

SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL PERSEDIAAN UNTUK PERMINTAAN
BERGANTUNG PADA HARGA JUAL, PERSEDIAAN, DAN
INISIATIF PENJUALAN DARI DUA PRODUK SERUPA**



KEVIN KARTIJAYA

NPM: 6161901027

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2023**

FINAL PROJECT

**DYNAMICAL ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF AN
INVENTORY MODEL FOR DEMAND DEPENDENT ON
SELLING PRICE, INVENTORY, AND SALES INITIATIVE OF
TWO SIMILAR PRODUCTS**



KEVIN KARTIJAYA

NPM: 6161901027

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2023**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN UNTUK PERMINTAAN BERGANTUNG PADA HARGA JUAL, PERSEDIAAN, DAN INISIATIF PENJUALAN DARI DUA PRODUK SERUPA

Kevin Kartijaya

NPM: 6161901027

Bandung, 14 Agustus 2023

Menyetujui,

Pembimbing 1



Benny Yong, Ph.D.

Pembimbing 2



Taufik Limansyah, M.T.

Ketua Penguji



Dr. Livia Owen

Anggota Penguji



Dr. Erwinna Chendra

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL PERSEDIAAN UNTUK PERMINTAAN BERGANTUNG PADA
HARGA JUAL, PERSEDIAAN, DAN INISIATIF PENJUALAN DARI DUA
PRODUK SERUPA**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
14 Agustus 2023



Kevin

Kevin Kartijaya
NPM: 6161901027

ABSTRAK

Persediaan adalah banyaknya produk perusahaan yang tersedia untuk dibeli konsumen. Suatu perusahaan perlu mempertimbangkan jumlah persediaan produk sehingga mampu menciptakan sistem distribusi yang lancar dengan tujuan dapat memenuhi permintaan dari konsumen. Salah satu ilmuwan manajemen bernama Sana telah mengembangkan model persediaan yang mempertimbangkan permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa. Dalam skripsi ini, akan dilakukan pemerincian analisis dinamik dan kontrol optimal yang telah dilakukan Sana terhadap model tersebut. Analisis dinamik yang dilakukan antara lain melihat adanya keterbatasan solusi dari model, mencari titik kesetimbangan model, dan melihat kestabilan lokal dan global dari titik kesetimbangan tersebut. Titik kesetimbangan bersifat stabil secara lokal saat memenuhi syarat tertentu. Untuk banyaknya kedua produk tidak bernilai nol, dengan menggunakan teorema kestabilan Lyapunov, titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik secara global saat memenuhi syarat tertentu. Kontrol optimal dilakukan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin untuk mendapatkan banyaknya persediaan kedua produk dengan harga jualnya masing-masing dan fungsi upaya yang optimal dalam memaksimalkan keuntungan. Dari analisis sensitivitas untuk dua produk serupa diperoleh bahwa parameter yang paling berpengaruh secara positif terhadap persediaan kedua produk adalah kapasitas maksimum masing-masing produk dan parameter yang paling berpengaruh secara negatif adalah batas atas harga jual masing-masing produk.

Kata-kata kunci: Model EOQ, Analisis Dinamik, Analisis Sensitivitas, Kontrol Optimal, Teorema Kestabilan Lyapunov, Prinsip Maksimum Pontryagin.

ABSTRACT

Inventory is the quantity of products a company has available for consumers to purchase. A company needs to consider the amount of product inventory in order to establish a smooth distribution system with the goal of meeting consumer demand. One management scientist named Sana has developed an inventory model that takes into account demand based on selling price, inventory levels, and sales initiatives for two similar products. This thesis will delve into a detailed analysis of the dynamic and optimal control conducted by Sana on this model. The dynamic analysis includes examining the model's solution constraints, finding the equilibrium point of the model, and assessing the local and global stability of this equilibrium point. The equilibrium point is locally stable when certain conditions are met. For non-zero quantities of both products, using the Lyapunov stability theorem, the equilibrium point is globally asymptotically stable under specific conditions. Optimal control is carried out using the Pontryagin's maximum principle to determine the inventory quantities of the two products along with their respective selling prices and optimal effort functions in order to maximize profits. Sensitivity analysis for the two similar products reveals that the most positively influential parameters on the inventory of the second product are the maximum capacities of each product, while the most negatively influential parameters are the upper limits of the selling prices for each product.

