BAB 7

KESIMPULAN DAN SARAN

7.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dalam bab-bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan-kesimpulan berikut

1. (a) Metode dekomposisi Adomian digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan pertama-tama memetakan kedua ruas terhadap invers dari suatu operator diferensial, di mana operator tersebut merupakan turunan tertinggi pada persamaan diferensial, kemudian mendekomposisi suku linear dan suku tak linear, di mana suku tak linearnya menjadi polinomial Adomian. Dengan memasangkan suku-suku di ruas kiri dari hasil dekomposisi dengan ruas kanannya, didapatkan rumus rekursif untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

   (b) Metode iterasi variasional digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan melakukan iterasi menggunakan persamaan koreksinya. Pada persamaan koreksi tersebut, terdapat pengali Lagrange yang bergantung pada orde dari persamaan diferensial yang diselesaikan.

   (c) Metode transformasi diferensial digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan mentransformasikan fungsi-fungsi yang termuat dalam persamaan diferensial tersebut. Persamaan hasil transformasi berupa rekursi yang dipenuhi oleh barisan bilangan. Solusi parsial bisa didapatkan dengan memasangkan bilangan-bilangan untuk iterasi ke-k dengan t^k.

   (d) Metode analisis homotopi digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan memilih suatu tebakan awal yang memenuhi nilai awal dari persamaan diferensial tersebut, sebuah parameter bantu, dan fungsi bantu. Kemudian menjalankan suatu rekursi yang memuat suatu operator yang menyerupai transformasi diferensial.

2. Untuk model SIR Kermack-McKendrick, keempat metode semi-analitik tersebut menghasilkan solusi parsial berbentuk polinomial, sehingga divergen untuk $t \to \infty$. Dengan demikian, metode-metode semi-analitik memiliki keterbatasan untuk memprediksi perilaku asimtotik solusi yang konvergen ke suatu nilai tertentu untuk $t \to \infty$. Namun, metode-metode semi-analitik (khususnya, metode dekomposisi Adomian, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi) masih dapat mengaproksimasi solusi dari model SIR Kermack-McKendrick sampai dengan puncak penyebaran penyakit pada kompartemen terinfeksi.

3. (a) Pada contoh persamaan diferensial linear, semua metode menghasilkan eror dan RMSE yang sama di iterasi yang sama karena barisan solusi parsial yang dihasilkan oleh semua metode semi-analitik tersebut merupakan barisan yang sama.
   (b) Pada contoh persamaan diferensial tak linear, metode iterasi variasional memiliki kecepatan konvergensi terbaik dibandingkan metode semi-analitik lainnya. Metode analisis homotopi menghasilkan barisan solusi parsial yang sama dengan metode dekomposisi Adomian atau metode transformasi diferensial, tergantung nilai awal yang digunakan.
   (c) Pada contoh sistem persamaan diferensial, metode transformasi diferensial memiliki laju konvergensi tercepat karena metode ini dapat membentuk deret Maclaurin dari solusi eksaknya. Pada sistem persamaan diferensial ini, terdapat fungsi eksponensial, sehingga metode dekomposisi Adomian, metode iterasi variasional, metode analisis homotopi tidak dapat membentuk deret Maclaurin dari solusi eksaknya. Metode iterasi variasional memberikan laju konvergensi yang tercepat kedua, sedangkan metode dekomposisi Adomian dan metode analisis homotopi memberikan laju konvergensi yang paling lambat.
   (d) Model SIR Kermack-McKendrick memiliki solusi yang konvergen ke suatu nilai tertentu pada saat $t \to \infty$, namun metode semi-analitik tidak dapat mengaproksimasi dengan baik perilaku solusi pada saat $t \to \infty$ karena nilai solusi-solusi parsial yang dihasilkan menuju tak hingga positif ataupun negatif. Semakin banyak iterasi yang dilakukan, solusi parsial yang dihasilkan dapat memprediksi dengan baik solusi numeriknya dalam interval nilai t yang semakin besar. Di kasus ini, metode dekomposisi Adomian, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi menghasilkan barisan solusi parsial yang sama, yang konvergensinya lebih lambat daripada konvergensi barisan solusi parsial yang dihasilkan oleh metode iterasi variasional. Selain itu, solusi-solusi parsial yang dihasilkan oleh metode variasi iterasional dapat memprediksi dengan baik solusi numeriknya hingga nilai t yang lebih besar daripada metode lainnya.

   Secara umum, metode iterasi variasional memberikan aproksimasi terbaik, terutama untuk model SIR Kermack-McKendrick. Metode transformasi diferensial memberikan aproksimasi yang baik untuk persamaan diferensial yang memuat fungsi eksponensial. Metode analisis homotopi menghasilkan barisan solusi parsial yang sama dengan metode dekomposisi Adomian jika parameter yang digunakan adalah $h = -1$, $H(t) = 1$, dan nilai awal $y_0^{\mathrm{AH}}(t)$ yang digunakan sama dengan nilai awal $y_0^{\mathrm{DA}}(t)$ dari metode dekomposisi Adomian. Namun, karena metode analisis homotopi dapat menggunakan berbagai parameter yang berbeda, maka metode ini memiliki peluang untuk menghasilkan solusi yang memiliki laju konvergensi yang lebih baik. Secara umum, metode dekomposisi Adomian memberikan solusi terburuk dalam menyelesaikan persamaan diferensial dibandingkan metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi.

7.2 Saran

Berikut beberapa saran untuk pengembangan lebih lanjut dari skripsi ini.

