

SKRIPSI

SUDOKU DENGAN PEMROGRAMAN LINEAR INTEGER



YESAYA DHARMAWAN

NPM: 6162001143

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2024

FINAL PROJECT

SUDOKU WITH INTEGER LINEAR PROGRAMMING



YESAYA DHARMAWAN

NPM: 6162001143

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2024**

LEMBAR PENGESAHAN

SUDOKU DENGAN PEMROGRAMAN LINEAR INTEGER

Yesaya Dharmawan

NPM: 6162001143

Telah lulus ujian skripsi pada 15 Januari 2024 dengan penguji:
Farah Kristiani, Ph.D. dan Dr. Andreas Parama Wijaya

Bandung, 21 Januari 2024

Menyetujui,

Pembimbing 1

Pembimbing 2

Iwan Sugiarto, M.Si.

Dr. Daniel Salim

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Jonathan Hoseana, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

SUDOKU DENGAN PEMROGRAMAN LINEAR INTEGER

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
21 Januari 2024



Yesaya Dharmawan
NPM: 6162001143

ABSTRAK

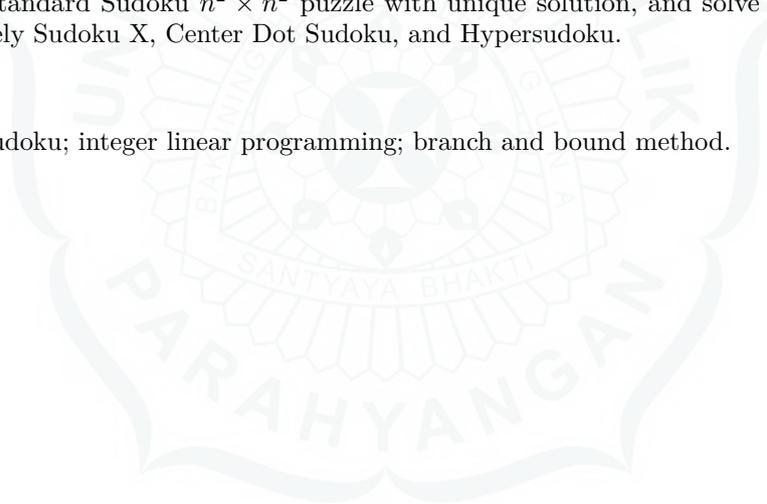
Sudoku merupakan permainan teka-teki logika yang umumnya berukuran 9×9 . Aturan standar dari Sudoku adalah mengisi seluruh kisi yang tersedia sebagaimana sehingga masing-masing sel dalam setiap baris, kolom, dan subkisi berisi satu angka dari 1 sampai 9. Selain ukuran tersebut, teka-teki Sudoku juga dapat berukuran lain, yaitu $n^2 \times n^2$ dengan n adalah integer lebih dari satu. Untuk menyelesaikan masalah Sudoku dapat digunakan pemrograman linear integer (ILP) dengan metode *branch and bound*. Pada skripsi ini, dibahas penyelesaian teka-teki Sudoku standar 4×4 dan perumusannya yaitu Sudoku standar $n^2 \times n^2$ dengan mengubah aturan-aturan ke dalam model matematis. Selain penyelesaian masalah, dibahas juga cara pembuatan masalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$ dengan solusi unik. Kemudian, diakhiri dengan penambahan kendala pada model matematis untuk menangani variasi aturan Sudoku 9×9 , yaitu Sudoku X, Sudoku *Center Dot*, dan Hypersudoku. Penyelesaian permasalahan Sudoku dengan menggunakan ILP merupakan hal yang rumit, karena diperlukan banyaknya iterasi dan variabel yang digunakan. Oleh karena itu, seluruh pengerjaan diselesaikan dengan menggunakan bantuan program Python. Program yang dibuat untuk menemukan solusi dari permasalahan Sudoku standar $n^2 \times n^2$, membuat permasalahan permasalahan Sudoku standar $n^2 \times n^2$ dengan solusi unik, dan menyelesaikan permasalahan variasi aturan Sudoku 9×9 , yaitu Sudoku X, Sudoku *Center Dot*, dan Hypersudoku.

Kata-kata kunci: Sudoku; pemrograman linear integer; metode *branch and bound*.

