

SKRIPSI

PENENTUAN HARGA OPSI BELI EROPA MENGGUNAKAN
METODE *PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS*



DENNIS IMANUEL

NPM: 6161901066

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2024

FINAL PROJECT

**EUROPEAN CALL OPTION PRICING USING
PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS METHOD**



DENNIS IMANUEL

NPM: 6161901066

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2024**

LEMBAR PENGESAHAN

PENENTUAN HARGA OPSI BELI EROPA MENGGUNAKAN METODE *PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS*

Dennis Imanuel

NPM: 6161901066

Telah lulus ujian skripsi pada 19 Januari 2024 dengan penguji:
Liem Chin, M.Si. dan Jonathan Hoseana, Ph.D.

Bandung, 30 Januari 2024

Menyetujui,

Pembimbing 1

Pembimbing 2

Dr. Erwinna Chendra

Dr. Andreas Parama Wijaya

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Jonathan Hoseana, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PENENTUAN HARGA OPSI BELI EROPA MENGGUNAKAN METODE *PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS*

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
30 Januari 2024



Dennis Imanuel
NPM: 6161901066

ABSTRAK

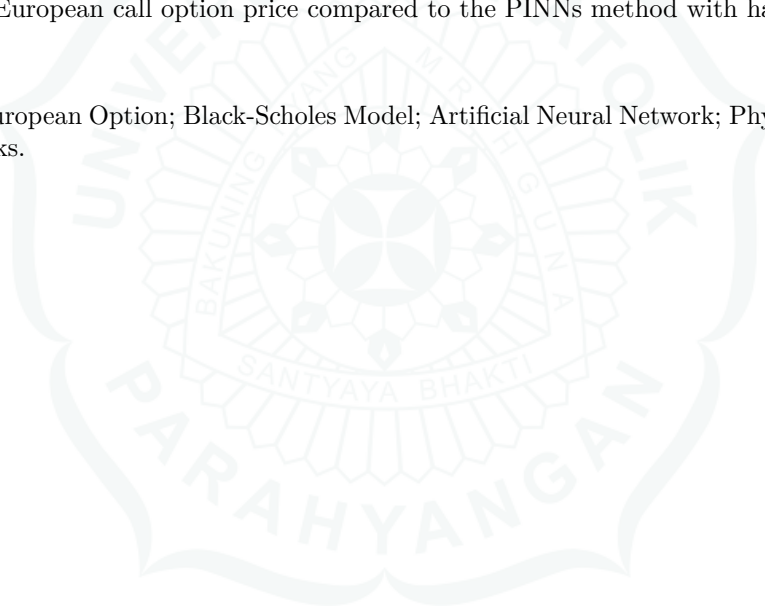
Metode-metode penentuan harga opsi bermanfaat bagi investor untuk memprediksi harga opsi yang wajar. Khususnya, penentuan harga opsi jenis Eropa dapat dilakukan melalui penyelesaian persamaan diferensial parsial model Black-Scholes. Penelitian ini menggunakan metode *Artificial Neural Network* (ANN) untuk memperoleh solusi persamaan diferensial parsial Black-Scholes. Implementasi metode ANN membutuhkan pembentukan arsitektur model seperti penentuan banyak lapisan, neuron, dan penggunaan fungsi aktivasi dan *loss* yang akan digunakan. Jenis metode ANN yang digunakan pada penelitian ini adalah metode *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) dengan *hard-constraint* dan *soft-constraint*. Penelitian ini membandingkan akurasi dari kedua hasil numerik metode PINNs tersebut dengan solusi analitik persamaan diferensial parsial Black-Scholes dalam menentukan harga opsi beli Eropa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode PINNs dengan *soft-constraint* merupakan metode yang lebih akurat dalam menentukan harga opsi beli Eropa dibandingkan dengan metode PINNs dengan *hard-constraint*.

Kata-kata kunci: Opsi Eropa; Model Black-Scholes; *Artificial Neural Network*; *Physics-Informed Neural Networks*.

ABSTRACT

Option price valuation methods are useful for investors to predict the fair value of options. European option pricing can be done through solving the Black-Scholes partial differential equation. In this research we use the Artificial Neural Network (ANN) method to obtain the solution for the Black-Scholes partial differential equation. The ANN method used in this research is the Physics-Informed Neural Networks (PINNs) with hard-constraints and soft-constraints. This research compares the accuracy of both PINNs method's numerical results against the Black-Scholes analytical solution in valuating European call option prices. The result of this research shows that the PINNs method with soft-constraint is the more accurate method for predicting the European call option price compared to the PINNs method with hard-constraint.

