

**SKRIPSI**

**PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK  
UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL,  
SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL, DAN SUATU MODEL  
EPIDEMIOLOGIS TIPE SIR**



**CHRISTIAN SOENGGORO**

**NPM: 6161901075**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2023**

**FINAL PROJECT**

**APPLICATION OF SEMI-ANALYTICAL METHODS TO  
SOLVE DIFFERENTIAL EQUATIONS, SYSTEMS OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS, AND AN SIR TYPE  
EPIDEMIOLOGICAL MODEL**



**CHRISTIAN SOENGGORO**

**NPM: 6161901075**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2023**

## LEMBAR PENGESAHAN

# PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL, SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL, DAN SUATU MODEL EPIDEMIOLOGIS TIPE SIR

Christian Soenggoro

NPM: 6161901075

Bandung, 21 Juli 2023

Menyetujui,

Pembimbing 1



Benny Yong, Ph.D.

Pembimbing 2



Jonathan Hoseana, Ph.D.

Ketua Penguji



Felivia Kusnadi, M.Act.Sc.

Anggota Penguji



Dr. Daniel Salim

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

## PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK UNTUK  
MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL, SISTEM PERSAMAAN  
DIFERENSIAL, DAN SUATU MODEL EPIDEMIOLOGIS TIPE SIR**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
21 Juli 2023



Christian Soenggoro  
NPM: 6161901075

## ABSTRAK

Model-model epidemiologis dikembangkan dalam rangka mempelajari dinamika penyebaran suatu penyakit. Model-model yang telah dibuat nantinya diharapkan bisa membantu para peneliti dan pemerintah dalam menanggulangi wabah penyakit tersebut. Salah satu model epidemiologis paling sederhana adalah model *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR) yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick, di mana populasi dikelompokkan ke dalam tiga kompartemen, yaitu kompartemen rentan, kompartemen terinfeksi, dan kompartemen sembuh. Model epidemiologis ini berbentuk suatu sistem persamaan diferensial tak linear, yang sulit diselesaikan secara analitik. Namun, saat ini sudah terdapat metode-metode numerik, seperti metode Euler dan metode Runge-Kutta yang dapat membantu penyelesaian sistem persamaan diferensial tersebut. Selain itu, terdapat pula metode-metode semi-analitik, seperti metode dekomposisi Adomian, metode variasi iterasional, dan metode analisis homotopi yang akan digunakan dan saling dibandingkan performanya pada skripsi ini, untuk mengaproksimasi solusi dari suatu persamaan diferensial linear, suatu persamaan diferensial tak linear, suatu sistem persamaan diferensial, dan akhirnya model SIR Kermack-McKendrick tersebut. Karena solusi yang diperoleh dari metode-metode semi-analitik ini berbentuk deret pangkat, maka solusinya tidak selalu dapat menangkap sifat asimtotik dari solusi-solusi model epidemiologis pada umumnya. Karena itu, metode-metode semi-analitik tersebut digunakan bukan untuk memprediksi akhir dari suatu penyebaran penyakit, melainkan untuk memprediksi puncak dari penyebaran penyakit. Diperoleh bahwa metode dekomposisi Adomian dan metode analisis homotopi memberikan solusi semi-analitik yang sama pada persamaan-persamaan diferensial yang diselesaikan di skripsi ini. Solusi semi-analitik yang diperoleh dari metode transformasi diferensial juga secara umum serupa, namun akan berbeda jika persamaan diferensial yang diselesaikan memuat fungsi eksponensial. Metode iterasi variasi sering kali memberikan solusi yang paling mendekati solusi eksak, namun membutuhkan komputasi yang lebih lama daripada metode-metode lainnya.