ABSTRACT

Sudoku is a well known puzzle that commonly found in 9×9 dimension. The standard rules of this puzzle is to fill the grid as so each row, column, and subgrid filled with one digit from 1 to 9. Sudoku can also be found in other dimensions as $n^2 \times n^2$ with n is an integer larger than one. Integer linear programming with branch and bound method is used to solve this Sudoku puzzle problem. In this thesis, we discussed about solving standard Sudoku 4×4 and then generalize it to standard Sudoku $n^2 \times n^2$ by altering the rules to mathematical model. Furthermore, standard Sudoku $n^2 \times n^2$ puzzle is created by using simple method. Lastly, several variation of Sudoku 9×9 , namely Sudoku X, Center Dot Sudoku, and Hypersudoku also can be solved using ILP by giving additional constraint to the mathematical model. Solving Sudoku with ILP is quite tricky because it requires many iteration and variable that used in it. Therefore, this thesis aims to complete all the process using Python. The program is made to solve standard Sudoku $n^2 \times n^2$ puzzle, make standard Sudoku $n^2 \times n^2$ puzzle with unique solution, and solve Sudoku 9×9 variation, namely Sudoku X, Center Dot Sudoku, and Hypersudoku.

Keywords: Sudoku; integer linear programming; branch and bound method.



Berusahalah sebaik mungkin karena usaha tidak membohongi hasil.



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas penyertaan, tuntunan, dan berkat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik. Skripsi yang berjudul “Sudoku dengan Pemrograman Linear Integer” disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi Strata-1 Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan. Dalam proses penyelesaian skripsi ini, penulis menemukan banyak sekali rintangan yang mungkin tidak dapat penulis lewati tanpa dukungan dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orangtua dan kakak-kakak yang selalu mendukung dan mendoakan penulis selama proses penyelesaian skripsi ini.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen pembimbing kedua yang bersedia meluangkan waktu untuk membimbing, memberi masukan, ide, dan ilmu kepada penulis selama proses penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu Farah Kristiani, Ph.D. selaku dosen penguji pertama dan Bapak Dr. Andreas Parama Wijaya selaku dosen penguji kedua yang telah memberikan kritik, saran, dan ilmu pada penulis sehingga skripsi ini menjadi lebih baik.
4. Seluruh dosen Program Studi Matematika atas segala ilmu dan bimbingan yang diberikan kepada penulis selama proses perkuliahan, serta staf Tata Usaha dan karyawan FTIS atas bantuannya dalam melengkapi segala hal yang diperlukan selama proses perkuliahan.
5. Ivana Aprilia dan keluarga yang selalu mendukung, mendoakan, menjadi tempat berkeluh kesah yang baik, dan berjuang bersama dalam proses penyelesaian skripsi ini.
6. Teman-teman SMA, khususnya “UYEAH” yang memberi semangat dan menjadi tempat meluapkan keluh kesah selama proses perkuliahan.
7. Teman-teman Matematika UNPAR angkatan 2020, khususnya “wa ngambis” yang memberi dukungan dan semangat selama proses perkuliahan.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-satu atas bantuan, dukungan, dan doanya.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, segala kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk perbaikan di masa mendatang. Semoga skripsi ini dapat memberi manfaat bagi para pembaca dan dapat memberi kontribusi positif bagi perkembangan ilmu pengetahuan di bidang Matematika.

Bandung, 21 Januari 2024

Yesaya Dharmawan

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	xi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	2
1.5 Batasan Masalah	3
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Pemrograman Linear (<i>Linear Programming</i>)	4
2.2 Pemrograman Linear Integer (<i>Integer Linear Programming</i>)	8
2.3 Metode <i>Branch and Bound</i>	8
3 PENYELESAIAN PERMASALAHAN SUDOKU STANDAR	11
3.1 Sudoku 4×4	11
3.1.1 Pemodelan Matematis	13
3.1.2 Penerapan Metode <i>Branch and Bound</i>	16
3.2 Sudoku $n^2 \times n^2$	18
4 PEMBUATAN MASALAH SUDOKU STANDAR	20
4.1 Langkah-langkah Pembuatan Masalah Sudoku Standar	20
4.2 Persiapan <i>library</i> dan Pembuatan Fungsi Pembantu	20
4.3 Pembuatan Fungsi Utama	22
4.4 Simulasi Program	23
5 VARIASI SUDOKU BERDASARKAN ATURANNYA	24
5.1 Sudoku X	24
5.2 Sudoku <i>Center Dot</i>	25
5.3 Hypersudoku	26
6 KESIMPULAN DAN SARAN	29
6.1 Kesimpulan	29
6.2 Saran	29
DAFTAR REFERENSI	30
A KODE PROGRAM	31