Keywords: European Option; Black-Scholes Model; Artificial Neural Network; Physics-Informed Neural Networks.



KATA PENGANTAR

Puji syukur sepenuhnya saya panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, Yesus Kristus, atas berkat dan penyertaannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “**Penentuan Harga Opsi Beli Eropa Menggunakan Metode *Physics-Informed Neural Networks***”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan penyelesaian studi Strata-1 dari Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR). Dalam penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak yang terus memberikan dukungan. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa hormat dan ucapan terima kasih kepada:

1. Papi, Mami, dan Joey yang telah menjadi orang tua dan kakak terbaik bagi penulis dalam memberikan dukungan moral, materil, doa, dan nasihat.
2. Ibu Dr. Erwinna Chendra dan Bapak Dr. Andreas Parama Wijaya selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dan bimbingan intensif kepada penulis selama proses penyusunan skripsi dari awal sampai akhir.
3. Bapak Liem Chin, M.Si. dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan saran perbaikan yang membuat penulisan skripsi ini menjadi lebih baik.
4. Seluruh dosen dan anggota fakultas program studi Matematika dan FTIS yang telah memberikan pengajaran, pengetahuan, dan bantuan administratif kepada penulis selama masa studi.
5. Teman-teman dekat SMA Penulis (Alex, Arnav, David, Yeremia, dkk.) yang telah memberikan dukungan dan hiburan selama penulis menyelesaikan masa studi di Bintaro.
6. Teman-teman “remah-remah” (Aditya, Admiral, Egha, Evan, dan Luthfi) yang saling memberikan dukungan satu sama lain selama proses penyusunan skripsi dan penyelesaian masa studi bersama.
7. Adela, yang selalu memberikan dukungan, waktu, kehadiran, dan semangat selama masa perjuangan penulis menyelesaikan skripsi dan masa studi.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu dalam ucapan terima kasih ini, yang juga telah memberikan dukungan dan doa kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan kewajibannya.

Bandung, 30 Januari 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	3
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Opsi	5
2.2 Proses Acak	7
2.2.1 Proses Wiener Standar	7
2.2.2 Generalisasi Proses Wiener	8
2.2.3 Gerak Brown Geometrik	9
2.2.4 Lemma Itô	10
2.3 Model Black-Scholes	12
2.3.1 Persamaan Diferensial Parsial Model Black-Scholes	13
2.3.2 Solusi Analitik Model Black-Scholes	14
2.4 <i>Artificial Neural Network</i>	18
2.4.1 <i>Single Computational Layer</i>	18
2.4.2 <i>Multi-Layer Neural Networks</i>	19
2.4.3 Fungsi Aktivasi	21
2.4.4 Fungsi <i>Loss</i>	24
2.4.5 <i>Forward Propagation</i>	24
2.4.6 <i>Back Propagation</i>	25
2.4.7 <i>Optimizer</i>	26
2.4.8 <i>Hyperparameters</i>	28
3 METODE <i>Physics-Informed Neural Networks</i> UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL	29
3.1 Metode <i>Physics-Informed Neural Networks</i> dengan <i>Hard-Constraint</i>	29
3.2 Metode <i>Physics-Informed Neural Networks</i> dengan <i>Soft-Constraint</i>	31
4 ANALISIS HARGA OPSI DENGAN METODE <i>Physics-Informed Neural Networks</i>	36
4.1 Pembangkitan Parameter dan Pelatihan Model ANN	36

4.2	Analisis untuk Model PINNs-HC	37
4.2.1	Kalibrasi <i>Hyperparameter</i> Model PINNs-HC	37
4.2.2	Perbandingan Hasil Model PINNs-HC dengan Solusi Analitik Black-Scholes	38
4.3	Analisis untuk Model PINNs-SC	40
4.3.1	Kalibrasi <i>Hyperparameter</i> Model PINNs-SC	40
4.3.2	Perbandingan Hasil Model PINNs-SC dengan Solusi Analitik Black-Scholes	42
4.4	Analisis Perbandingan Hasil Harga Opsi Model PINNs-HC dan PINNs-SC	44
5	KESIMPULAN DAN SARAN	46
5.1	Kesimpulan	46
5.2	Saran	46
	DAFTAR REFERENSI	47