**Kata-kata kunci:** Model SIR; Metode Dekomposisi Adomian; Metode Iterasi Variasional; Metode Transformasi Diferensial; Metode Analisis Homotopi

## ABSTRACT

Epidemiological models are developed by mathematicians in order to study the dynamics of a spreading disease. These models are expected to help scientists and the government in the eradication of the disease. One of the simplest epidemiological models is the *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR) model, which was introduced by Kermack and McKendrick. This model takes the form of a system of nonlinear differential equations, which is difficult to solve analytically. However, numerical methods have been developed to solve such systems, such as the Euler and Runge-Kutta methods. Furthermore, there are semi-analytical methods such as the Adomian decomposition method, the variational iteration method, the differential transformation method, and the homotopy analysis method, which were used and had their performance compared in this thesis, to approximate the solutions of a linear differential equation, a nonlinear differential equation, a system of differential equations, and finally the Kermack-McKendrick SIR model. Since the solutions given by the semi-analytical methods take the form a power series, these solutions do not always capture the asymptotic properties of the solutions that typical epidemiological models generally have. Therefore, these semi-analytical methods were used not to predict the end of a spreading disease, but to predict the peak of the spread. We found that the Adomian decomposition and the homotopy analysis methods give the same semi-analytic solutions for the problems that are solved in this paper. The semi-analytic solution obtained from the differential transformation method also gives similar results as the Adomian decomposition method and homotopy analysis method, but the solution will be different in the case of the differential equation being solved contains exponential functions. The variational iteration method frequently provides the solution closest to the exact solution, but its required computation time exceeds those of the other semi-analytical methods.

**Keywords:** SIR Model; Adomian Decomposition Method; Iterational Variation Method; Differential Transformation Method; Homotopy Analysis Method

*Greatness doesn't come from casual effort*



## KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa. Karena berkat dan rahmat yang diberikan, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Penggunaan Metode-  
Metode Semi-analitik untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial, Sistem Persamaan Diferensial, dan Suatu Model Epidemiologis Tipe SIR”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini terwujud berkat bantuan arahan, bimbingan, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

- Orangtua penulis, yang telah memberikan motivasi dan mendoakan penulis untuk menyelesaikan program studi matematika di UNPAR.
- Kakak penulis, yang menginspirasi untuk selalu bekerja keras dalam pembelajaran.
- Bapak Benny Yong, Ph.D. dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D., selaku dosen pembimbing penulis, yang dengan sabar membantu memberikan arahan untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
- Bu Felivia, M.Act.Sc. dan Bapak Dr. Daniel Salim, selaku dosen penguji sidang skripsi, yang sudah memberikan kritik dan saran, sehingga skripsi ini dapat lebih dimengerti oleh pembaca.
- Seluruh staff dan dosen FTIS UNPAR, yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang tak ternilai selama menempuh pendidikan di program studi matematika.
- Kepada Reinaldo, Morris, Hosea, dan teman-teman di Tangerang yang telah menemani penulis selama masa perkuliahan, walaupun sudah menempuh pendidikan di universitas yang berbeda.
- Arvin dan Manzo, yang telah saling membantu dalam masa perkuliahan dan dalam menyelesaikan skripsi ini, sehingga dapat membantu penulis tetap termotivasi dan selesai tepat waktu.
- Darwin, Aldynova, dan Rico, yang juga telah menemani dan membantu penulis dalam perkuliahan selama empat tahun.
- Segenap program studi matematika, penulis ucapkan terima kasih atas kehadiran dan semangat persaudaraan yang tulus dari teman-teman yang telah memberikan dukungan dan inspirasi yang tak tergantikan selama perjalanan studi.

Dalam skripsi ini, masih banyak kekurangan dan kesalahan, karena itu segala kritik dan saran yang membangun akan menyempurnakan skripsi ini sehingga menjadi lebih bermanfaat bagi penulis dan para pembaca.

