

SKRIPSI

PENGGUNAAN ALJABAR MAX-PLUS DALAM
PENJADWALAN *FLOW SHOP*



RICKY WIJAYA

NPM: 6161901074

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2023

FINAL PROJECT

**APPLICATION OF MAX-PLUS ALGEBRA TO FLOW SHOP
SCHEDULING**



RICKY WIJAYA

NPM: 6161901074

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2023**

LEMBAR PENGESAHAN

PENGGUNAAN ALJABAR MAX-PLUS DALAM PENJADWALAN *FLOW SHOP*

Ricky Wijaya

NPM: 6161901074

Bandung, 14 Juli 2023

Menyetujui,

Pembimbing 1



Iwan Sugiarto, M.Si.

Pembimbing 2



Jonathan Hoseana, Ph.D.

Ketua Penguji



Liem Chin, M.Si.

Anggota Penguji



Agus Sukmana, M.Sc.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PENGGUNAAN ALJABAR MAX-PLUS DALAM PENJADWALAN *FLOW SHOP*

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
14 Juli 2023



Ricky Wijaya
NPM: 6161901074

ABSTRAK

Misalkan sebuah proyek terdiri atas beberapa pekerjaan dan dua mesin, di mana setiap pekerjaan harus diproses di mesin pertama dahulu, baru kemudian diproses di mesin kedua. Dalam setiap saat, setiap mesin hanya dapat memproses satu pekerjaan saja. Bagaimana cara menentukan urutan pemrosesan pekerjaan-pekerjaan tersebut supaya total durasi penyelesaian proyek tersebut mencapai minimum? Masalah ini disebut masalah *flow shop* dengan dua mesin. Dalam skripsi ini, dieksplorasi penggunaan aljabar max-plus dalam menyelesaikan masalah *flow shop*, pertama-tama dengan dua mesin, dan selanjutnya dengan tiga atau lebih mesin. Penyelesaian masalah tersebut akan dilakukan dengan menggunakan algoritma penjadwalan yang dibahas secara analitik dan kemudian diimplementasikan pada komputer, dengan menggunakan bahasa pemrograman *Python*. Waktu eksekusi dari algoritma-algoritma tersebut dibandingkan dengan waktu eksekusi dari algoritma *trial and error*, yaitu algoritma yang menentukan urutan optimal dengan memeriksa semua kemungkinan urutan pekerjaan. Jika pekerjaan-pekerjaan yang ada cukup sedikit, maka waktu eksekusi algoritma *trial and error* sedikit lebih singkat dibandingkan waktu eksekusi algoritma penjadwalan. Tetapi jika pekerjaan-pekerjaan yang ada cukup banyak, maka waktu eksekusi algoritma *trial and error* meningkat menjadi jauh lebih lama, sedangkan waktu eksekusi algoritma penjadwalan tidak mengalami peningkatan yang signifikan.

Kata-kata kunci: aljabar max-plus; *flow shop*; urutan; waktu eksekusi.

ABSTRACT

Suppose a project consists of a number of jobs and two machines, where each job must be processed on the first machine before being processed on the second machine. At any given time, each machine can only process a single job. How can we determine the order in which the jobs must be processed in order to minimise the total duration of the project's completion? This problem is referred to as the flow-shop problem with two machines. In this thesis, we explore the application of max-plus algebra to solve flow shop problems, first with two machines, and subsequently with three or more machines. The solution of the problem will be obtained using scheduling algorithms which are discussed analytically and subsequently implemented on a computer, using the Python programming language. We compare the execution times of these algorithms with those of trial and error algorithms, i.e., those which determine the optimal order by examining all possibilities. We found that if there are only a few jobs, the execution time of the trial and error algorithm is slightly shorter than that of the scheduling algorithm. However, if there is a large number of jobs, the execution time of the trial and error algorithm increases dramatically, while the execution time of the scheduling algorithm does not differ much from its execution time in the case of only a few jobs.

Keywords: flow shop; max-plus algebra; running time; sequence.

KATA PENGANTAR

Pertama-tama, saya mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada Sang Maha Pengasih dan Penyayang atas kasih dan penyertaan-Nya dalam hidup saya hingga skripsi ini selesai dibuat. Setelah disusun selama dua semester, skripsi yang berjudul “Penggunaan Aljabar Max-Plus dalam Masalah Penjadwalan *Flow Shop*” ini selesai dibuat dan diujikan pada tanggal 5 Juli 2023. Skripsi ini juga menjadi tugas akademis terakhir yang saya kerjakan dalam studi di Program Studi Matematika Universitas Katolik Parahyangan.

