

SKRIPSI

**PENGEMBANGAN ALGORITMA DINKELBACH UNTUK
MENYELESAIKAN MASALAH PEMROGRAMAN
PENJUMLAHAN PECAHAN LINEAR**



SHERYLL NATALIA

NPM: 6162001149

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2024**

FINAL PROJECT

**DEVELOPMENT OF DINKELBACH'S ALGORITHM FOR
SOLVING THE SUM OF LINEAR FRACTIONAL
PROGRAMMING PROBLEMS**



SHERYLL NATALIA

NPM: 6162001149

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2024**

LEMBAR PENGESAHAN

PENGEMBANGAN ALGORITMA DINKELBACH UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PEMROGRAMAN PENJUMLAHAN PECAHAN LINEAR

Sheryll Natalia

NPM: 6162001149

Telah lulus ujian skripsi pada 19 Januari 2024 dengan penguji:
Dr. Julius Dharma Lesmono dan Melania Eva Wulanningtyas, M.Pd.

Bandung, 29 Januari 2024

Menyetujui,

Pembimbing 1

Pembimbing 2

Iwan Sugiarto, M.Si.

Dr. Daniel Salim

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Jonathan Hoseana, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PENGEMBANGAN ALGORITMA DINKELBACH UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PEMROGRAMAN PENJUMLAHAN PECAHAN LINEAR

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
29 Januari 2024



Sheryll Natalia
NPM: 6162001149

ABSTRAK

Pemrograman pecahan linear berkaitan dengan memaksimalkan dua fungsi objektif dengan tujuan untuk menghitung rasio efisiensi. Misalnya perbandingan antara jumlah barang yang diproduksi dengan biaya produksi atau perbandingan antara keuntungan yang diperoleh dengan biaya produksi. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear adalah algoritma Dinkelbach. Algoritma Dinkelbach mengubah suatu masalah pemrograman pecahan linear ke bentuk pemrograman linear dengan cara mendefinisikan suatu fungsi baru pada fungsi objektifnya yang akan menghasilkan fungsi objektif yang linear namun tetap dengan kendala yang serupa. Kemudian solusi optimal dari masalah pemrograman linear tersebut dapat diperoleh menggunakan metode simpleks. Selanjutnya, masalah pemrograman pecahan linear tersebut dikembangkan menjadi penjumlahan pecahan linear yang diselesaikan dengan cara mentransformasi menjadi pecahan nonlinear lalu diselesaikan dengan algoritma Dinkelbach serta digunakan kondisi optimalitas Kuhn-Tucker untuk menyelesaikan masalah pemrograman nonlinear. Selain itu, diajukan suatu metode baru yang merupakan pengembangan dari algoritma Dinkelbach untuk menyelesaikan masalah pemrograman penjumlahan pecahan linear. Untuk memverifikasi dan mempermudah penyelesaian, dibuat pula suatu kode program untuk pemrograman pecahan nonlinear dan penjumlahan pecahan linear. Pada skripsi ini, dilakukan pengembangan dari algoritma Dinkelbach untuk menyelesaikan masalah pemrograman penjumlahan pecahan linear. Algoritma dari pengembangan ini diverifikasi dengan menggunakan beberapa contoh perhitungan numerik. Namun, pengembangan ini masih belum didukung oleh teori yang dapat membuktikan kebenarannya.

Kata-kata kunci: Pemrograman Pecahan Linear; Algoritma Dinkelbach; Metode Simpleks; Pemrograman Pecahan Nonlinear; Kondisi Optimalitas Kuhn-Tucker; Pemrograman Penjumlahan Pecahan Linear.

