

SKRIPSI

**PENGGUNAAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN
LAPLACE UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA**



MANZO SENJAYA BUDIMAN

NPM: 6161901110

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2023**

FINAL PROJECT

**APPLICATION OF LAPLACE ADOMIAN DECOMPOSITION
METHOD TO SOLVE ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS**



MANZO SENJAYA BUDIMAN

NPM: 6161901110

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2023**

LEMBAR PENGESAHAN

PENGGUNAAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Manzo Senjaya Budiman

NPM: 6161901110

Bandung, 1 Agustus 2023

Menyetujui,

Pembimbing 1



Dr. Livia Owen

Pembimbing 2



Dr. Daniel Salim

Ketua Penguji



Benny Yong, Ph.D.

Anggota Penguji



Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PENGGUNAAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
1 Agustus 2023



Manzo Senjaya Budiman
NPM: 6161901110

ABSTRAK

Persamaan diferensial biasa banyak digunakan sebagai perumusan matematis untuk menggambarkan atau memodelkan suatu kejadian pada kehidupan sehari-hari. Dalam mendeskripsikan suatu kejadian, terdapat beberapa asumsi tertentu pada model sedemikian sehingga dapat ditemukan solusi dari persamaan tersebut. Terdapat banyak cara untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal, salah satunya menggunakan transformasi Laplace. Penggunaan transformasi Laplace memiliki kelebihan, yaitu mengubah persamaan diferensial biasa linear menjadi masalah aljabar. Namun, yang menjadi kekurangannya adalah tidak ada bentuk transformasi Laplace untuk fungsi tak linear. Untuk menangani kekurangan tersebut, diterapkan metode semi-analitik, yaitu metode dekomposisi Adomian Laplace. Pada skripsi ini, akan ditunjukkan kesesuaian solusi yang diperoleh dengan metode dekomposisi Adomian Laplace dan dibandingkan dengan solusi umum serta solusi khusus persamaan diferensial biasa linear dan tak linear. Solusi dari metode ini berbentuk deret tak hingga, pada beberapa contoh di skripsi ini diperoleh hasil bahwa semakin banyak suku pada deret tersebut maka akan semakin mendekati solusi eksaknya.

Kata-kata kunci: persamaan diferensial biasa; masalah nilai awal; transformasi Laplace; metode dekomposisi Adomian Laplace.

ABSTRACT

Ordinary differential equations are widely used as a mathematical formulation to describe or modelling a phenomena in real life. In describing a phenomena, there are certain assumptions on the model so that the solution of the equation can be found. There are many ways to solve an ordinary differential equation with initial value problem, one of which is the Laplace transformation. The Laplace transformation has the advantage of changing the linear ordinary differential equation into an algebraic problem. However, the disadvantage is that there is no Laplace transformation form for non-linear functions. To handle this problem, a semi-analytic method, which is the Adomian Laplace decomposition method, is applied. In this undergraduate thesis, the suitability of the solution obtained by Adomian Laplace decomposition method will be shown and compared with the general solution and particular solution of linear and non-linear ordinary differential equations. The solution of this method is in the form of an infinite series, in some examples in this undergraduate thesis, obtained conclusion that the sum of a partial sum with sufficiently many terms, which is getting closer to the exact solution.

Keywords: ordinary differential equation; initial value problem; Laplace transform; Laplace Adomian decomposition method.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan yang Maha Esa atas segala penyertaan, rahmat, dan kasih sayang-Nya setiap waktu sehingga penulis dapat menuntaskan skripsi yang berjudul “Penggunaan Metode Dekomposisi Adomian Laplace Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa”, sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana Sains Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi tidak akan selesai tanpa bantuan dari berbagai pihak. Maka dari itu, pada kesempatan ini penulis ingin terima kasih kepada:

- Papah, Mamah, dan saudara-saudara penulis yang senantiasa mendoakan dan memberikan dukungan akan kelancaran penulisan skripsi ini.
- Ibu Dr. Livia Owen dan Bapak Dr. Daniel Salim, selaku Dosen Pembimbing, atas bimbingan, saran, ilmu, arahan, motivasi, dan semangat kepada penulis selama proses penyusunan skripsi.
- Bapak Benny Yong, Ph.D. dan Bapak Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math., selaku Dosen Penguji, atas arahan dan saran secara fundamental maupun pada bagian penulisan untuk perbaikan skripsi ini.
- Ibu Felivia Kusnadi, M.Act.Sc. selaku Dosen Wali yang selalu memberikan saran dan nasihat yang sangat berdampak pada proses perkuliahan.
- Seluruh jajaran dekanat FTIS, Ketua Jurusan Matematika, Ketua Program Studi Matematika, seluruh dosen Program Studi Matematika, serta seluruh staf Tata Usaha FTIS yang telah banyak memberikan ilmu, bantuan, dan arahan, baik secara akademik, administratif, ataupun informasi selama perkuliahan.
- Arvin, Cesung, Aldynova, Rico, Darwin, dan semua teman penulis yang telah mendukung, memotivasi, dan memberikan semangat selama proses perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dan kesalahan dalam penyusunan skripsi ini. Maka dari itu, Penulis mengharapkan saran dan kritik demi kesempurnaan dan perbaikan sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan memberikan manfaat bagi bidang pendidikan serta bisa dikembangkan lebih lanjut. Terakhir, penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat dan menginspirasi bagi pembaca.