Bandung, 21 Juli 2023

Penulis

# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR NOTASI</b>	<b>xiii</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	3
1.4 <i>State of the Art</i> . . . . .	3
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>4</b>
2.1 Persamaan Diferensial Biasa . . . . .	4
2.1.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu . . . . .	4
2.1.2 Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	5
2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	5
2.2 Model SIR Kermack-McKendrick . . . . .	7
2.3 Metode Euler . . . . .	8
2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat . . . . .	9
2.5 Metode Dekomposisi Adomian . . . . .	9
2.6 Metode Iterasi Variasional . . . . .	13
2.7 Metode Transformasi Diferensial . . . . .	14
2.8 Metode Analisis Homotopi . . . . .	16
<b>3 PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK PADA SUATU PER-SAMAAN DIFERENSIAL LINEAR</b>	<b>19</b>
3.1 Penerapan Metode Dekomposisi Adomian pada Persamaan Diferensial Linear Orde Satu . . . . .	19
3.2 Penerapan Metode Iterasi Variasional pada Persamaan Diferensial Linear Orde Satu . . . . .	21
3.3 Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Persamaan Diferensial Linear Orde Satu . . . . .	22
3.4 Penerapan Metode Analisis Homotopi pada Persamaan Diferensial Linear Orde Satu . . . . .	22
<b>4 PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK PADA SUATU PER-SAMAAN DIFERENSIAL TAK LINEAR</b>	<b>24</b>
4.1 Penerapan Metode Dekomposisi Adomian pada Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	24
4.2 Penerapan Metode Iterasi Variasional pada Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	26

4.3	Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	26
4.4	Penerapan Metode Analisis Homotopi pada Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	27
4.5	Perbandingan Grafik dan Error Antarmetode . . . . .	29
<b>5</b>	<b>PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK PADA SUATU SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL TAK LINEAR</b>	<b>32</b>
5.1	Penerapan Metode Dekomposisi Adomian pada Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	32
5.2	Penerapan Metode Iterasi Variasional pada Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	35
5.3	Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	36
5.4	Penerapan Metode Analisis Homotopi pada Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu . . . . .	37
5.5	Perbandingan Grafik dan Error Antarmetode . . . . .	39
<b>6</b>	<b>PENGGUNAAN METODE-METODE SEMI-ANALITIK PADA MODEL SIR KERMACK-MCKENDRICK</b>	<b>43</b>
6.1	Penerapan Metode Dekomposisi Adomian pada Model SIR Kermack-McKendrick . . . . .	43
6.2	Penerapan Metode Iterasi Variasional pada Model SIR Kermack-McKendrick . . . . .	46
6.3	Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Model SIR Kermack-McKendrick . . . . .	47
6.4	Penerapan Metode Analisis Homotopi pada Model Epidemiologi SIR Kermack-McKendrick . . . . .	49
6.5	Penerapan Metode Euler pada Model SIR Kermack-McKendrick . . . . .	51
6.6	Penerapan Metode Runge-Kutta Orde Empat pada Model SIR Kermack-McKendrick . . . . .	51
6.7	Perbandingan Grafik dan Error Antarmetode . . . . .	52
<b>7</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>58</b>
7.1	Kesimpulan . . . . .	58
7.2	Saran . . . . .	59
	<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>61</b>

## DAFTAR GAMBAR

4.1	Perbandingan solusi metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi pada persamaan diferensial (4.1) . . . . .	29
5.1	Solusi metode dekomposisi Adomian dari sistem persamaan diferensial (5.1) . . . . .	39
5.2	Solusi metode iterasi variasional dari sistem persamaan diferensial (5.1) . . . . .	39
5.3	Solusi metode transformasi diferensial dari sistem persamaan diferensial (5.1) . . . . .	39
5.4	Solusi metode analisis homotopi dari sistem persamaan diferensial (5.1) . . . . .	40
6.1	Solusi model epidemiologis SIR dengan metode dekomposisi Adomian dibandingkan dengan metode Euler dan Runge-Kutta dengan ukuran langkah sebesar 0,01 . . . . .	52
6.2	Solusi model epidemiologis SIR dengan metode iterasi variasional dibandingkan dengan metode Euler dan Runge-Kutta dengan ukuran langkah sebesar 0,01 . . . . .	53
6.3	Solusi model epidemiologis SIR dengan metode transformasi diferensial dibandingkan dengan metode Euler dan Runge-Kutta dengan ukuran langkah sebesar 0,01 . . . . .	53
6.4	Solusi model epidemiologis SIR dengan metode analisis homotopi dibandingkan dengan metode Euler dan Runge-Kutta dengan ukuran langkah sebesar 0,01 . . . . .	53

