MAKALAH

ANALISIS MODEL SISTEM PENDULUM YANG DIKENAKAN GAYA LUAR $f = \sin \omega_o t$ (DENGAN BANTUAN PERANGKAT LUNAK MAPLE

Disusun oleh :

Iwan Sugiarto, SSi, MSi

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Katolik Parahyangan
Bandung
2004

ANALISIS MODEL SISTEM PENDULUM YANG DIKENAKAN GAYA LUAR $f = \sin\omega_o t$ (DENGAN BANTUAN PERANGKAT LUNAK MAPLE)

(Oleh; Iwan Sugiarto)

I. Pendahuluan

Banyak sekali hasil rumusan matematika (model matematika) proses-proses engineering suatu persamaan diferensial. Demikian pula dengan hokum-hukum alam, hubungan antara salah satu besaran fisika terhadap satu/beberapa besaran fisika lainnya pada umumnya tidak dapat secara langsung dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi, tetapi dalam bentuk laju perubahan. Sebagai gambaran, kita tinjau model matematika yang berkaitan dengan sistem pendulum.

Model sistem pendulum dengan gaya luar $f = \sin\omega_o t$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = f \\ \theta(0) = \theta_o, \dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

dimana $\theta(t)$ merupakan simpangan pendulum terhadap waktu t. θ sangat kecil.

II. Kasus $\omega_o = 0$ --- Sistem Pendulum Tanpa Gaya Luar.

```
restart: pendul :=Diff(theta(t),t,t)+omega^2*theta(t);
```

$$pendul := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t)\right) + \omega^2\,\theta(t)$$

```
> jawab:=dsolve(pendul);
```

$$jawab := \theta(t) = \_C1\cos(\omega t) + \_C2\sin(\omega t)$$

```
> solusi:=op(2,%);
```

$$solusi := \_C1\cos(\omega t) + \_C2\sin(\omega t)$$

```
> cek:=simplify (value(subs(theta(t)=solusi,pendul)));
```

$$cek := 0$$

```
> C1:=solve(simplify(subs(t=0,solusi-theta[o])),_C1);
```

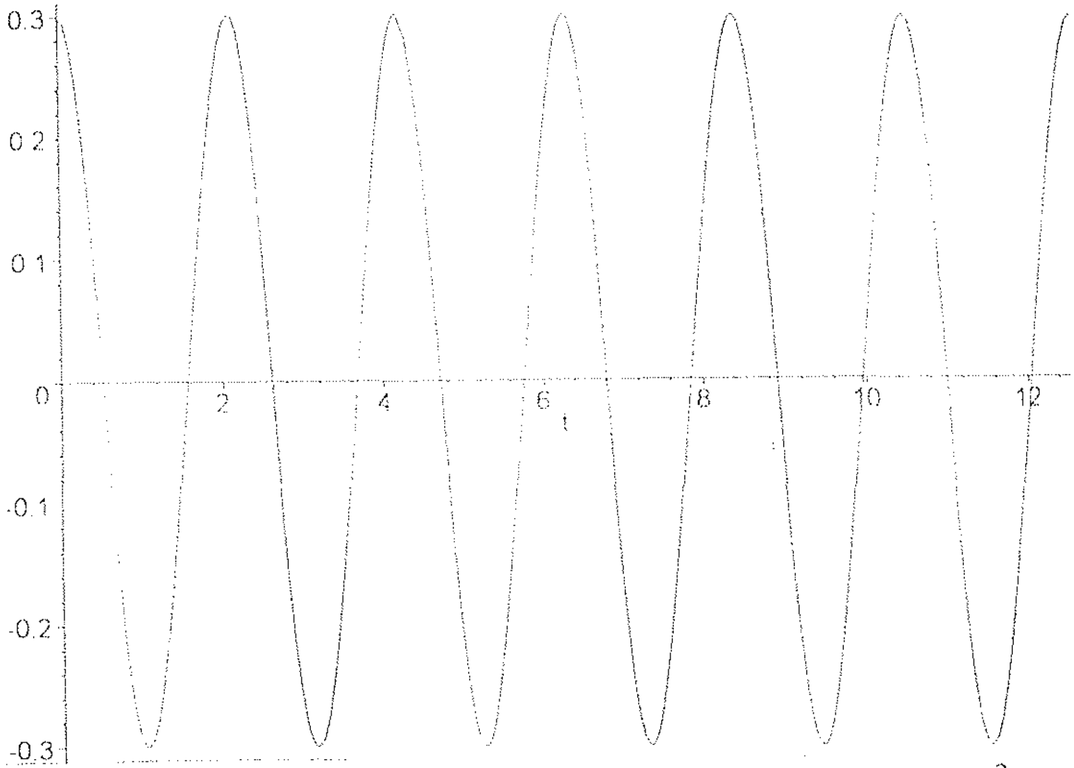
$$C1 := \theta_o$$

```
> C2:=solve(simplify(subs(t=0,diff(solusi,t))),_C2);
```