1. Diamati dari hasil eksperimen, ada dugaan bahwa untuk model SIR Kermack-McKendrick, barisan solusi parsial dari metode dekomposisi Adomian $(S_n^{\mathrm{DA}}(t), I_n^{\mathrm{DA}}(t), R_n^{\mathrm{DA}}(t))_{n=0}^{\infty}$ memenuhi

sifat

$$S_n^{\mathrm{DA}}(t) + I_n^{\mathrm{DA}}(t) + R_n^{\mathrm{DA}}(t) = S(0) + I(0) + R(0),$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$ dan $t \geqslant 0$. Hal yang sama juga ditemukan untuk metode iterasi variasional, metode transformasi diferensial, dan metode analisis homotopi. Untuk metode Euler, dengan menjumlahkan ketiga persamaan dalam sistem persamaan beda (6.5) diperoleh bahwa barisan $(S_m^{\mathrm{E}}(t), I_m^{\mathrm{E}}(t), R_m^{\mathrm{E}}(t))_{m=0}^{\infty}$ memenuhi sifat

$$S_m^{\mathrm{E}} + I_m^{\mathrm{E}} + R_m^{\mathrm{E}} = S(0) + I(0) + R(0), \tag{7.1}$$

untuk setiap $m \in \mathbb{N}_0$ yang diambil berdasarkan ukuran langkah h dan waktu t yang ditentukan. Observasi dari metode semi-analitik dan metode numerik ini mengakibatkan hasil penjumlahan eror antara metode dekomposisi Adomian dan metode Euler untuk setiap kompartemen pada Tabel 6.1, 6.2, dan 6.3 adalah

$$e_{n,\,S}^{\mathrm{E,\,DA}}(t) + e_{n,\,I}^{\mathrm{E\ DA}}(t) + e_{n,\,R}^{\mathrm{E\ DA}}(t) = 0.$$

Untuk metode-metode selain metode Euler, kesamaan (7.1) baru diduga benar berdasarkan data. Dalam penelitian selanjutnya, dapat diselidiki apakah kesamaan tersebut benar, dan dibuktikan, misalnya dengan induksi matematis.

2. Pada skripsi ini, metode analisis homotopi hanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial dengan menggunakan parameter yang sama, yaitu $h = -1$ dan $H(t) = 1$. Untuk ke depannya, penelitian menggunakan berbagai parameter dan nilai awal yang lain dapat dilakukan untuk melihat kecepatan konvergensinya.

3. Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan dengan menerapkan keempat metode semi-analitik yang telah dipelajari pada persamaan-persamaan diferensial yang lebih kompleks, seperti persamaan dengan orde yang lebih tinggi, persamaan diferensial parsial, dan persamaan diferensial yang memuat fungsi trigonometri.

4. Metode-metode semi-analitik yang digunakan masih memiliki kelemahan-kelemahan. Penelitian lebih lanjut diharapkan dapat memperbaiki kelemahan-kelemahan tersebut dengan membuat modifikasi dari metode-metode semi-analitik yang digunakan.

5. Penelitian serupa mengenai metode-metode semi-analitik dapat dilakukan dengan model-model epidemiologis lain yang lebih kompleks, seperti model-model tipe SEIR, SIRD, SEIAHR, dan lain-lain.

6. Penelitian serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan dengan metode-metode semi-analitik dan metode-metode numerik lainnya.

DAFTAR REFERENSI

[1] Martcheva, M. (1994) *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, 1st edition. Springer, New York.

[2] Chapra, S. C. dan Canale, R. P. (2015) *Numerical Methods for Engineers*, 7th edition. McGraw-Hill Education, Michigan.

[3] Adomian, G. (1994) *Solving Frontier Problems of Physics*, 1st edition. Springer, Dordrecht.

[4] Adomian, G. (1988) A review of the Adomian decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **135**, 501–544.

[5] Li, W. dan Pang, Y. (2020) Application of Adomian decomposition method to nonlinear systems. *Advances in Difference Equations*, **67**, 1–17.

[6] He, J.-H. (1999) Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: Some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **34**, 699–708.

[7] Odibat, Z. M. (2008) Differential transform method for solving volterra integral equation with separable kernels. *Mathematical and Computer Modeling*, **48**, 1144–1149.

[8] Liao, S. (2011) *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*, 1st edition. Springer, Shanghai.

[9] Agarwala, G., Mohana, M., Menonb, A. M., Sharmac, A., Dakalb, T. C., dan Purohit, S. D. (2022) Analysis of the Adomian decomposition method to estimate the COVID-19 pandemic. *Methods of Mathematical Modeling*, **10**, 173–187.

[10] Ayoade, A., Aminu, T., Ajisope, M., Abioye, A., Victor, A., dan Amadiegwu, S. (2019) Variational iteration method for solving an infectious disease model. *The Pacific Journal of Science and Technology*, **20**, 205–210.

[11] Peter, O. J. dan Akinduko, O. B. (2018) Semi analytic method for solving HIV/AIDS epidemic model. *International Journal of Modern Biology and Medicine*, **9**, 1–8.

[12] Chioma, I. S., Ugonna, E. G., Michael, U. O., Andrew, O., Ifeyinwa, M. H., dan Ijeoma, U. J. (2019) Application of homotopy analysis method for solving an SEIRS epidemic model. *Mathematical Modelling and Applications*, **4**, 36–48.

[13] William E. Boyce, D. B. M., Richard C. DiPrima (2017) *Elementary Differential Equations*, 11th edition. Wiley, Columbia.

[14] Burden, R. L., Faires, J. D., dan Burden, A. M. (2016) *Numerical Analysis*, 10th edition. Cengage, Boston.

[15] Wazwaz, A.-M. (2014) The variational iteration method for solving linear and nonlinear ODEs and scientific models with variable coefficients. *Central European Journal of Engineering*, **4**, 64–71.

[16] Biazar, J., Babolian, E., dan Islam, R. (2004) Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, **147**, 713–719.