## DAFTAR TABEL

2.1	Tabel hasil transformasi dari beberapa fungsi yang sering digunakan . . . . .	15
4.1	Tabel perbandingan eror antara empat metode semi-analitik di $t = 1,5$ . . . . .	30
5.1	Tabel perbandingan eror untuk variabel $x$ antara empat metode semi-analitik di $t = 3$	41
5.2	Tabel perbandingan eror untuk variabel $y$ antara empat metode semi-analitik di $t = 3$	41
5.3	Tabel perbandingan eror untuk variabel $z$ antara empat metode semi-analitik di $t = 3$	41
6.1	Tabel perbandingan eror untuk variabel $S$ antara empat metode semi-analitik dibandingkan dengan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat di $t = \bar{t} = 0,15$	54
6.2	Tabel perbandingan eror untuk variabel $I$ antara empat metode semi-analitik dibandingkan dengan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat di $t = \bar{t} = 0,15$	55
6.3	Tabel perbandingan eror untuk variabel $R$ antara empat metode semi-analitik dibandingkan dengan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat di $t = \bar{t} = 0,15$	55
6.4	Tabel puncak penyebaran penyakit model SIR untuk metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi . . . . .	57

## DAFTAR NOTASI

$F(k)$	Hasil transformasi diferensial ke- $k$ dari suatu fungsi $f(t)$
$I(t)$	Banyaknya orang yang terinfeksi penyakit di waktu $t$
$N$	Besar populasi total
$R(t)$	Banyaknya orang yang telah sembuh dari penyakit di waktu $t$
$S(t)$	Banyaknya orang yang rentan terhadap penyakit di waktu $t$
$\beta$	Tingkat infeksi dari suatu penyakit
$\gamma$	Tingkat penyembuhan dari suatu penyakit
$\lambda(s)$	Pengali Lagrange untuk metode iterasi variasional
<b>A</b>	Operator dari persamaan diferensial yang memuat suku linear, suku tak linear, dan fungsi kontinu dalam variabel bebas
<b>F</b>	Operator tak linear dari persamaan diferensial yang memuat suku linear dan tak linear
<b>L</b>	Suku linear dari persamaan diferensial yang memuat orde tertinggi dari $y$
<b>N</b>	Suku tak linear dari persamaan diferensial
<b>R</b>	Suku linear dari persamaan diferensial selain dari orde tertinggi dari $y$
RMSE	<i>Root mean square error</i> antara metode semi-analitik dan solusi eksak
RMSE <sub>Z</sub>	<i>Root mean square error</i> antara metode semi-analitik dan metode numerik, di mana Z adalah kompartemen S ( <i>susceptible</i> ) atau I ( <i>infected</i> ) atau R ( <i>recovered</i> )
RMSE <sub>Z</sub> <sup>Y,X</sup>	<i>Root mean square error</i> antara metode semi-analitik dan metode numerik, di mana X adalah DA (metode dekomposisi Adomian) atau IV (metode iterasi variasional) atau TD (metode transformasi diferensial) atau AH (metode analisis homotopi), Y adalah E (Euler) atau RK (Runge-Kutta orde empat), dan Z adalah kompartemen S ( <i>susceptible</i> ) atau I ( <i>infected</i> ) atau R ( <i>recovered</i> )
$e_{n,Z}^{Y,X}(\bar{t})$	Eror antara solusi parsial ke- $n$ dari metode semi-analitik dan solusi metode numerik pada suatu nilai $\bar{t}$ , di mana X adalah DA (metode dekomposisi Adomian) atau IV (metode iterasi variasional) atau TD (metode transformasi diferensial) atau AH (metode analisis homotopi), Y adalah E (Euler) atau RK (Runge-Kutta orde empat), dan Z adalah kompartemen S ( <i>susceptible</i> ) atau I ( <i>infected</i> ) atau R ( <i>recovered</i> )
$h$	Ukuran langkah ( <i>step size</i> ) pada metode Euler dan Runge-Kutta orde empat
$y_n^E$	Ordinat titik ke- $n$ dalam solusi numerik dari metode Euler
$y_n^{RK}$	Ordinat titik ke- $n$ dalam solusi numerik dari metode Runge-Kutta orde empat
$y_n^X(t)$	Solusi parsial ke- $n$ dari metode semi-analitik di titik $t$ , di mana X adalah DA (metode dekomposisi Adomian) atau IV (metode iterasi variasional) atau TD (metode transformasi diferensial) atau AH (metode analisis homotopi)