$$C2 := 0$$

```
> sol:=subs(_C1=C1,_C2=C2,solusi);
```

$$sol := \theta_o\cos(\omega t)$$



Dengan memilih $\theta_o = 0{,}3$ dan $\omega = 3$, frekuensi getaran pendulum : $\dfrac{3}{2\pi}$ Hertz dan berperioda $\dfrac{2\pi}{3}$ detik. Gerak sistem tersebut dinamakan osilasi harmonik.

Pendulum melakukan $\dfrac{\omega}{2\pi}$ getaran tiap detik. (frekuensi getaran = $\dfrac{\omega}{2\pi}$ hertz).

Akan ditentukan bidang fase, dengan memisalkan $x = \theta$ dan $y = \dot{x}$. Maka diperoleh sistem PD: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$. Sistem tsb memiliki solusi : $\omega^2 x^2 + y^2 = c$. Lintasan berupa kurva tertutup (berbentuk ellips) mengelilingi titik (0,0) sebagai titik pusat.

III. Kasus $\omega = \omega_o$ --- Sistem Pendulum Dengan Gaya Luar $f = \sin \omega_o t$.

```
> restart: pendul :=Diff(theta(t),t,t)+omega^2*theta(t);
```

$$pendul := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t)\right) + \omega^2\,\theta(t)$$

```
> jawab:=dsolve(pendul-sin(omega*t));
```

$$jawab := \theta(t) = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\omega t\right)\cos(\omega t)}{\omega^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos(\omega t)^2\sin(\omega t)}{\omega^2} + \_C1\cos(\omega t) + \_C2\sin(\omega t)$$

$solusi :=$

$$-\frac{\left(-\frac{1}{2}\cos(\omega t)\sin(\omega t)+\frac{1}{2}\omega t\right)\cos(\omega t)}{\omega^2}-\frac{1}{2}\frac{\cos(\omega t)^2\sin(\omega t)}{\omega^2}+\_C1\cos(\omega t)+\_C2\sin(\omega t)$$

```
> cek:=simplify (value(subs(theta(t)=solusi,pendul)));
```

$$cek := \sin(\omega t)$$

```
> C1:=solve(simplify(subs(t=0,solusi-theta[o])),_C1);
```