DAFTAR GAMBAR

3.1	Subkisi pada Sudoku 4×4	11
3.2	Kisi pada Sudoku 4×4	11
3.3	Nama sel pada Sudoku 4×4	12
3.4	Masalah Sudoku standar 4×4	12
3.5	Pengerjaan sel (1, 2) dari masalah Sudoku pada Gambar 3.4	13
3.6	Pengerjaan 2 dari masalah Sudoku pada Gambar 3.4	13
3.7	Solusi dari masalah Sudoku pada Gambar 3.4	14
3.8	Masalah Sudoku standar 4×4 (Tidak Unik)	15
3.9	Pengerjaan 1 dari masalah Sudoku pada Gambar 3.8	15
3.10	Solusi 1 dari masalah Sudoku pada Gambar 3.8	16
3.11	Solusi 2 dari masalah Sudoku pada Gambar 3.8	16
3.12	Masalah Sudoku standar 9×9	19
3.13	Masalah Sudoku standar 16×16	19
3.14	Solusi Sudoku pada Gambar 3.12	19
4.1	Simulasi program 4×4	23
4.2	Simulasi program 9×9	23
5.1	Sudoku X 9×9	24
5.2	Contoh masalah dan solusi Sudoku X 9×9	25
5.3	Kisi Sudoku <i>Center Dot</i> 9×9	26
5.4	Contoh masalah dan solusi Sudoku <i>Center Dot</i> 9×9	26
5.5	Kisi Hypersudoku 9×9	27
5.6	Contoh masalah dan solusi Hypersudoku 9×9	27

DAFTAR TABEL

2.1	Tabel Simpleks ke-1 (LP)	6
2.2	Tabel Simpleks ke-2 (LP)	7
2.3	Tabel Simpleks ke-3 (LP)	7
2.4	Tabel Simpleks ke-4 (LP)	7



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Permainan Sudoku yang sering ditemui saat ini diciptakan oleh seorang arsitek bernama Howard Garns. Permainan teka-teki tersebut pertama kali diterbitkan pada tahun 1979 di USA pada majalah yang berjudul “*Dell Pencil Puzzles and Word Games*” [1] dan disebut “*Number Place*”. Hal ini terjadi karena permainannya menempatkan angka pada sel kosong pada kisi-kisi yang tersedia. Nama Sudoku pertama kali diberikan di Jepang pada tahun 1984.¹ Kemudian, Sudoku diperkenalkan kembali ke daerah Barat oleh seorang hakim dari New Zealand yang bernama Wayne Gould ketika ia menemukan permainan tersebut di toko buku saat bepergian ke Tokyo. Selama enam tahun, Gould mengulik program komputer untuk membuat masalah Sudoku dengan berbagai tingkat kesulitan karena ia melihat adanya potensi bisnis dalam permainan Sudoku. Pada akhirnya, ia berhasil membuat permainan teka-teki Sudoku terbit di koran “*The Times of London*” pada tahun 2004.

Pada umumnya, Sudoku muncul dengan ukuran kisi 9×9 . Aturan standar dari teka-teki ini sederhana, yaitu mengisi seluruh kisi yang tersedia sebagaimana sehingga masing-masing sel dalam setiap baris, kolom, dan subkisi 3×3 berisi satu angka dari 1 sampai 9 [2]. Ide dari teka-teki ini dapat juga diimplementasikan untuk variasi ukuran Sudoku lainnya, yaitu ukuran $n^2 \times n^2$ apapun, dengan n adalah integer lebih besar dari satu.

Permasalahan teka-teki Sudoku ini merupakan permasalahan yang telah ditelusuri cara penyelesaiannya dengan metode genetik, *particle swarm optimization algorithm*, *ant colony optimization algorithm*, dan *artificial bee colony optimization algorithm* [3]. Penelusuran dilakukan dengan pendekatan matematis, yaitu pemrograman linear integer dengan metode *branch and bound* [4]. Pemrograman linear integer atau dalam bahasa Inggris dikenal sebagai *integer linear programming* (ILP) merupakan teknik pemodelan matematis yang dapat membantu dalam menyelesaikan permasalahan optimasi. ILP merupakan pengembangan dari pemrograman linear (LP) yang bertujuan untuk mencari solusi optimal yang berupa integer tak negatif dari fungsi objektif yang berbentuk linear terhadap kendala-kendala linear yang ada. ILP dibutuhkan karena ada kasus tertentu di mana diperlukan solusi yang berupa integer. Salah satu contohnya adalah kasus yang memerlukan solusi optimal berupa bilangan biner, apabila solusi optimal berupa bilangan selain integer misalnya 0,75, tidak dapat disimpulkan solusi tersebut merujuk ke 0 atau 1 dan terlalu berisiko untuk langsung menyimpulkan dari solusi optimal tersebut. Dalam skripsi ini, dibahas penyelesaian teka-teki Sudoku standar 4×4 dan perumusannya, yaitu Sudoku standar $n^2 \times n^2$. Selain penyelesaian masalah

¹Sudoku adalah singkatan dari suuji wa dokushin ni kagiru yang berarti angka harus tunggal.

tersebut, dibahas juga langkah-langkah pembuatan masalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$. Kemudian, diakhiri dengan penambahan kendala pada model matematis untuk menangani beberapa variasi aturan Sudoku 9×9 seperti Sudoku X, Sudoku *Center Dot*, dan Hypersudoku.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, masalah yang akan dibahas dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menyelesaikan permasalahan Sudoku standar $n^2 \times n^2$ dengan ILP?
2. Bagaimana membuat program dengan bahasa pemrograman Python untuk pembuatan masalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$?
3. Bagaimana memodelkan permasalahan Sudoku 9×9 dengan variasi aturan seperti Sudoku X, Sudoku *Center Dot*, dan Hypersudoku.