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit, para ilmuwan mengembangkan model-model epidemiologis. Model-model epidemiologis dibuat untuk mendeskripsikan perubahan populasi individu-individu yang terinfeksi, rentan, dan sembuh seiring berjalannya waktu dalam suatu populasi, dengan memperhitungkan faktor-faktor yang relevan. Namun, harus diingat bahwa suatu model matematis hanyalah sebuah hasil simplifikasi dari suatu fenomena kompleks di dunia nyata, sehingga model tersebut tidak mungkin menangkap semua faktor eksternal secara sempurna, seperti perubahan perilaku manusia, kebijakan pemerintah yang mungkin berubah seiring menyebarnya penyakit, dan mutasi yang mungkin terjadi di masa depan. Model-model epidemiologis yang berbeda juga mungkin memberikan detail yang berbeda tentang penyakit yang dipelajari. Salah satu model epidemiologis yang paling sederhana adalah model tipe SIR yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1937 [1, hlm. 9]. Dalam model ini, populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok rentan (*susceptible*), terinfeksi (*infected*), dan sembuh (*recovered*). Model yang telah dibuat nantinya diharapkan dapat memberikan masukan-masukan bagi para peneliti dan pemerintah dalam menanggulangi penyebaran penyakit yang sedang berlangsung. Hasil analisis model bisa memberikan prediksi jangka waktu singkat maupun jangka waktu panjang tentang penyebaran penyakit tersebut.

Model-model epidemiologis pada umumnya berbentuk sistem persamaan diferensial biasa tak linear yang sulit untuk dicari solusinya secara analitik. Teknik-teknik dasar yang biasa dipelajari untuk mendapatkan solusi sistem persamaan diferensial seringkali tidak dapat digunakan. Namun, saat ini sudah terdapat banyak metode numerik yang bisa membantu menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial yang sulit dicari solusinya analitiknya, seperti metode Euler dan metode Runge-Kutta [2, bab 25]. Metode-metode numerik tersebut bisa mengaproksimasi solusi dari suatu sistem persamaan diferensial biasa dengan mengubahnya menjadi suatu sistem persamaan beda (mendiskretisasi) yang solusinya diharapkan menghampiri solusi eksak sistem persamaan diferensial mula-mula. Selain metode-metode numerik, dapat digunakan pula metode-metode semi-analitik, seperti metode variasi iterasional, metode transformasi diferensial, metode analisis homotopi, dan metode dekomposisi Adomian.

Salah satu metode semi-analitik yang akan dibahas pada penelitian ini adalah metode dekomposisi Adomian, yang dikembangkan oleh Adomian [3]. Kekhasan dari metode ini terletak pada penggunaan polinomial Adomian untuk merepresentasikan suku tak linear pada sistem persamaan diferensial yang dicari solusinya. Karena itu, keuntungan terbesar dari penerapan metode ini

diperoleh dalam kasus di mana sistem persamaan diferensial tersebut memiliki suku tak linear [4]. Sebagai suatu metode semi-analitik, metode dekomposisi Adomian dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi dari sistem persamaan diferensial tanpa mendiskretisasi. Penerapannya juga mudah dilakukan pada banyak kasus, tidak hanya untuk sistem-sistem persamaan diferensial, tetapi juga untuk sistem-sistem persamaan integro-diferensial [5].

Metode semi-analitik lainnya yang akan digunakan adalah metode iterasi variasional, yang diusulkan oleh Inokuti [6] yang menerapkan pengali Lagrange untuk menyelesaikan permasalahan tak linear dalam mekanika kuantum, kemudian He mengembangkan metode ini lebih lanjut sebagai metode untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial tak linear [6]. Dari suatu penelitian yang membandingkannya dengan metode Adomian, He menyatakan bahwa metode iterasi variasional menghasilkan solusi yang memiliki tingkat kekonvergenan menuju solusi eksak yang lebih cepat daripada metode dekomposisi Adomian [6].