Keywords: EOQ Model, Dynamical Analysis, Sensitivity Analysis, Lyapunov Stability Theorem, Pontryagin's Maximum Principle.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas Rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL MODEL PERSEDIAAN UNTUK PERMINTAAN BERGANTUNG PADA HARGA JUAL, PERSEDIAAN, DAN INISIATIF PENJUALAN DARI DUA PRODUK SERUPA”, sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Program Studi Matematika.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan, dan nasehat dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Orang tua, saudara, dan keluarga besar yang sudah mendukung dan mendampingi penulis selama proses perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Prof. Tri Basuki Joewono, Ph.D. selaku Rektor Universitas Katolik Parahyangan.
3. Ibu Dr. Livia Owen selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Katolik Parahyangan.
4. Bapak Benny Yong, Ph.D dan Bapak Taufik Limansyah, M.T. selaku Dosen Pembimbing yang telah membimbing dan mendampingi penulis selama melakukan penyusunan skripsi.
5. Rekan-rekan lainnya khususnya Katharina Audy Onwardhani, Michael Immanuel, Biqytofa, Billy, Luthfi Caprinanda, Egha Hafidzal, Aditya Pradipta, Mohammad Admiral Ibrochim, Dennis Imanuel, dan Timothy Hoetama yang senantiasa mendukung dan menemani penulis dengan sepenuh hati selama proses perkuliahan dan penyusunan skripsi.

Penulis menyadari bahwa laporan ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, besar harapan penulis untuk adanya kritik dan saran yang membangun agar dapat menjadi referensi untuk penulisan yang sejenis.

Bandung, 14 Agustus 2023

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	xi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	3
1.4 <i>State of the Art</i>	3
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Model EOQ	5
2.2 Sistem Dinamik Kontinu	7
2.2.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Sistem Linear	7
2.2.2 Aproksimasi Linear Terhadap Sistem Tak Linear	8
2.2.3 Kestabilan Global Menggunakan Teorema Kestabilan Lyapunov	8
2.2.4 Indeks Sensitivitas	9
2.2.5 Kontrol Optimal Dengan Prinsip Maksimum Pontryagin	10
3 ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL SUATU MODEL PERSEDIAAN DARI DUA PRODUK SERUPA	12
3.1 Konstruksi Model Persediaan Dari Dua Produk Serupa	12
3.2 Keterbatasan Solusi Pada Model Persediaan	14
3.3 Titik Kesetimbangan Pada Model Persediaan	15
3.4 Analisis Kestabilan Lokal Pada Model Persediaan	20
3.5 Analisis Kestabilan Global Pada Model Persediaan	27
3.6 Kontrol Optimal Pada Model Persediaan	29
4 SIMULASI NUMERIK DAN ANALISIS SENSITIVITAS MODEL PERSEDIAAN DARI DUA PRODUK SERUPA	36
4.1 Simulasi Numerik	36
4.2 Analisis Sensitivitas	37
5 KESIMPULAN DAN SARAN	43
5.1 Kesimpulan	43
5.2 Saran	43
DAFTAR REFERENSI	44

DAFTAR GAMBAR

2.1	Persediaan Produk Terhadap Waktu Dalam Model EOQ	6
2.2	Ilustrasi Penggambaran Fungsi Lyapunov Pada Bidang Vektor	9
4.1	Potret Fase Dari Persediaan Produk X dan Y	37
4.2	Nilai X dan Y Sepanjang Waktu	37
4.3	Diagram Batang Indeks Sensitivitas Persediaan Produk X dan Y Terhadap Setiap Parameter	41



DAFTAR TABEL

3.1	Variabel dan Parameter yang Digunakan	12
3.2	Daftar Titik Kesetimbangan dan Syarat Eksistensinya	20
3.3	Syarat Setiap Titik Kesetimbangan Mencapai Kestabilan Lokal	26
4.1	Nilai Parameter Untuk Simulasi Numerik	36
4.2	Tabel Indeks Sensitivitas Persediaan Produk X dan Y Terhadap Setiap Parameter	41