ABSTRACT

Linear fractional programming is related to maximizing two objective functions with the aim of calculating efficiency ratios. For example, the comparison between the quantity of goods produced and production costs or the comparison between the profits obtained and production costs. The method used to solve linear fractional programming problems is the Dinkelbach's algorithm. The Dinkelbach's algorithm transforms a linear fractional programming problem into a linear programming form by defining a new function in its objective function that will yield a linear objective function while maintaining similar constraints. Then the optimal solution to the linear programming problem can be obtained using the simplex method. Furthermore, the linear fractional programming problem is developed into a sum of linear fractions, solved by transforming it into nonlinear fractions, and then solved using the Dinkelbach's algorithm, along with using the Kuhn-Tucker optimality conditions to solve the nonlinear programming problem. In addition, a new method is proposed as an extension of the Dinkelbach's algorithm to solve the sum of linear fractions programming problem. To verify and simplify the solution, a computer program code is also created for nonlinear fractional programming and the sum of linear fractions. Therefore, the Dinkelbach's algorithm can be employed to solve linear and nonlinear fractional programming problems, and its extension is applicable to solve the sum of linear fractional programming problems. In this thesis, the development of the Dinkelbach's algorithm is carried out to solve the linear fraction programming problem. The algorithm resulting from this development is verified using several numerical calculation examples. However, this development is still not supported by a theory that can demonstrate its validity.

Keywords: Linear Fractional Programming; Dinkelbach's Algorithm; Simplex Method; Nonlinear Fractional Programming; Kuhn-Tucker Optimality Conditions; Sum of Linear Fractional Programming.

Don't let yesterday take up too much of today.
-Will Rogers



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus atas berkat dan pimpinan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Pengembangan Algoritma Dinkelbach untuk Menyelesaikan Masalah Pemrograman Penjumlahan Pecahan Linear**”. Skripsi ini disusun sebagai syarat memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR). Selama masa perkuliahan dan penyelesaian skripsi ini, penulis menyadari bahwa semua ini tidak dapat diselesaikan tanpa doa, bantuan, bimbingan, nasihat, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua dan kakak penulis yang selalu memberikan doa, dukungan, dan saran kepada penulis selama masa perkuliahan dan penyelesaian skripsi ini.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. dan Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan dukungan dan bimbingan dengan baik dan sabar kepada penulis selama proses pengerjaan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. Dharma Lesmono dan Ibu Melania Eva Wulanningtyas, M. Pd. selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan dan saran-saran kepada penulis agar penulis dan juga skripsi ini dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Seluruh dosen Program Studi Matematika UNPAR yang telah memberikan ilmu selama masa perkuliahan penulis serta seluruh staf Tata Usaha dan karyawan FTIS yang telah membantu segala proses administrasi.
5. Wristopher yang telah memberikan doa dan dukungan selama masa perkuliahan, serta bantuan dalam perkuliahan dan pengerjaan skripsi ini.
6. Ivena, Marvellyn, dan Leonard selaku teman yang selalu mendoakan, memotivasi, menghibur, memberi semangat dan saran selama masa perkuliahan.
7. Teman-teman “wa ngambis” yang memberi dukungan dan semangat selama masa perkuliahan.
8. Teman-teman Matematika UNPAR angkatan 2020 yang tidak dapat diucapkan satu per satu.
9. Semua pihak, yang namanya tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah membantu dan mendukung penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.

Akhir kata, penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang membangun dari pembaca sangat diharapkan agar dapat menjadi bahan perbaikan di masa depan. Penulis berharap bahwa skripsi ini dapat memberikan manfaat dan kontribusi kecil dalam pengembangan ilmu Matematika.

Bandung, 29 Januari 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	x
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	2
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Pemrograman Linear	4
2.1.1 Metode Simpleks	4
2.2 Kondisi Optimalitas Kuhn-Tucker	7
3 PENYELESAIAN MASALAH PEMROGRAMAN PECAHAN LINEAR DENGAN ALGO- RITMA DINKELBACH	9
3.1 Pemrograman Pecahan Linear	9
3.2 Algoritma Dinkelbach	10
3.3 Contoh Perhitungan Numerik	13
3.4 Penentuan Nilai λ pada Fungsi Objektif	15
4 OPTIMASI PENJUMLAHAN PECAHAN LINEAR	18
4.1 Penyelesaian Penjumlahan Dua Pecahan Linear dengan Transformasi Menjadi Pecahan Nonlinear	18
4.2 Varian Baru Algoritma Dinkelbach untuk Optimasi Penjumlahan Pecahan Linear	22
4.2.1 Contoh Perhitungan Numerik	22
4.3 Optimasi Penjumlahan Pecahan Linear dengan Peubah Banyak	23
4.3.1 Contoh Perhitungan Numerik	23
4.3.2 Penjelasan Kode Program	25
5 KESIMPULAN DAN SARAN	27
5.1 Kesimpulan	27
5.2 Saran	28
DAFTAR REFERENSI	29
A KODE PROGRAM	30