$$C1 := \theta_o$$

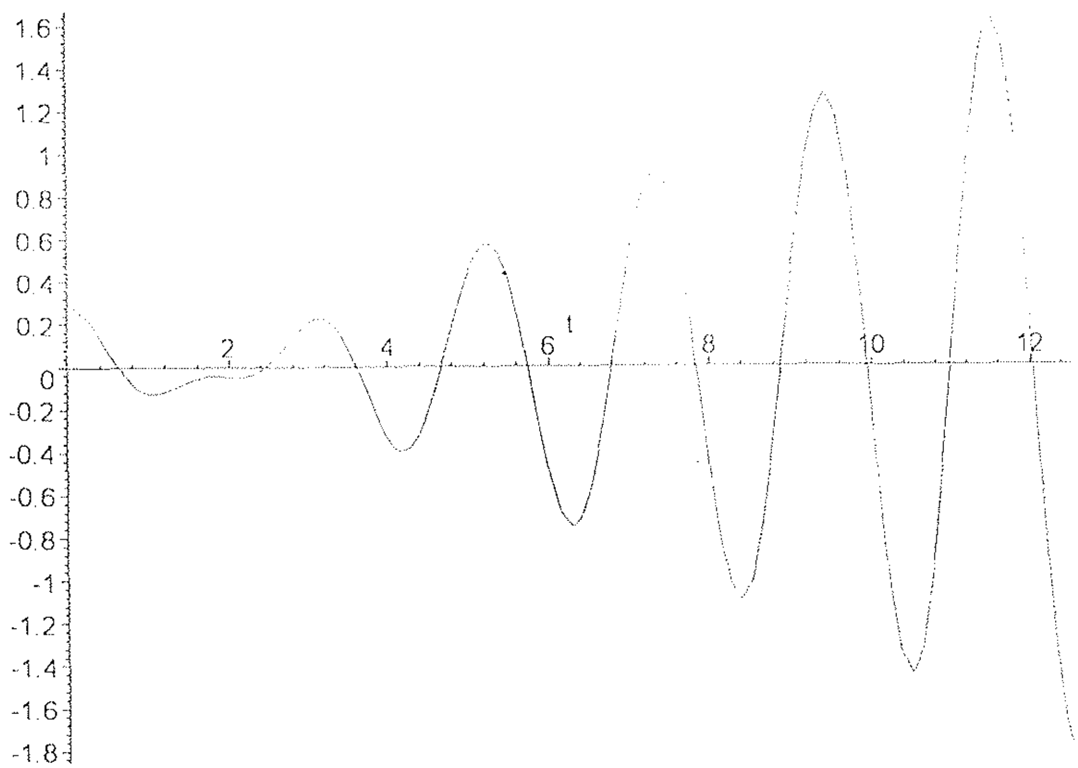
```
> C2:=solve(simplify(subs(t=0,diff(solusi,t)-0)),_C2);
```

$$C2 := \frac{1}{2}\frac{1}{\omega^2}$$

```
> sol:=subs(_C1=C1,_C2=C2,solusi);
```

$sol :=$

$$-\frac{\left(-\frac{1}{2}\cos(\omega t)\sin(\omega t)+\frac{1}{2}\omega t\right)\cos(\omega t)}{\omega^2}-\frac{1}{2}\frac{\cos(\omega t)^2\sin(\omega t)}{\omega^2}+\theta_o\cos(\omega t)+\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}$$



Dengan memilih $\theta_o = 0{,}3$, $\omega = \omega_o = 3$, terlihat bahwa θ makin lama makin besar. Didalam praktek, ini berarti sistem dengan redaman yang sangat kecil dapat mengalami getaran besar yang dapat mengahncurkan system. Gejala perangsangan osilasi besar dengan memasangkan frekuensi masukan ω_o dan frekuensi wajar ω yaitu $\omega = \omega_o$, dikenal sebagai resonansi. Jadi grafik di atas merupakan solusi khusus (simpangan pendulum) dalam kasus resonansi. Pada kasus ini, osilasinya tidak stabil.

IV. Kasus $\omega \neq \omega_o$ --- Sistem Pendulum Dengan Gaya Luar $f = \sin \omega_o t$.

```
> restart: pendul :=Diff(theta(t),t,t)+omega^2*theta(t);
```

$$pendul := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t)\right) + \omega^2\,\theta(t)$$

```
> jawab:=dsolve(pendul=sin(omega[0]*t));
```

$$jawab := \theta(t) = -\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\sin((\omega-\omega_0)\,t)}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{2}\frac{\sin((\omega+\omega_0)\,t)}{\omega+\omega_0}\right)\cos(\omega\,t)}{\omega} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos((\omega+\omega_0)\,t)}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{\cos((\omega-\omega_0)\,t)}{\omega-\omega_0}\right)\sin(\omega\,t)}{\omega} + \_C1\cos(\omega\,t) + \_C2\sin(\omega\,t)$$

```
> solusi:=op(2,%);
```

$$solusi := -\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\sin((\omega-\omega_0)\,t)}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{2}\frac{\sin((\omega+\omega_0)\,t)}{\omega+\omega_0}\right)\cos(\omega\,t)}{\omega} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos((\omega+\omega_0)\,t)}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{\cos((\omega-\omega_0)\,t)}{\omega-\omega_0}\right)\sin(\omega\,t)}{\omega} + \_C1\cos(\omega\,t) + \_C2\sin(\omega\,t)$$

```
> cek:=simplify (expand(value(subs(theta(t)=solusi,pendul))));
```

$$cek := \sin(\omega_0\,t)$$

```
> C1:=solve(simplify(subs(t=0,solusi-theta[o])),_C1);
```