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persediaan adalah banyaknya produk yang tersedia di perusahaan untuk dibeli oleh konsumen pada suatu waktu tertentu. Sebagian besar ilmuwan manajemen telah memperoleh hubungan antara pengaruh tingkat persediaan produk terhadap daya beli konsumen [1], seperti Ghosh dan Chaudhuri yang mengembangkan model persediaan produk berdetorasi dengan permintaan bergantung pada tingkat persediaan produk [2]. Dalam model ini, diasumsikan semakin banyak produk yang dapat dilihat konsumen akan menarik konsumen untuk membeli produk tersebut. Selanjutnya, oleh Goyal dan Chang dikembangkan model persediaan dengan tingkat permintaan yang bergantung dengan banyaknya produk yang ditampilkan untuk konsumen juga dengan kapasitas penyimpanan yang terbatas [3]. Model ini memiliki dua jenis gudang, yaitu gudang milik sendiri dan gudang yang dapat disewa ketika gudang milik sendiri penuh. Hal ini tentunya akan menyebabkan perusahaan mengeluarkan biaya sewa untuk menyimpan produk tersebut. Oleh sebab itu, dibutuhkan pengelolaan persediaan dengan baik. Dengan manajemen persediaan yang baik dapat menghasilkan sistem distribusi yang efektif dan efisien.

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan perusahaan untuk melakukan manajemen persediaan. Salah satunya adalah *just in time* (JIT), yaitu metode manajemen persediaan di mana produk diterima dari pemasok hanya saat dibutuhkan. Metode ini telah digunakan dalam makalah [4], [5], dan [6]. Pada metode ini, perusahaan tidak memiliki persediaan produk, sehingga dapat menekan biaya penyimpanan persediaan. Namun, metode ini memiliki kekurangan di mana ketika permintaan tiba-tiba melonjak, perusahaan tidak akan bisa memenuhi permintaan pasar. Oleh sebab itu, dikembangkanlah metode lainnya, yaitu metode klasifikasi ABC yang telah digunakan dalam jurnal [7], [8], dan [9], di mana dalam metode ini perusahaan memiliki persediaan produk. Persediaan produk di klasifikasikan ke dalam tiga kelas berdasarkan tingkat penggunaannya. Kelas A berisi produk yang membutuhkan modal sekitar 80% dengan banyaknya produk sekitar 20%. Kelas B berisi produk yang membutuhkan modal sekitar 15% dengan banyaknya produk sekitar 30%. Kelas C berisi produk yang membutuhkan modal sekitar 5% dengan banyaknya produk sekitar 50%. Tetapi, kelemahan dari metode ini adalah tidak mempertimbangkan biaya pemesanan dan penyimpanan, melainkan lebih fokus dalam memperhatikan nilai relatif persediaan. Selain itu, metode ini juga tidak memperhatikan tingkat permintaan konsumen. Selanjutnya dari kelemahan tersebut, kemudian dikembangkanlah suatu metode yang memperhitungkan biaya penyimpanan, pembelian, dan pemesanan dengan biaya pembelian yang bergantung pada permintaan konsumen. Perhitungan ketiga biaya ini dapat dituliskan dalam sebuah model matematika yang dikenal dengan model

Economic Order Quantity (EOQ). Model EOQ merupakan model yang menentukan banyaknya produk yang dipesan oleh perusahaan sehingga meminimalkan biaya persediaan. Dengan model ini, perusahaan mampu menekan biaya persediaan dan meminimalisasi kehabisan persediaan produk. Model EOQ banyak dikembangkan oleh para ilmuwan, salah satunya Sana yang mengembangkan model persediaan yang mempertimbangkan permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan untuk dua produk serupa yang dibahas dalam makalah [1]. Dalam makalah tersebut, dilakukan analisis dinamik dan kontrol optimal terhadap sistem dinamik model. Analisis dinamik dilakukan untuk memahami perilaku solusi model persediaan seiring berjalannya waktu. Dengan demikian dapat dipelajari perubahan dan pola perilaku persediaan dalam jangka waktu tertentu. Analisis dinamik yang dilakukan adalah melihat adanya keterbatasan solusi, mencari titik kesetimbangan, dan menganalisis kestabilan lokal dan kestabilan global dari satu titik kesetimbangan yang ditemukan. Analisis kestabilan lokal dilakukan menggunakan nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks Jacobi yang dibentuk dari model. Nilai eigen dapat memberikan informasi tentang perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Namun, analisis nilai eigen hanya memberikan informasi tentang sifat stabilitas sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut dan tidak memberikan informasi tentang keseluruhan perilaku sistem untuk berbagai kondisi awal atau posisi di dalam ruang fase. Jadi, analisis kestabilan global dilakukan menggunakan teorema kestabilan Lyapunov. Kontrol optimal dilakukan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin untuk mendapatkan banyaknya persediaan produk yang paling optimal untuk perusahaan mendapatkan keuntungan yang maksimal.