DAFTAR TABEL

2.1	Tabel simpleks awal Contoh 2.1	6
2.2	Tabel langkah 3 dan 4 Contoh 2.1	6
2.3	Tabel langkah 5 Contoh 2.1	7
2.4	Tabel langkah 6 Contoh 2.1	7
2.5	Tabel simpleks akhir Contoh 2.1	7



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemrograman linear adalah salah satu teknik penyelesaian masalah optimasi dari suatu model matematis. Model matematis yang dimaksud adalah suatu fungsi linear, atau biasa dikenal sebagai fungsi objektif, dengan beberapa persamaan dan pertidaksamaan linear sebagai kendalanya. Tujuan dari pemrograman linear adalah untuk memaksimalkan atau meminimumkan fungsi objektif tersebut.

Pemrograman pecahan linear adalah pengembangan dari pemrograman linear. Pada pemrograman pecahan linear fungsi objektifnya berupa perbandingan antara dua fungsi linear. Kendala pada pemrograman pecahan linear sama seperti pada pemrograman linear. Meskipun demikian, keduanya memiliki tujuan yang berbeda. Secara umum, pemrograman linear digunakan untuk menghitung nilai untuk mencari keuntungan maksimum atau biaya minimum, sedangkan pemrograman pecahan linear digunakan untuk menghitung rasio efisiensi optimal antara keuntungan dan biaya.

Pemrograman pecahan linear banyak diaplikasikan dalam bisnis dan ekonomi [1]. Berikut adalah beberapa masalah pemrograman pecahan linear. Pada [2], suatu perusahaan furnitur yang terletak di Cibubur, Jakarta memproduksi lima jenis lemari, yaitu lemari 2 pintu lebar, lemari 2 pintu ramping, lemari 3 tingkat terbuka lebar, lemari 3 tingkat terbuka ramping dan lemari 1 tingkat terbuka menggunakan bahan basis kayu. Perusahaan tersebut ingin mencari perbandingan keuntungan dengan biaya produksi dan pajak. Saat proses produksi, perusahaan mengalami kendala karena keterbatasan gudang perusahaan dalam menampung bahan baku dan juga pembatasan waktu pengerjaan tiap produk mebel.

Pada [3, hlm. 64], suatu pabrik lemari pendingin memproduksi lima jenis kulkas: *Lehel 220*, *Lehel 120*, *Star 200*, *Star 160*, dan *Star 250*. Pabrik tersebut ingin menyusun rencana produksi yang dapat memaksimalkan perbandingan antara keuntungan yang diperoleh dibandingkan dengan biaya produksi per unit. Kendala yang harus dipenuhi oleh perusahaan adalah harus memproduksi setiap jenis kulkas sebanyak permintaan konsumen dan terdapat pembatasan sumber daya *Freon 12* dan *TL 16*.

Pada [3, hlm. 65], seorang penasihat keuangan harus menginvestasikan sejumlah uang di dua jenis perusahaan sekuritas, yaitu obligasi *7Stars* dan saham *MaxMay*. Kedua perusahaan tersebut membayar dividen yang berbeda. Penasihat tersebut ingin mencari berapa yang harus diinvestasikan di setiap perusahaan agar dia mendapatkan laba maksimal. Namun, dalam berinvestasi penasihat tersebut mengalami kendala karena setiap perusahaan memiliki kebijakannya masing-masing dalam menentukan jumlah uang yang diinvestasikan. Selain itu, penasihat tersebut juga harus membayar

biaya perusahaan pialang.