Saya menyadari bahwa hal ini bukanlah akhir, melainkan awal baru yang memiliki banyak tantangan. Untuk itu, saya mengharapkan doa agar kasih dan penyertaan-Nya terus menemani kehidupan saya dan para pembaca. Kehadiran-Nya selama ini saya rasakan melalui kehadiran manusia-manusia yang sudah memberikan berbagai pelajaran berharga bagi saya. Oleh karena itu, pada kesempatan ini saya ingin mengucapkan terima kasih.

- Kepada Papa, Indra Wijaya, dan Mama, Inge Budiman. Kalian lah yang telah menjadi bentuk konkret dari kehadiran-Nya dalam kehidupan saya. Terima kasih untuk segalanya.
- Kepada Nathan dan Daniel, adik-adik terbaik yang sangat saya sayangi. Terima kasih juga untuk segalanya.
- Kepada Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. yang telah membimbing saya tanpa lelah. Terima kasih atas kesabaran dan ajarannya.
- Kepada Ryan, Icha, JR, dan Patrick sahabat-sahabat terbaik yang tidak mungkin saya lupakan. Terima kasih atas tangis dan tawa yang pernah kita lalui bersama. Tanpa kehadiran kalian, saya tidak mungkin menjadi seperti sekarang.
- Kepada Steven, Yesu, Cella, Anjul, Apin, Nathan, Soki, dan Vincent yang telah menemani saya selama empat tahun terakhir. Terima kasih atas kehadiran kalian. Semoga cerita kebersamaan ini belum selesai dan akan datang waktunya kita akan bertemu lagi.
- Kepada segenap Program Studi Matematika UNPAR, dosen-dosen, dan teman-teman lainnya yang tidak mungkin disebutkan satu per satu yang telah menjadi tempat saya belajar dan berelasi selama 4 tahun terakhir.
- Kepada manusia-manusia yang pernah datang dan pergi dalam kehidupan saya. Terima kasih telah menjadi bagian dari hidup saya dan membentuk saya menjadi pribadi yang lebih dewasa.
- Kepada diri saya sendiri dan para pembaca. Terus lah mengukir sejarah kehidupanmu, *one day at a time*. Semoga pada akhirnya, kita dapat menjadi diri sendiri yang utuh dan sukses berdasarkan definisi utuh dan sukses masing-masing.

Bandung, 14 Juli 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	2
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Konsep Dasar Aljabar Max-Plus	4
2.2 Vektor dan Matriks dalam Aljabar Max-Plus	6
2.3 Relasi dan Urutan Parsial	9
2.4 Permutasi	10
3 MASALAH PENJADWALAN <i>Flow Shop</i> DUA MESIN	11
3.1 Ilustrasi Pengantar	11
3.2 Formalisasi	13
3.3 Contoh Masalah	20
4 OPTIMISASI MASALAH PENJADWALAN <i>Flow Shop</i> TIGA MESIN ATAU LEBIH	21
4.1 Ilustrasi Pengantar	21
4.2 Penyelesaian Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin	22
4.3 Penyelesaian Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> m Mesin	29
5 PENGGUNAAN PERANGKAT LUNAK	31
5.1 Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Dua Mesin	33
5.2 Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin	35
5.2.1 Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin yang Memenuhi Syarat 1	37
5.2.2 Simulasi Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin yang Memenuhi Syarat 1	39
5.2.3 Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin yang Memenuhi Syarat 2	40
5.2.4 Simulasi Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin yang Memenuhi Syarat 2	42
5.2.5 Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin yang Memenuhi Syarat 3	43
5.2.6 Simulasi Penjadwalan <i>Flow Shop</i> Tiga Mesin yang Memenuhi Syarat 3	46
5.3 Masalah Penjadwalan <i>Flow Shop</i> m Mesin	46
6 PENUTUP	52