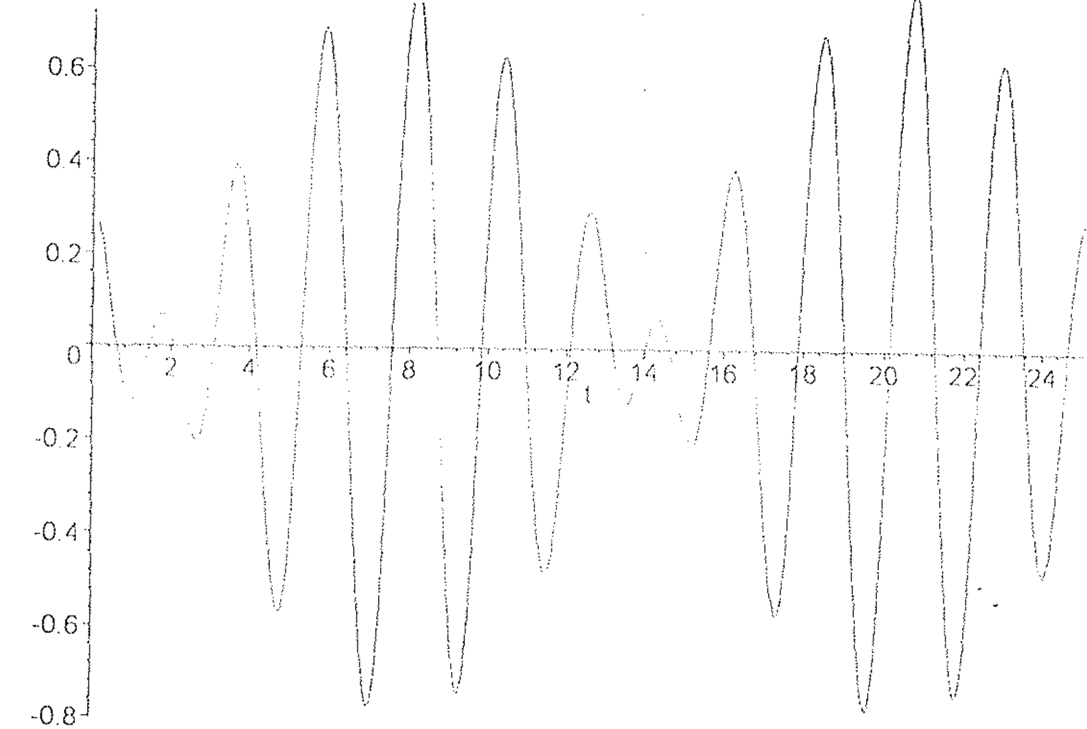
$$C1 := \theta_o$$

```
> C2:=solve(simplify(subs(t=0,diff(solusi,t)-0)),_C2);
```