Contoh-contoh yang telah dibahas sebelumnya, hanya ingin memaksimalkan atau meminimumkan satu buah rasio. Namun, ada kalanya dalam kehidupan nyata diperlukan optimasi lebih dari satu rasio atau penjumlahan beberapa rasio. Pada skripsi ini, akan dibahas salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear, yaitu algoritma Dinkelbach yang dikembangkan pada tahun 1967 oleh Werner Dinkelbach [4]. Dinkelbach mengubah masalah pemrograman pecahan linear menjadi pemrograman linear dengan mentransformasi fungsi objektifnya menjadi selisih dua fungsi linear dan mengalikan penyebutnya dengan suatu parameter tertentu. Pada metode ini, kendala pada bentuk pemrograman pecahan linear sama dengan kendala setelah dilakukan transformasi pada fungsi objektif sehingga perhitungan pada bentuk pemrograman linear lebih efisien dibandingkan metode lainnya. Kemudian, metode ini dikembangkan untuk menyelesaikan masalah pemrograman penjumlahan pecahan linear.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas pada seminar ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana cara menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear menggunakan algoritma Dinkelbach?
2. Bagaimana pengembangan algoritma Dinkelbach untuk menyelesaikan masalah pemrograman penjumlahan pecahan linear?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan seminar ini adalah sebagai berikut.

1. Menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear menggunakan algoritma Dinkelbach.
2. Mengembangkan algoritma Dinkelbach untuk menyelesaikan masalah pemrograman penjumlahan pecahan linear.

1.4 *State of the Art*

Berbagai metode untuk menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear yang terdiri dari satu buah pecahan telah diteliti dan dikembangkan. Salah satu metode yang paling pertama kali muncul adalah transformasi Charnes dan Cooper pada tahun 1962 [5]. Charnes dan Cooper menunjukkan bahwa masalah pemrograman pecahan linear dapat ditransformasi menjadi masalah pemrograman linear dengan mengenalkan suatu variabel baru. Pada tahun 1967, Dinkelbach mengembangkan suatu metode juga yang lebih dikenal sebagai algoritma Dinkelbach. Algoritma Dinkelbach mengubah fungsi objektifnya menjadi pengurangan dua pecahan linear, di mana penyebutnya dikalikan oleh suatu parameter λ . Metode ini lebih efisien karena tidak terdapat penambahan variabel baru dan kendala. Algoritma Dinkelbach juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman pecahan nonlinear.

Seiring berkembangnya zaman, algoritma Dinkelbach banyak dibahas untuk menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear seperti pada [1, 3, 6, 7, 8, 9, 10]. Pada tahun 2021, Khorramabadi mengajukan suatu metode baru yang dinamakan varian baru algoritma Dinkelbach [11]. Khorramabadi menggunakan cara yang sama seperti algoritma Dinkelbach, tetapi terdapat perbedaan pemilihan nilai λ pada fungsi objektif. Meskipun demikian, algoritma tersebut ternyata gagal karena di salah satu contoh perhitungan numerik telah dibuktikan bahwa masalah tersebut tidak dapat diselesaikan (dapat dilihat di Contoh 4.4). Oleh karena itu, pada skripsi ini akan diajukan suatu metode baru.

Metode baru ini memiliki algoritma yang mirip dengan algoritma Dinkelbach, tetapi pemilihan nilai λ pada fungsi objektifnya berbeda. Diberikan pula beberapa contoh perhitungan numerik yang dapat diselesaikan menggunakan metode baru ini. Selain itu, dibuat juga suatu kode program yang dapat mempermudah penyelesaian permasalahan yang lebih rumit.

1.5 Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

BAB 2: Landasan Teori

Bab ini menjelaskan beberapa teori yang diperlukan dalam skripsi ini. Beberapa teori yang dibahas meliputi pemrograman linear, metode simpleks, pemrograman nonlinear, dan kondisi optimalitas Kuhn-Tucker.

BAB 3: Penyelesaian Masalah Pemrograman Pecahan Linear dengan Algoritma Dinkelbach

Bab ini menjelaskan cara menyelesaikan masalah pemrograman pecahan linear menggunakan algoritma Dinkelbach. Setelah itu diberikan pula contoh numerik dan pembahasan mengenai penentuan nilai λ pada fungsi objektif.

BAB 4: Optimasi Penjumlahan Pecahan Linear

Bab ini menjelaskan pengembangan dari algoritma Dinkelbach, yaitu optimasi penjumlahan pecahan linear. Pada bab ini, dibahas juga pemrograman pecahan kuadratik dan varian baru algoritma Dinkelbach untuk menyelesaikan penjumlahan pecahan linear lalu diajukan suatu metode baru.

BAB 5: Kesimpulan dan Saran

Bab ini memberikan kesimpulan yang diperoleh dari skripsi ini, juga memberikan saran untuk pengembangan skripsi ini.