6.1 Kesimpulan	52
6.2 Saran	54
DAFTAR REFERENSI	55



DAFTAR GAMBAR

3.1	Diagram waktu pengerjaan ilustrasi dua mesin	11
3.2	Diagram waktu pengerjaan ilustrasi dua mesin dengan tiap-tiap kemungkinannya	12
4.1	Diagram waktu pengerjaan ilustrasi tiga mesin	22
5.1	Diagram alir program penjadwalan	31
5.2	Grafik $\bar{t}_{n,2}$ (merah) dan $\bar{T}_{n,2}$ (biru) terhadap n (kiri), serta grafik $\ln \bar{t}_{n,2}$ (merah) dan $\ln \bar{T}_{n,2}$ (biru) terhadap n (kanan)	36
5.3	Grafik $\bar{t}_{n,3}$ (merah) dan $\bar{T}_{n,3}$ (biru) terhadap n (kiri), serta grafik $\ln \bar{t}_{n,3}$ (merah) dan $\ln \bar{T}_{n,3}$ (biru) terhadap n (kanan) yang memenuhi syarat 1	40
5.4	Grafik $\bar{t}_{n,3}$ (merah) dan $\bar{T}_{n,3}$ (biru) terhadap n (kiri), serta grafik $\ln \bar{t}_{n,3}$ (merah) dan $\ln \bar{T}_{n,3}$ (biru) terhadap n (kanan) yang memenuhi syarat 2	44
5.5	Grafik $\bar{t}_{n,3}$ (merah) dan $\bar{T}_{n,3}$ (biru) terhadap n (kiri), serta grafik $\ln \bar{t}_{n,3}$ (merah) dan $\ln \bar{T}_{n,3}$ (biru) terhadap n (kanan) yang memenuhi syarat 3	47
5.6	Grafik $\bar{t}_{n,4}$ (merah) dan $\bar{T}_{n,4}$ (biru) terhadap n (kiri), serta grafik $\ln \bar{t}_{n,4}$ (merah) dan $\ln \bar{T}_{n,4}$ (biru) terhadap n (kanan)	51

DAFTAR TABEL

3.1	Durasi pengerjaan ilustrasi masalah penjadwalan <i>flow shop</i> dua mesin	11
3.2	Durasi pengerjaan masalah penjadwalan <i>flow shop</i> dua mesin	20
4.1	Durasi pengerjaan Proyek A	21
4.2	Durasi pengerjaan Mesin 1 dan 3 dari Proyek A	22
4.3	Durasi pengerjaan mesin gabungan 1 dan 2 serta 2 dan 3 dari Proyek A	23
4.4	Durasi pengerjaan Proyek B	23
4.5	Durasi pengerjaan mesin gabungan 1 dan 2 serta 2 dan 3 dari Proyek B	23
4.6	Durasi pengerjaan Proyek C	24
4.7	Durasi pengerjaan mesin gabungan 1 dan 2 serta 2 dan 3 dari Proyek C	25
4.8	Durasi pengerjaan Proyek D	25
4.9	Durasi pengerjaan mesin 2 dan 3 dari Proyek D	26
4.10	Durasi pengerjaan Proyek E	27
4.11	Durasi pengerjaan mesin 1 dan 2 dari Proyek E	28
4.12	Durasi pengerjaan Proyek F	29
4.13	Durasi pengerjaan mesin gabungan 1, 2, dan 3 serta 2, 3, dan 4 dari Proyek F	30
5.1	Contoh tabel data durasi pengerjaan proyek	32
5.2	Data untuk simulasi masalah <i>flow shop</i> dua mesin	33
5.3	Waktu eksekusi program penjadwalan <i>flow shop</i> dengan $m = 2$ mesin	35
5.4	Waktu eksekusi program <i>trial and error</i> masalah <i>flow shop</i> dengan $m = 2$ mesin	35
5.5	Data untuk simulasi masalah <i>flow shop</i> tiga mesin yang memenuhi syarat 1	38
5.6	Waktu eksekusi program penjadwalan <i>flow shop</i> dengan $m = 3$ mesin yang memenuhi syarat 1	39
5.7	Waktu eksekusi program <i>trial and error</i> masalah <i>flow shop</i> $m = 3$ mesin yang memenuhi syarat 1	39
5.8	Data untuk simulasi masalah <i>flow shop</i> tiga mesin yang memenuhi syarat 2	41
5.9	Waktu eksekusi program penjadwalan <i>flow shop</i> dengan $m = 3$ mesin yang memenuhi syarat 2	43
5.10	Waktu eksekusi program <i>trial and error</i> masalah <i>flow shop</i> $m = 3$ mesin yang memenuhi syarat 2	43
5.11	Data simulasi proyek tiga mesin yang memenuhi syarat 3	45
5.12	Waktu eksekusi program penjadwalan <i>flow shop</i> dengan $m = 3$ mesin yang memenuhi syarat 3	46
5.13	Waktu eksekusi program <i>trial and error</i> masalah <i>flow shop</i> $m = 3$ mesin yang memenuhi syarat 3	47
5.14	Data untuk simulasi masalah <i>flow shop</i> empat mesin	48
5.15	Waktu eksekusi program penjadwalan <i>flow shop</i> $m = 4$ mesin	50
5.16	Waktu eksekusi program <i>trial and error</i> masalah <i>flow shop</i> $m = 4$ mesin	51

