SKRIPSI

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL POISSON DI SETENGAH BIDANG ATAS

PAUL TANIWAN

NPM: 6161901039

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2024

FINAL PROJECT

BOUNDEDNESS OF POISSON INTEGRAL ON THE UPPER HALF-PLANE

PAUL TANIWAN

NPM: 6161901039

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY

2024

LEMBAR PENGESAHAN

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL POISSON DI SETENGAH BIDANG ATAS

Paul Taniwan

NPM: 6161901039

Telah lulus ujian skripsi pada 23 Januari 2024 dengan penguji:
Iwan Sugiarto, M.Si. dan Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math.

Bandung, 2 Februari 2024

Menyetujui,

Pembimbing 1	**Pembimbing 2**
Prof. M. Wono Setya Budhi, Ph.D.	**Dr. Daniel Salim**

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Jonathan Hoseana, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL POISSON DI SETENGAH BIDANG ATAS

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
2 Februari 2024

Paul Taniwan
NPM: 6161901039

ABSTRAK

Suatu fungsi dua peubah yang bernilai real dikatakan harmonik dalam domain yang diberikan jika memiliki turunan parsial kedua yang kontinu dalam domain tersebut dan memenuhi persamaan Laplace. Solusi persamaan Laplace di setengah bidang atas dengan kondisi batas tertentu dapat dicari dengan menggunakan transformasi Fourier. Solusi tersebut dikenal sebagai operator integral Poisson. Inti (atau *kernel*) dari operator integral Poisson disebut *Poisson kernel*. Operator integral Poisson juga memiliki sifat keterbatasan di ruang Lebesgue dan sifat khusus yang mendekati kondisi batasnya. Pada skripsi ini, disajikan beberapa keterbatasan operator integral Poisson di ruang Lebesgue pada domain setengah bidang atas serta sifat khususnya yang mendekati kondisi batas.

Kata-kata kunci: Harmonik, Laplace, Fourier, Integral, Operator, Poisson, Lebesgue.

ABSTRACT

A real-valued function of two variables is said to be harmonic in a given domain if it has continuous second partial derivatives and satisfies the Laplace equation. The solution of this equation on the upper half-plane with given boundary conditions can be obtained by Fourier transformation. This solution is widely known as the Poisson integral on the upper half-plane. The kernel of this integral is already well-known as Poisson kernel. Poisson integral has its boundedness in Lebesgue spaces and its behavior near the boundary conditions. Several works on the boundedness of Poisson integral on the upper half-plane are presented in this undergraduate thesis, including its unique characteristic, which approaches the boundary condition.

Keywords: Harmonic, Laplace, Fourier, Integral, Poisson, Lebesgue.

"To understand mathematics means to be able to do mathematics.
And what does it mean doing mathematics?
In the first place it means to be able to solve mathematical problems."
–George Pólya (1887-1985)

KATA PENGANTAR

Skripsi yang berjudul "Keterbatasan Operator Integral Poisson di Setengah Bidang Atas" ini merupakan skripsi di bidang analisis. Berbagai pengalaman suka dan duka dialami oleh penulis selama penyusunan skripsi ini. Namun, hal ini tidak membuat penulis patah semangat dalam menyelesaikan penulisan skripsi yang masih jauh dari kata "sempurna" ini.

Penulisan skripsi ini tentu tidak lepas dari bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun secara tidak langsung. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Marcus Wono Setya Budhi, Ph.D. selaku dosen pembimbing 1 yang telah membimbing dari awal hingga akhir penulisan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen pembimbing 2 yang telah membimbing dari awal hingga akhir penulisan skripsi ini.
3. Grup Kucing, Grup Teori Cincin, Grup Hidup Mahasiswa, dan grup-grup lainnya yang telah memberikan semangat dalam penyusunan skripsi ini.
4. Teman-teman seperjuangan ONMIPA-PT 2023 yang telah memberikan semangat dalam penyusunan skripsi ini.
5. Keluarga dan sahabat penulis yang telah memberikan dukungan dan semangat selama proses penyusunan skripsi.
6. Semua pihak yang telah membantu serta memberikan kata-kata yang menginspirasi, semangat, dan motivasi dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat dituliskan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak sekali kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis selalu terbuka terhadap berbagai kritik dan saran yang membangun. Semoga penulisan skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca. Terima kasih.