DAFTAR GAMBAR

2.1	Grafik <i>payoff</i> untuk opsi beli	6
2.2	Grafik <i>payoff</i> untuk opsi jual	7
2.3	Simulasi pembangkitan lima proses Wiener.	8
2.4	Simulasi pembangkitan lima generalisasi proses Wiener.	9
2.5	Harga opsi beli Eropa menggunakan solusi analitik Black-Scholes.	18
2.6	Nilai harga opsi beli jenis Eropa pada $t = 0$, $t = 0,25$, $t = 0,5$, $t = 0,75$, dan $t = 1$	18
2.7	Bagan arsitektur dasar untuk perceptron tanpa menggunakan bias.	19
2.8	Bagan arsitektur dasar untuk perceptron dengan menggunakan bias.	19
2.9	Bagan arsitektur untuk <i>multi-layer neural networks</i> tanpa menggunakan bias.	20
2.10	Bagan arsitektur untuk <i>multi-layer neural networks</i> dengan menggunakan bias.	20
2.11	Matriks bobot yang menghubungkan lapisan-lapisan pada <i>multi-layer neural networks</i>	21
2.12	Grafik fungsi aktivasi identitas atau linear.	21
2.13	Grafik fungsi aktivasi sign.	22
2.14	Grafik fungsi aktivasi sigmoid.	22
2.15	Grafik fungsi aktivasi tanh.	23
2.16	Grafik fungsi aktivasi ReLu.	23
2.17	Ilustrasi proses <i>gradient descent</i> untuk nilai bobot.	26
3.1	Skema algoritma PINNs untuk penyelesaian permasalahan persamaan diferensial parsial.	32
4.1	Penurunan <i>loss</i> dari model PINNs-HC dengan <i>hyperparameter</i> pilihan.	38
4.2	Visualisasi perbandingan solusi model PINNs-HC dengan solusi analitik Black-Scholes.	39
4.3	Visualisasi grafik penyebaran error model PINNs-HC dengan solusi analitik Black-Scholes	39
4.4	Grafik perbandingan solusi model PINNs-HC dengan solusi analitik Black-Scholes untuk harga opsi beli Eropa pada waktu $t = 0$	40
4.5	Penurunan <i>loss</i> persamaan diferensial parsial Black-Scholes menggunakan model PINNs-SC.	41
4.6	Visualisasi perbandingan solusi model PINNs-SC dengan solusi analitik Black-Scholes.	42
4.7	Visualisasi grafik penyebaran error solusi model PINNs-SC dengan solusi analitik Black-Scholes	43
4.8	Grafik perbandingan solusi model PINNs-SC dengan solusi analitik Black-Scholes untuk harga opsi beli Eropa pada waktu $t = 0$	43
4.9	Grafik perbandingan penyebaran error hampiran solusi harga opsi model PINNs-HC dan PINNs-SC terhadap solusi analitik Black-Scholes pada waktu $t = 0$	44

DAFTAR TABEL

4.1	Parameter harga opsi model Black-Scholes	36
4.2	Hasil komputasi model PINNs-HC pada beberapa pilihan <i>hyperparameter</i>	38
4.3	<i>Hyperparameter</i> model PINNs-HC yang terbaik	38
4.4	Hasil komputasi model PINNs-SC pada beberapa pilihan <i>hyperparameter</i>	41
4.5	<i>Hyperparameter</i> model PINNs-SC yang terbaik	41
4.6	Tingkat akurasi hasil PINNs-HC dan PINNs-SC terhadap solusi analitik Black-Scholes	44



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Produk-produk derivatif dalam pasar keuangan penting diperhatikan oleh investor untuk memperluas diversifikasi portofolio investasi. Salah satu instrumen derivatif yang dapat diperdagangkan adalah opsi. Opsi adalah sebuah kontrak yang memberikan hak bagi pemiliknya untuk membeli atau menjual sebuah aset yang tertera pada waktu dan harga yang disepakati. Perdagangan opsi terus meningkat hingga dalam beberapa kasus terdapat lebih banyak jumlah uang yang diinvestasikan ke dalam bentuk opsi dibandingkan dengan aset terteranya sendiri [1, hlm. 1]. Alasan pelaku pasar keuangan lebih memilih opsi adalah kelebihanannya sebagai hak tanpa kewajiban bagi pemilik untuk mengeksekusi kontraknya sehingga dapat mengurangi risiko kerugian. Tujuan investor melakukan pembelian opsi adalah meraih keuntungan, sehingga pemodelan-pemodelan matematis yang dapat menentukan harga opsi yang wajar dikembangkan untuk mendukung kegiatan investor tersebut.