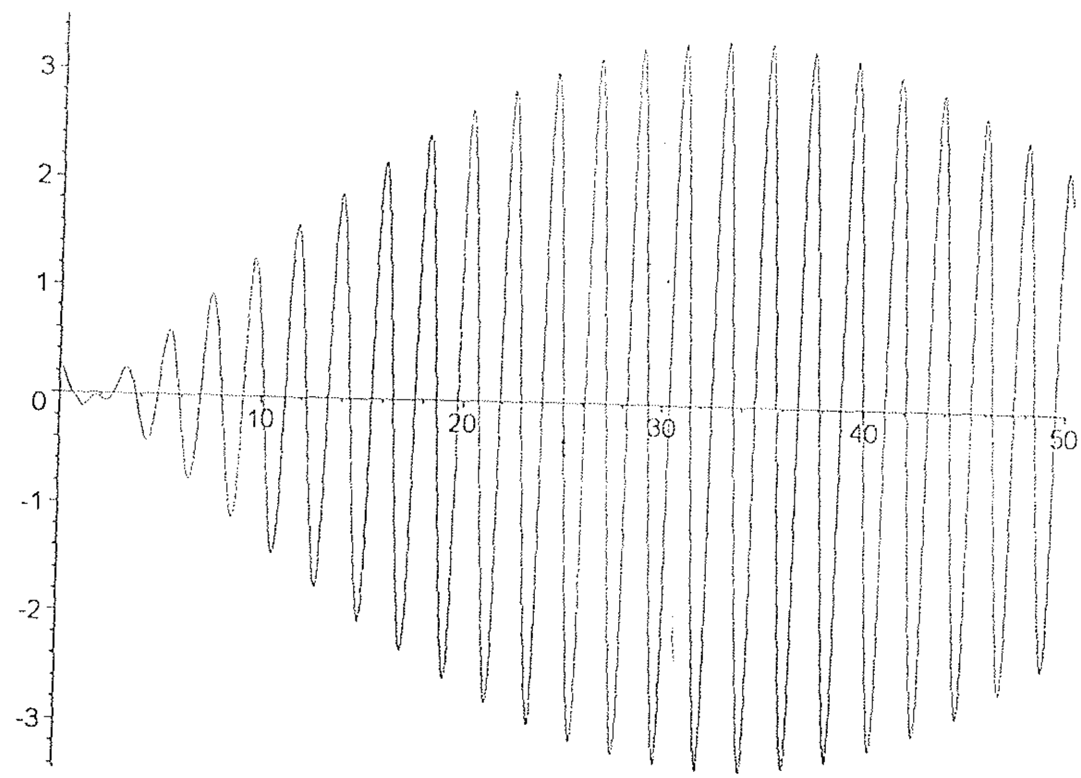
$$C2 := -\frac{\omega_0}{(\omega-\omega_0)\,(\omega+\omega_0)\,\omega}$$

```
> sol:=subs(_C1=C1,_C2=C2,solusi);
```

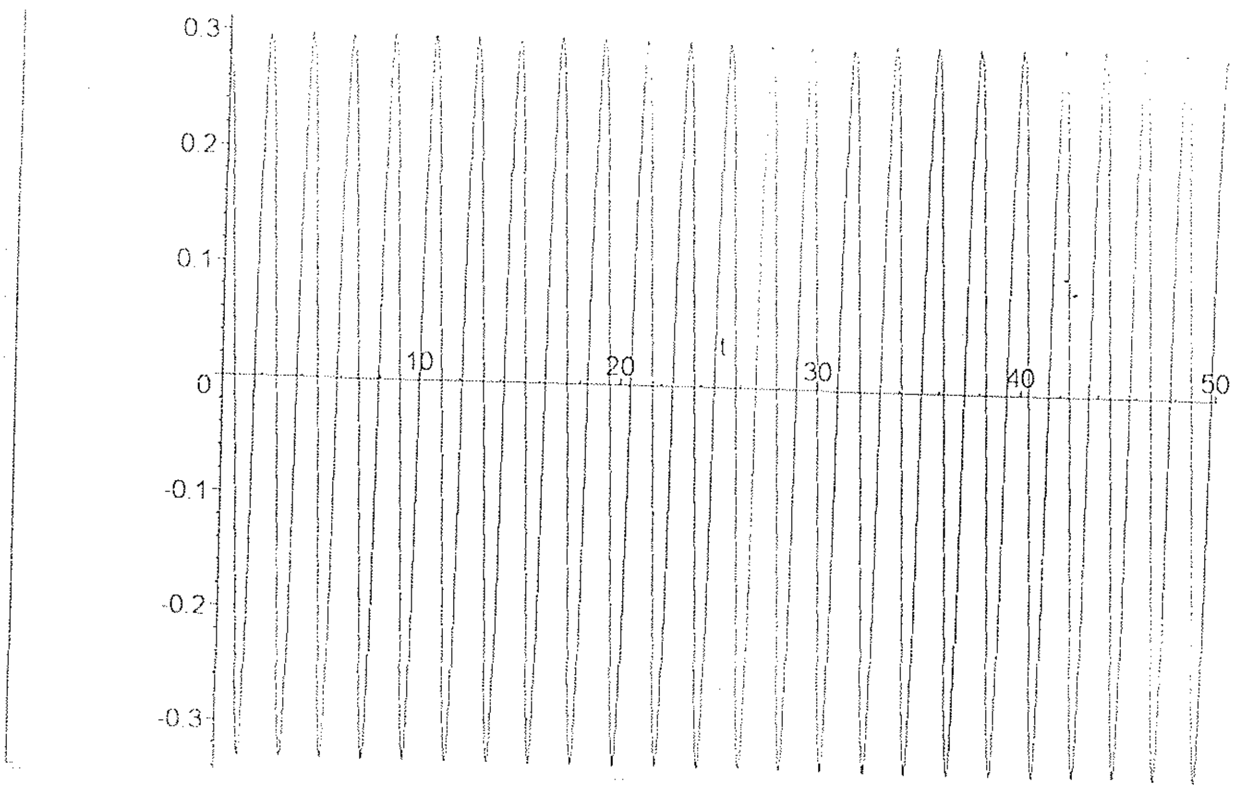
$$sol := -\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\sin((\omega-\omega_0)\,t)}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{2}\frac{\sin((\omega+\omega_0)\,t)}{\omega+\omega_0}\right)\cos(\omega\,t)}{\omega} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos((\omega+\omega_0)\,t)}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{\cos((\omega-\omega_0)\,t)}{\omega-\omega_0}\right)\sin(\omega\,t)}{\omega} + \theta_o\cos(\omega\,t) - \frac{\omega_0\sin(\omega\,t)}{(\omega-\omega_0)\,(\omega+\omega_0)\,\omega}$$