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam dunia manufaktur, pengolahan bahan baku (selanjutnya akan disebut pekerjaan) biasanya dilakukan pada beberapa stasiun kerja atau mesin. Operasi yang dilakukan pada masing-masing pekerjaan di setiap stasiun kerja biasanya memerlukan waktu yang berbeda-beda. Diberikan suatu proyek yang terdiri dari sekumpulan pekerjaan. Permasalahan yang muncul adalah bagaimana mengurutkan pekerjaan-pekerjaan tersebut sehingga total waktu penyelesaian proyek tersebut mencapai minimum.

Masalah menentukan urutan pekerjaan pada beberapa mesin untuk meminimumkan total durasi pengolahan semua pekerjaan disebut *masalah penjadwalan praktis*. Masalah ini muncul pada sistem manufaktur, perencanaan produksi, desain pemrograman komputer, transportasi, dan sebagainya [1, hlm. 307]. Pada jenis masalah yang lebih sederhana, yang disebut *masalah penjadwalan flow shop*, semua pekerjaan melalui setiap mesin dalam urutan yang sama. Masalah ini adalah masalah utama yang akan dibahas dalam skripsi ini. Nantinya, pembahasan akan dilakukan dalam dua bagian, yaitu masalah penjadwalan *flow shop* dua mesin dan masalah penjadwalan *flow shop* tiga mesin atau lebih.

Sederhananya, masalah penjadwalan *flow shop* dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalkan terdapat suatu perusahaan manufaktur yang memiliki beberapa mesin, di mana masing-masing pekerjaan akan melalui setiap mesin dalam urutan yang sama. Target yang ingin dicapai adalah ditemukannya suatu jadwal atau urutan yang optimal, yaitu yang meminimumkan total durasi penyelesaian semua pekerjaan. Tentu saja, dalam dunia nyata, penjadwalan pekerjaan-pekerjaan tersebut, selain perlu memperhitungkan waktu-waktu pengerjaannya di setiap mesin, juga perlu memerhitungkan faktor-faktor lain seperti waktu transportasi pekerjaan antar mesin, waktu tunda (*delay*), dan sebagainya. Namun, skripsi ini hanya akan berfokus pada masalah penjadwalan pekerjaan-pekerjaan yang waktu pengerjaannya di setiap mesin diketahui tanpa memerhitungkan faktor-faktor lain tersebut.

Sebelumnya, Johnson [2] sudah membahas suatu algoritma (yang nanti akan dijelaskan pada subbab 3.2 dari sudut pandang aljabar max-plus) untuk menentukan urutan optimal dari beberapa pekerjaan dalam kasus dua mesin. Makalah [3], yang juga memanfaatkan algoritma Johnson [2], sudah membahas bagaimana menjadwalkan pekerjaan-pekerjaan dengan menyatakan masing-masing pekerjaan tersebut sebagai suatu matriks segitiga atas yang entri-entrinya merupakan anggota-anggota aljabar max-plus. Dalam skripsi ini, akan dijelaskan penggunaan aljabar max-plus dalam masalah penjadwalan *flow shop*, tetapi dengan menyatakan masing-masing pekerjaan

sebagai suatu matriks segitiga bawah. Selain penyelesaian masalah *flow shop* dengan dua mesin, akan dibahas pula masalah *flow shop* dengan tiga mesin atau lebih, berdasarkan teori yang diuraikan dalam [4, 5].