Model matematis untuk memprediksi nilai teoretis harga opsi yang pertama kali dikembangkan adalah model Black-Scholes pada tahun 1973 [2]. Model Black-Scholes memetakan pengaruh pertumbuhan harga aset dan waktu terhadap harga opsi. Terdapat beberapa asumsi yang digunakan model Black-Scholes dalam menentukan harga opsi, antara lain bahwa volatilitas harga pasar bersifat konstan dan pergerakan harga aset mengikuti distribusi lognormal. Model Black-Scholes adalah model paling sederhana yang digunakan untuk menentukan harga opsi jenis Eropa, dan memiliki solusi analitik untuk opsi jenis tersebut. Pendekatan solusi numerik untuk harga opsi model Black-Scholes tetap dibutuhkan agar dapat menentukan harga opsi dengan jenis atau model lain yang tidak memiliki solusi analitik. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi numerik dari model Black-Scholes adalah pembelajaran mesin dengan *neural network*, atau disebut juga sebagai *Artificial Neural Network* (ANN).

Artificial Neural Network (ANN) adalah metode pembelajaran mesin yang menyimulasikan cara kerja otak manusia dengan memanfaatkan masukan variabel-variabel independen untuk menghasilkan keluaran nilai hampiran dari variabel dependen [3, hlm. 1]. Cara kerja metode ANN umumnya adalah menghitung selisih antara nilai prediksi yang dikeluarkan oleh model dengan target keluaran yang diinginkan. Selisih ini disebut juga sebagai *loss*. Tujuan dari metode ANN adalah meminimumkan nilai *loss* dengan cara mengubah nilai parameter-parameter model (bobot dan bias) [3, hlm. 7]. Hasil keluaran yang akan digunakan adalah keluaran dari model dengan pengaturan parameter model terbaik, yaitu model yang menghasilkan *loss* paling kecil.

Penerapan metode ANN untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial mengarahkan nilai keluaran model agar memenuhi persamaan diferensial tersebut. Dengan pengaturan seperti ini,

metode tersebut dikenal sebagai *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs). Metode PINNs dikembangkan oleh Raissi, et al. [4] sebagai bentuk model ANN yang dilatih untuk menghitung serta meminimalisasi *loss* dari persamaan diferensial parsial dan *loss* dari syarat batasnya secara bersamaan. Metode PINNs dapat dibagi ke dalam dua jenis berdasarkan pemenuhan syarat batasnya, yaitu PINNs dengan *hard-constraint* (PINNs-HC) dan *soft-constraint* (PINNs-SC). Metode PINNs dengan *hard-constraint* menghasikan solusi yang pasti memenuhi syarat batas, sedangkan metode PINNs dengan *soft-constraint* menghasilkan solusi yang hanya menghampiri syarat batasnya.

PINNs-HC menggunakan pembentukan *loss* dari keluaran model terhadap persamaan diferensial saja, sedangkan PINNs-SC menghitung *loss* dari persamaan diferensial ditambah dengan *loss* dari syarat batasnya. Implementasi model PINNs-HC pada penelitian ini menggunakan metode *trial solution* yang dikembangkan oleh Lagaris, et al. [5]. Metode *trial solution* mengandung suku di mana hasil keluaran model secara otomatis memenuhi syarat batas persamaan diferensial parsial yang diselesaikan. Implementasi algoritma PINNs-SC pada penelitian ini menggunakan pengaturan dari *library* DeepXDE [6], sedangkan implementasi algoritma PINNs-HC dibangun dari awal.