Dengan memilih $\theta_o = 0{,}3$, $\omega = 3$, $\omega_o = 2{,}5$, terlihat bahwa osilasi di atas mirip dengan osilasi denyutan jantung, dan osilasi cukup stabil dan berperiodik.



Dengan memilih $\theta_o = 0{,}3$, $\omega = 3$, $\omega_o = 2{,}9$, karena ω dekat pada ω_o, maka selisih $|\omega - \omega_o|$ kecil, sehingga periode fungsi sinus yang terakhir adalah besar. Osilasi di atas merupakan osilasi dengan gaya luar tak teredam bila selisih antara frekuensi masukan ω_o dan frekuensi wajar ω kecil. Terlihat bahwa osilasi di atas mirip dengan osilasi denyutan jantung, dan osilasi cukup stabil dan berperiodik.



Dengan memilih $\theta_o = 0{,}3$, $\omega = 3$, $\omega_o = 6$.

Dari grafik simpangan pendulum terhadap waktu t, terlihat bahwa system berosilasi harmonic, stabil dan berperiodik.

V. Kesimpulan

a. Kasus $\omega_o = 0$ (tanpa gaya luar) : system berosilasi harmonic, stabil dan berperiodik.

b. Kasus $\omega = \omega_o$: Osilasi tidak stabil. θ makin lama makin besar seiring bertambahnya waktu. Ini menunjukkan system mengalami getaran besar yang dapat mengahncurkan system.

c. Kasus $\omega \neq \omega_o$:

(i) $\omega < \omega_o$: sistem berosilasi harmonik, stabil, dan berperiodik.

(ii) $\omega > \omega_o$: sistem berosilasi mirip dengan deyutan jantung.

(iii) $\omega \approx \omega_o$ (ω cukup dekat pada ω_o) : sistem berosilasi mirip dengan denyutan jantung dan periode fungsi sinus yang terakhir sangat besar.

VI . Daftar Pustaka

1. Brauer, F., Nohel, J. A., Problems and Solutions in Ordinary Differential Equations, W. A. Benjamin, New York, 1968, 131-136.

2. Ostberg, D. R., Perkins, F. W., An Introduction to Linear Analysis, Addison - Wesley, Don Mills, 1966, 126 - 154.

3. Carrier, G. F., Pearson, C. E., Ordinary Differential Equations, SIAM, 1991