1.3 Tujuan

Sesuai dengan rumusan masalah, maka tujuan dari skripsi ini adalah untuk menjawab rumusan masalah yang telah dipaparkan, yaitu:

1. Menyelesaikan permasalahan Sudoku standar $n^2 \times n^2$ dengan ILP.
2. Membuat program dengan bahasa pemrograman Python untuk pembuatan masalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$.
3. Memodelkan permasalahan Sudoku 9×9 dengan variasi aturan seperti Sudoku X, Sudoku *Center Dot*, dan Hypersudoku.

1.4 *State of the Art*

Masalah Sudoku dapat diselesaikan menggunakan pendekatan permasalahan ILP yang merupakan hasil pengembangan dari LP. LP adalah teknik pemodelan matematis dalam masalah optimasi yang paling sederhana, di mana setiap koefisien pada fungsi objektif dan kendala merupakan bilangan riil. Untuk menyelesaikan permasalahan LP, dapat digunakan metode simpleks yang telah dikembangkan oleh Dantzig [5]. Metode tersebut menghasilkan solusi optimal yang terbentuk dari nilai variabel keputusan yang merupakan bilangan riil. Namun untuk penerapannya, tidak semua masalah dapat diselesaikan dengan nilai variabel keputusan yang berupa bilangan riil. Oleh karena itu dikembangkanlah ILP yang pada solusi optimalnya, seluruh nilai dari variabel keputusannya berupa integer. Penyelesaian Sudoku menggunakan ILP telah dibahas pada beberapa jurnal, seperti oleh Mishra dkk. [3], Yu dkk. [6], Bartlett dkk. [1], dan Bukhari dkk. [4].

Jurnal-jurnal yang telah ada berfungsi untuk menganalisa kasus dan panduan untuk membuat model dari permasalahan Sudoku yang ditemukan. Dalam jurnalnya, Yu dkk. memodelkan aturan *Odd/Even* pada Sudoku 9×9 ke dalam formulasi permasalahan ILP, serta juga ditegaskan bahwa fungsi objektif dalam permasalahan Sudoku dapat bervariasi. Sedangkan, Bartlett dkk. memodelkan dalam bentuk yang lebih umum yaitu ukuran Sudoku $n^2 \times n^2$. Bartlett dkk. juga membahas variasi

aturan Sudoku 9×9 yaitu Sudoku X, *Four Square* Sudoku, *Four Pyramids* Sudoku, dan beberapa variasi lainnya. Terakhir, jurnal Bartlett dkk. juga menyinggung beberapa ide untuk membuat permasalahan Sudoku 9×9 . Bukhari [4] memberi perbandingan *runtime* penyelesaian masalah Sudoku menggunakan ILP dari perangkat lunak Python, Julia, dan Minizinc.

Dalam skripsi ini, dijelaskan secara rinci bagaimana model matematika dapat terbentuk dari aturan yang ada pada teka-teki Sudoku standar 4×4 dan kemudian dikembangkan ke model matematis untuk Sudoku standar $n^2 \times n^2$. Adapun pembuatan masalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$ menggunakan cara sederhana yang berbeda dengan metode yang dibahas pada [6]. Sebagai pengembangan dari [4], pada skripsi ini dibuat suatu program dengan bahasa pemrograman Python yang tak hanya untuk menyelesaikan permasalahan sudoku 9×9 tetapi dapat menyelesaikan masalah dan membuat masalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$. Terakhir, skripsi ini juga menambahkan kendala pemodelan matematis untuk menyelesaikan *Center Dot* Sudoku 9×9 .

1.5 Batasan Masalah

Untuk memfokuskan pengkajian dalam penyelesaian masalah Sudoku ini diperlukan beberapa batasan, yaitu:

1. Metode pemrograman linear integer yang digunakan hanya metode *branch and bound*.
2. Penggunaan metode *branch and bound* secara manual hanya dilakukan pada penyelesaian masalah Sudoku standar 4×4 .
3. Tidak dilakukan peninjauan cara pembuatan masalah Sudoku selain cara yang digunakan pada skripsi.
4. Variasi Sudoku yang dibahas hanyalah Sudoku standar $n^2 \times n^2$, Sudoku 9×9 X, Sudoku 9×9 *Center Dot*, dan Hypersudoku 9×9 .