Dalam skripsi ini, dilakukan pemerincian terhadap analisis dinamik dan kontrol optimal dalam makalah tersebut. Pemerincian yang dilakukan diantaranya melihat eksistensi dari setiap titik kesetimbangan. Semua titik kesetimbangan dianalisis kestabilan lokalnya. Pemerincian juga dilakukan pada analisis kestabilan global dari titik kesetimbangan yang bernilai tak nol dan pada kontrol optimal. Selain itu, dilakukan analisis sensitivitas untuk melihat parameter yang paling berpengaruh terhadap persediaan kedua produk. Analisis sensitivitas dilakukan dengan menghitung indeks sensitivitas dari persediaan kedua produk terhadap semua parameter yang memengaruhinya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana keterbatasan solusi untuk model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa?
2. Bagaimana kestabilan lokal dan global untuk model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa?
3. Bagaimana kontrol optimal untuk model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa?
4. Bagaimana analisis sensitivitas pada model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari skripsi ini adalah:

1. Memeriksa adanya keterbatasan solusi dari model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa
2. Melakukan analisis kestabilan lokal dan global terhadap model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa
3. Melakukan kontrol optimal untuk model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa
4. Membuat analisis sensitivitas pada model persediaan untuk permintaan bergantung pada harga jual, persediaan, dan inisiatif penjualan dari dua produk serupa

1.4 *State of the Art*

Pada skripsi ini, dilakukan pemerincian terhadap analisis dinamik dan kontrol optimal dari makalah [1]. Dari pemerincian yang dilakukan, diperoleh beberapa kasus khusus dari makalah [1], yaitu untuk banyaknya kedua produk bernilai nol dan untuk salah satu produk bernilai nol. Semua kasus khusus tersebut dianalisis kestabilan lokalnya dan ditemukan syarat kestabilan lokal untuk setiap kasus khususnya. Hal lain yang dilakukan dalam skripsi ini adalah analisis sensitivitas untuk banyaknya produk dengan cara menghitung indeks sensitivitas banyaknya persediaan kedua produk terhadap setiap parameter yang memengaruhinya.

1.5 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari lima bagian, yaitu:

1. Bab 1: Pendahuluan
Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, *State of the Art*, dan sistematika pembahasan.
2. Bab 2: Landasan Teori
Bab ini berisi tentang teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan pada skripsi ini, diantaranya model EOQ dan sistem dinamik kontinu yang berisi kestabilan lokal titik setimbang sistem linear, aproksimasi linear terhadap sistem tak linear, kestabilan global menggunakan teorema kestabilan Lyapunov, Indeks Sensitivitas, dan kontrol optimal dengan prinsip maksimum Pontryagin.
3. Bab 3: Analisis Dinamik dan Kontrol Optimal Suatu Model Persediaan Dari Dua Produk Serupa
Bab ini berisi tentang konstruksi model persediaan dari dua produk serupa, keterbatasan solusi pada model persediaan, titik kesetimbangan pada model persediaan, analisis kestabilan lokal pada model persediaan, analisis kestabilan global pada model persediaan, dan kontrol optimal pada model persediaan.

4. Bab 4: Simulasi Numerik dan Analisis Sensitivitas Model Persediaan Dari Dua Produk Serupa
Bab ini berisi tentang simulasi numerik dan analisis sensitivitas. Simulasi numerik dilakukan untuk mendapat kondisi yang optimal dari persediaan kedua produk, fungsi upaya, dan harga jual kedua produk. Saat kondisi optimal tersebut, fungsi keuntungan dapat dimaksimalkan. Analisis sensitivitas dilakukan dengan menghitung indeks sensitivitas dari persediaan kedua produk terhadap setiap parameter yang mempengaruhinya.
5. Bab 5: Kesimpulan dan Saran
Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