Metode transformasi diferensial juga merupakan metode semi-analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Zhou memperkenalkan metode ini pada tahun 1986 dalam upaya untuk menyelesaikan masalah nilai awal tak linear pada sirkuit listrik [7]. Metode ini digunakan dengan cara melakukan transformasi tertentu pada fungsi-fungsi di persamaan diferensial dengan menerapkan deret Taylor. Hasil transformasi berupa bilangan-bilangan yang nantinya akan dipasangkan dengan deret pangkat, sehingga diperoleh solusi berbentuk suatu polinomial.

Metode semi-analitik terakhir yang dibahas di skripsi ini adalah metode analisis homotopi. Metode analisis homotopi dikembangkan oleh Liao pada tahun 1992 berdasarkan konsep homotopi pada topologi [8, hlm. 4]. Berbeda dengan metode-metode sebelumnya, metode analisis homotopi memiliki beberapa parameter yang dapat diubah untuk mencapai konvergensi dari solusinya. Selain itu, penggunaan dari metode analisis homotopi membutuhkan pengetahuan tentang metode transformasi diferensial untuk memperoleh solusinya.

Dalam penelitian ini, keempat metode semi-analitik di atas akan digunakan dan dibandingkan performanya dalam mengaproksimasi solusi dari suatu persamaan diferensial linear, suatu persamaan diferensial tak linear, suatu sistem persamaan diferensial, dan akhirnya model SIR Kermack-McKendrick. Dalam penggunaannya untuk model SIR Kermack-McKendrick, karena metode-metode tersebut tidak dapat menangkap perilaku asimtotik dari solusi eksak model tersebut, maka metode ini dipakai untuk memprediksi perilaku transien dari solusi tersebut. Oleh karena itu, model epidemiologis yang terpilih memiliki solusi dengan perilaku transien yang menarik untuk dipelajari, misalnya dari model SIR Kermack-McKendrick, khususnya dalam kasus penyakit menyebar dalam populasi, perilaku transien dari solusinya memuat informasi tentang puncak penyebaran penyakit tersebut.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berikut rumusan-rumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial dan sistem-sistem persamaan diferensial dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi?
2. Bagaimana metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transforma-

si diferensial, dan metode analisis homotopi dapat diterapkan pada model SIR Kermack-McKendrick untuk memprediksi sifat transien dari solusinya, khususnya puncak penyebaran penyakit?

3. Bagaimana akurasi dari keempat metode semi-analitik yang diperoleh bila dibandingkan dengan akurasi solusi metode numerik Euler dan Runge-Kutta orde empat?

### 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. menyelesaikan beberapa persamaan diferensial dan sistem persamaan diferensial dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi;
2. menerapkan metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi pada model epidemiologis tipe SIR Kermack-McKendrick untuk memprediksi sifat transien dari solusinya, khususnya puncak penyebaran penyakit;
3. membandingkan akurasi dari keempat metode semi-analitik dengan akurasi dari metode metode numerik, yaitu metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat.

### 1.4 *State of the Art*

Sebelumnya, metode-metode semi-analitik sudah banyak dipelajari sebagai alat untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial. Makalah [9] menerapkan metode dekomposisi Adomian pada suatu model tipe SEIAR untuk penyebaran penyakit COVID-19. Metode iterasi variasional telah digunakan untuk menyelesaikan sebuah model tipe SIR [10]. Kemudian, metode transformasi diferensial juga sudah diterapkan untuk memprediksi penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan menyelesaikan sebuah model epidemiologis tipe SIA [11]. Selain itu, metode analisis homotopi telah digunakan untuk menyelesaikan model epidemiologis tipe SEIRS [12].

Dalam skripsi ini, penelitian dilakukan dengan empat metode semi-analitik di atas, yaitu metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi. Keempat metode tersebut digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dan tak linear, sistem persamaan diferensial tak linear, dan model SIR Kermack-McKendrick. Persamaan-persamaan diferensial yang digunakan dalam skripsi ini masing-masing memiliki solusi eksak, kecuali model SIR Kermack-McKendrick, sehingga dimanfaatkan metode Euler dan Runge-Kutta orde empat sebagai pembanding dengan metode-metode semi-analitik yang digunakan. Perbandingan yang dilakukan berupa visualisasi dan perbandingan eror untuk menemukan metode semi-analitik terbaik untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial dan sistem-sistem persamaan diferensial yang dipelajari.