisma dari Γ atau Γ memiliki sisi $\{x,y\}$ yang disebut bisentroid dengan sisi $\{x,y\}$ ditetapkan setiap automorfisma dari Γ.
2. Misal A matriks adjacency dari graf Γ dan π permutasi dari $V\Gamma$. Maka π automorfisma dari Γ jika dan hanya jika PA = AP dengan P matriks permutasi yang mewakili π.

2. Graf Transitif Titik

Graf Γ dikatakan transitif titik jika $Aut(\Gamma)$ beraksi transitif pada $V\Gamma$ yaitu Γ hanya memiliki 1 orbit. Ini berarti bahwa $\forall u,v \in V\Gamma, \exists \pi \in Aut(\Gamma) \ni \pi(u) = v$. Sebagai akibatnya jika Γ transitif titik maka Γ merupakan graf teratur, karena setiap titik berderajat sama.

Kita tulis $Aut(\Gamma) = G$ dan stabilizer subgrup bagi titik v didefinisikan sebagai subgrup dari G yang memuat automorfisma – automorfisma graf Γ dengan v tetap. Stabilizer subgrup bagi titik v dinyatakan dengan G_v. Indeks dari G_v di G dinyatakan dengan $|G : G_v|$ yang diberikan dengan persamaan :

$$|G : G_v| = \frac{|G|}{|G_v|}$$

Jika Γ transitif titik maka $|G : G_v| = |V\Gamma|$. Jika untuk setiap G_v merupakan grup identitas, maka setiap unsur dari G (automorfisma graf Γ) tidak menetapkan setiap titik. Hal demikian disebut G beraksi regular pada $V\Gamma$. Akibatnya $|G| = |V\Gamma|$.

3. Graf Cayley

Misal G grup hingga dengan unsur identitas 1 dan Ω himpunan pembangun bagi G yang memiliki sifat :

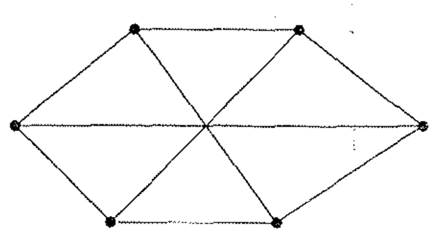
1. $x \in \Omega \Rightarrow x^{-1} \in \Omega$
2. $1 \in \Omega$

Kita definisikan graf Cayley $\Gamma = \Gamma(G, \Omega)$ sebagai graf sederhana dengan $V\Gamma = G$ dan $E\Gamma = \{\{g, h\} | g^{-1}h \in \Omega\}$.

Sebagai contoh : Pilih G grup simetri S_3 dan $\Omega = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, maka graf Cayley $\Gamma(G, \Omega)$ isomorfik dengan $K_{3,3}$, dimana :

$V\Gamma = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}\ dan$

$E\Gamma = \{\{(1),(12)\}, \{(1),(13)\}, \{(1),(23)\}, \{(12),(123)\}, \{(12),(132)\}, \{(13),(123)\}, \{(13),(132)\}, \{(23),(123)\}, \{(23),(132)\}\}$



Graf Cayley $\Gamma = \Gamma(G, \Omega)$ merupakan transitif titik , tetapi tidak setiap graf transitif titik merupakan graf Cayley. Sebagai contoh : graf Petersen O_3.

Dapat dibuktikan bahwa :

1. Jika π automorfisma dari grup G sedemikian sehingga $\pi(\Omega) = \Omega$, maka π yang dianggap sebagi permutasi dari $V\Gamma$ merupakan automorfisma graf Γ dengan titik 1 tetap.

2. Misal Γ graf terhubung. Maka subgrup H dari $Aut(\Gamma)$ beraksi regular pada $V\Gamma$ jika dan hanya jika Γ isomorfik dengan graf Cayley $\Gamma(H,\Omega)$ untuk suatu Ω yang membangun H.

Pernyataan (2) menunjukkan bahwa jika $Aut(\Gamma)$ beraksi regular pada $V\Gamma$ maka Γ merupakan graf Cayley $\Gamma(Aut(\Gamma),\Omega)$.

Adapun sifat-sifat graf transitif titik :

1. Jika Γ graf transitif titik dengan $Aut(\Gamma)$ gurp komutatif maka $Aut(\Gamma)$ beraksi regular pada $V\Gamma$.
2. Misal Γ graf transitif titik yang berderajat k dan χ nilai eigen dari Γ. Jika $|V\Gamma|$ ganjil maka $\chi = k$ dan jika $|V\Gamma|$ genap maka χ salah satu dari bilangan-bilangan $2\alpha - k$ dengan $0 \le \alpha \le k$.

4. Referensi

- [Biggs], Norman Biggs, "*Algebraic Graph Theory*", Secon edition, Cambridge University Press, 1996.
- [KOLMAN, BUSBY & ROSS] Bernard Kolman, Robert C Busby, Sharon Ross, "*Discrete Mathematical Structures*", Third edition, Prentice Hall , 1996.
- [Brualdi], Richard A. Brualdi, "*Introductory Combinatorics*", Third Edition, North Holland, 1979.