Tujuan akhir penelitian ini adalah membandingkan performa metode PINNs-HC dan PINNs-SC dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial Black-Scholes untuk menentukan nilai harga opsi beli Eropa. Performa dari kedua metode tersebut akan dinilai berdasarkan seberapa akurat solusi harga opsi yang dihasilkan dari model ANN dalam menghampiri solusi analitik model Black-Scholes untuk nilai harga opsi beli Eropa.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut rumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana penerapan metode PINNs dengan *hard-constraint* (PINNs-HC) dan metode PINNs dengan *soft-constraint* (PINNs-SC) dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial Black-Scholes?
2. Bagaimana perbandingan hasil PINNs-HC dan PINNs-SC terhadap solusi analitik Black-Scholes dalam menentukan harga opsi beli jenis Eropa?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. memahami penerapan metode PINNs-HC dan metode PINNs-SC sederhana dalam menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan *neural network* dan aplikasinya terhadap persamaan diferensial parsial Black-Scholes, dan
2. melakukan analisis terhadap hasil metode PINNs-HC dan metode PINNs-SC terhadap solusi analitik Black-Scholes untuk penentuan harga opsi beli jenis Eropa.

1.4 *State of the Art*

Metode PINNs umum dan implementasi PINNs dengan *soft-constraint* (PINNs-SC) dalam penelitian ini menggunakan acuan artikel Raissi, et al. [4]. Beberapa penelitian yang telah mengimplementasikan metode PINNs-SC untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial Black-Scholes adalah penelitian Ibrahim, et al. [7] dan penelitian Andreas Louskos [8]. Hasil penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa masih terdapat eror harga opsi yang cukup signifikan ketika dibandingkan dengan solusi analitik Black-Scholes. Perbaikan akan dilakukan pada penelitian skripsi dalam ini.

Implementasi PINNs dengan *hard-constraint* (PINNs-HC) pada penelitian dalam skripsi ini menggunakan acuan artikel Lagaris, et al. [5]. Penelitian tersebut mendasari pengembangan metode *trial solution* sebagai salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan PINNs-HC. Salah satu penelitian yang telah mengimplementasikan metode PINNs-SC untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial Black-Scholes adalah penelitian Cervera, J. A. G. [9]. Penelitian tersebut tidak menunjukkan analisis hasil harga opsi secara lengkap, khususnya tidak menunjukkan visualisasi perbandingan hasil model ANN dengan solusi analitik Black-Scholes.

Metode PINNs-HC dan metode PINNs-SC juga dibandingkan untuk menentukan metode yang lebih optimal dalam kasus permasalahan persamaan diferensial parsial Black-Scholes dan penentuan harga opsi karena kedua metode tersebut merupakan bagian dari PINNs dengan perbedaan cara pemenuhan syarat batas yang berbeda.

Dalam skripsi ini diberikan perbandingan hasil solusi numerik untuk nilai harga opsi jenis Eropa model Black-Scholes menggunakan kedua metode yang telah disebutkan. Dalam skripsi ini juga dikembangkan algoritma baru untuk membentuk model ANN yang sesuai dengan masing-masing metode, dan dipaparkan metode pengaturan parameter-parameter yang termasuk dalam jaringan model untuk memperoleh arsitektur model ANN yang paling optimal untuk masing-masing metode.

1.5 *Sistematika Pembahasan*

Sistematika pembahasan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bab 1 : Pendahuluan

Bab ini membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan, *state of the art*, dan sistematika pembahasan dari skripsi ini.

2. Bab 2 : Landasan Teori

Bab ini membahas materi dan teori yang akan digunakan dalam penelitian termasuk opsi, model Black-Scholes, dan sistem arsitektur dari model ANN sederhana.

3. Bab 3 : Metode *Physics-Informed Neural Networks* untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

Bab ini membahas penerapan metode ANN yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial Black-Scholes yaitu metode PINNs dengan *hard-constraint* (*trial solution*) dan metode PINNs dengan *soft-constraint*.

4. Bab 4 : Analisis Hasil Harga Opsi dengan metode *Physics-Informed Neural Networks*

Bab ini membahas hasil analisis penentuan harga opsi beli Eropa model Black-Scholes yang

diperoleh dari metode *trial solution* dan metode PINNs dengan *soft-constraint*, kemudian membandingkan kesesuaiannya dengan solusi analitik Black-Scholes.

5. Bab 5 : Kesimpulan dan Saran

Bab ini membahas kesimpulan dan saran yang diperoleh dari hasil penelitian skripsi ini.