Penggunaan aljabar max-plus dalam penjadwalan *flow shop* memiliki potensi besar dalam membantu peningkatan efisiensi produksi. Skripsi ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan metode penjadwalan *flow shop* yang lebih efisien dan efektif, khususnya dari sudut pandang aljabar max-plus, yang dapat diimplementasikan dalam dunia manufaktur untuk meningkatkan efisiensi produksi.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut masalah-masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana cara menentukan urutan pekerjaan-pekerjaan yang harus diselesaikan dalam suatu masalah penjadwalan *flow shop* yang melibatkan dua mesin sehingga meminimumkan total durasi penyelesaian pekerjaan-pekerjaan tersebut?
2. Bagaimana cara menentukan urutan pekerjaan-pekerjaan yang harus diselesaikan dalam suatu masalah penjadwalan *flow shop* yang melibatkan tiga mesin atau lebih sehingga meminimumkan total durasi penyelesaian pekerjaan-pekerjaan tersebut?
3. Bagaimana perbandingan antara waktu eksekusi program komputer yang mengimplementasikan algoritma penentuan urutan pekerjaan-pekerjaan tersebut dengan waktu eksekusi program *trial and error*, yaitu program yang menentukan urutan optimal dengan cara memeriksa semua kemungkinan urutan?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. menyajikan algoritma untuk menentukan urutan pekerjaan yang dapat meminimumkan total durasi penyelesaian suatu proyek penjadwalan *flow shop* dua mesin;
2. menyajikan algoritma untuk menentukan urutan pekerjaan yang dapat meminimumkan total durasi penyelesaian suatu proyek penjadwalan *flow shop* tiga mesin atau lebih, secara terbatas untuk beberapa kasus;
3. membandingkan waktu eksekusi algoritma-algoritma tersebut dengan waktu eksekusi proses *trial and error* (mencoba semua kemungkinan urutan).

1.4 *State of the Art*

Masalah penjadwalan *flow shop* adalah masalah optimasi yang seringkali muncul dalam industri manufaktur, produksi, dan logistik. Sebagai masalah optimasi yang sering dijumpai, berbagai pendekatan sudah dilakukan dengan tujuan pengembangan metode dan algoritma yang efisien untuk menyelesaikan masalah penjadwalan *flow shop*.

Skripsi ini memberikan tinjauan komprehensif mengenai penggunaan aljabar max-plus sebagai alat penyelesaian masalah ini. Pada pembahasan masalah penjadwalan *flow shop* dua mesin, dibahas secara lebih terperinci beberapa proposisi dan lema beserta buktinya dari makalah [3, Subbab 3.1] (Proposisi 3.1, 3.3, dan 3.4), serta ditambahkan dan dibuktikan proposisi dasar yang tidak tercantum dalam makalah tersebut (Proposisi 3.2). Selain itu, dikenalkan juga beberapa notasi baru dalam konteks relasi dan permutasi sebagai alat bantu dalam menyederhanakan penulisan.

Pada pembahasan masalah penjadwalan *flow shop* tiga mesin, dieksposisikan beberapa teorema dari [4, Bab 7 dan 8] (Proposisi 4.1, 4.2, dan 4.3). Setiap proposisi memberikan algoritma pengurutan pekerjaan yang hanya dapat digunakan apabila data durasi-durasi pengerjaan proyek memenuhi suatu syarat cukup. Untuk menunjukkan bahwa syarat cukup tersebut memang dibutuhkan, diberikan contoh proyek yang tidak memenuhi syarat cukup tersebut, dan ditunjukkan bahwa algoritma yang bersangkutan tidak selalu memberikan urutan yang optimal. Lebih lanjut, disajikan juga beberapa contoh yang diharapkan dapat membantu pembaca dalam memahami proposisi-proposisi tersebut. Selain itu, dieksposisikan juga secara lebih terperinci suatu teorema untuk masalah penjadwalan *flow shop* lebih dari tiga mesin dari [5, Subbab 10.3] (Proposisi 4.4).

Dalam Bab 5 dari skripsi ini, disajikan implementasi dari algoritma yang sudah dibahas dalam bab-bab sebelumnya dengan bahasa pemrograman Python, menggunakan simulasi proyek yang dibentuk pada Microsoft Excel. Waktu eksekusi algoritma tersebut kemudian dibandingkan dengan waktu eksekusi dari program *trial and error*, yang menentukan urutan optimal dengan cara mencoba semua kemungkinan urutan.

1.5 Sistematika Pembahasan

Setelah Bab 1 ini, pembahasan dilanjutkan dengan beberapa bab yang masing-masing membahas hal-hal berikut. Pada Bab 2, dijelaskan landasan teori yang meliputi konsep dasar aljabar max-plus beserta vektor dan matriks dalam aljabar max-plus. Selain itu, dijelaskan juga relasi dan urutan parsial, serta permutasi. Pada Bab 3, dijelaskan ilustrasi masalah penjadwalan *flow shop* dua mesin, algoritma penyelesaian masalah tersebut, beserta contoh pemanfaatannya. Pada Bab 4, dijelaskan ilustrasi masalah penjadwalan *flow shop* tiga mesin atau lebih, algoritma-algoritma penyelesaian masalah penjadwalan *flow shop* tiga mesin atau lebih yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Pada Bab 5, dibahas implementasi dari algoritma-algoritma penyelesaian di atas dengan menggunakan perangkat lunak.