Bandung, 2 Februari 2024

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fenomena-fenomena alam yang terjadi di alam semesta ini banyak yang masih menjadi misteri bagi para ilmuwan untuk dipecahkan. Namun, banyak pula misteri-misteri yang sudah dipecahkan oleh fisikawan-fisikawan pada zaman dahulu, seperti gaya gravitasi yang ditemukan oleh Isaac Newton, serta gaya tarik atau tolak antar partikel-partikel yang bermuatan sama atau berbeda oleh Charles-Augustin De Coulomb (1736-1806) dimuat dalam hukum Coulomb. Fenomena yang lain tidak kalah menariknya dengan gaya Coulomb, seperti dawai atau senar yang bergetar, temperatur pada permukaan logam batang, dan persebaran panas. Ketiga fenomena tersebut kita kenali dalam bentuk persamaan diferensial parsial, yaitu persamaan gelombang, persamaaan panas, dan persamaan Laplace.

Persamaan Laplace ditemukan oleh Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) yang merupakan seorang matematikawan berkebangsaan Prancis. Persamaan ini berasal dari persamaan panas dua dimensi yang berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \; t > 0, \tag{1.1}$$

untuk kondisi stabil (*steady-state*) [1, hlm. 564]. Artinya, permasalahan ini tidak bergantung pada waktu (*time-independent*), sehingga $\partial u/\partial t = 0$ dan persamaan (1.1) berubah menjadi persamaan Laplace yang umumnya sudah dikenal yaitu

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.2}$$

Semua fungsi dua peubah yang bernilai real $u : D \to \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan (1.2) dikatakan **harmonik** di $D \subseteq \mathbb{R}^2$, yang merupakan himpunan buka (*open*) dan terhubung sederhana (*simply connected*) dengan penambahan syarat bahwa turunan parsial kedua u_{xx} dan u_{yy} kontinu di H [2, hlm. 77]. Solusi dari persamaan (1.2) ingin dicari dengan menggunakan transformasi Fourier. Pemilihan transformasi Fourier dianggap cocok karena persamaan (1.2) dalam kondisi stabil serta daerah definisinya berupa himpunan bilangan real sedangkan transformasi Laplace kurang cocok untuk digunakan karena transformasi Laplace lebih cocok untuk persamaan yang berada di dalam kondisi yang bersifat sementara (*transient-state*) dengan daerah definisinya berubah himpunan bilangan real positif [3, hlm. 837]. Pemetaan fungsi f ke fungsi u yang menyelesaikan persamaan (1.2) dengan domain setengah bidang atas $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ dan kondisi batas $u(x, 0) = f(x)$

disebut **operator integral Poisson**. Operator integral Poisson diketahui memiliki beberapa sifat keterbatasan di ruang Lebesgue serta sifat khusus yang mendekati kondisi batasnya saat nilai y menuju nol [4].

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan-rumusan masalah untuk makalah skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana cara penyelesaian persamaan Laplace dengan menggunakan transformasi Fourier?
2. Bagaimana sifat dari solusi tersebut di saat y menuju 0?
3. Bagaimana sifat-sifat keterbatasan operator integral Poisson di ruang Lebesgue (L^p)?

1.3 Tujuan

Penulisan skripsi ini dibuat untuk mencapai tujuan-tujuan seperti berikut.

1. Menyelesaikan persamaan Laplace di setengah bidang atas dengan menggunakan transformasi Fourier.
2. Membuktikan bahwa solusi dari persamaan Laplace mendekati kondisi batasnya apabila y menuju 0.
3. Membuktikan dan mengembangkan sifat-sifat keterbatasan operator integral Poisson di ruang Lebesgue.

1.4 *State of the Art*

Pada skripsi ini, ditelusuri lebih mendalam mengenai solusi dari persamaan Laplace yang disajikan dalam persamaan (1.2) serta keterbatasannya juga dikaji ulang di ruang Lebesgue (L^p). Berdasarkan [5] dan [4, Bab. 7], operator integral Poisson terbatas di ruang $L^1(\mathbb{R})$, ruang $L^p(\mathbb{R})$, dan ruang $L^\infty(\mathbb{R})$ serta sifat khusus yang mendekati kondisi batasnya. Sebagai tambahan, dikaji juga keterbatasan operator integral Poisson dari $L^p(\mathbb{R})$ ke $L^r(\mathbb{R})$. Namun, belum memperoleh keterbatasan operator integral Poisson di ruang $L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Pada skripsi ini, sementara hanya diperoleh sebuah ketaksamaan yang terkait ruang $L^p(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R})$ ke ruang $L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.