Bandung, 1 Agustus 2023

Manzo Senjaya

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	xi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	2
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Persamaan Diferensial Biasa	4
2.2 Transformasi Laplace	5
2.2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace	7
2.2.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Transformasi Laplace	11
2.3 Metode Dekomposisi Adomian Laplace	12
2.4 Aproksimasi Padé	15
2.5 Notasi Asimptotik : Big O	20
3 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINEAR ORDE DUA HOMOGEN KOEFISIEN KONSTAN	21
3.1 Solusi Untuk Persamaan Karakteristik Berakar Kembar	23
3.2 Solusi Untuk Persamaan Karakteristik Berakar Beda	33
4 PENERAPAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA	44
4.1 Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde Dua	44
4.2 Persamaan Diferensial Biasa Tak Linear Orde Dua	48
5 KESIMPULAN	53
5.1 Kesimpulan	53
5.2 Saran	54
DAFTAR REFERENSI	55
A PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA TAK LINEAR ORDE DUA	57

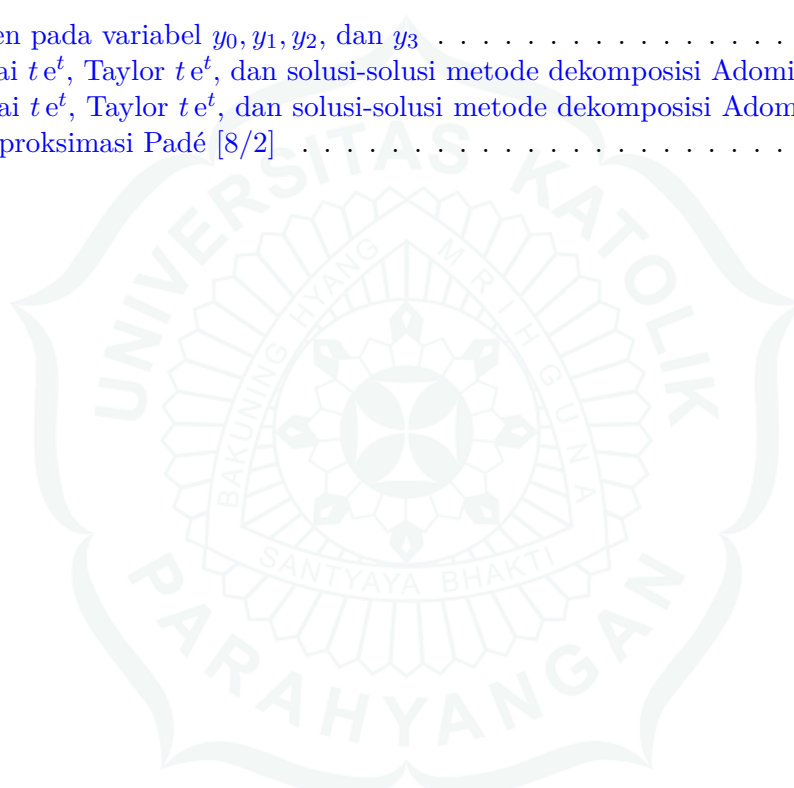
DAFTAR GAMBAR

2.1	Plot e^x dengan Taylor e^x dan aproksimasi Padé $[3/3]$, dan $[4/4]$	19
2.2	Plot e^x dengan Taylor e^x dan aproksimasi Padé $[3/4]$, dan $[4/3]$	19
2.3	Plot galat dari Taylor e^x dan aproksimasi Padé $[3/3]$, $[4/4]$, $[3/4]$, dan $[4/3]$	19
4.1	Perbandingan $e^t + \frac{e^{2t}}{3}$ dengan y_0 dan $y_0 + \dots + y_5$	47
4.2	Perbandingan $e^t + \frac{e^{2t}}{3}$ dengan $y_0 + \dots + y_{10}$ dan $y_0 + \dots + y_{15}$	47
4.3	Perbandingan te^t dengan Taylor te^t , $y_0 + \dots + y_4$, dan $y_0 + \dots + y_5$	50
4.4	Perbandingan te^t dengan Taylor te^t , $y_0 + \dots + y_6$, dan $y_0 + \dots + y_7$	50
4.5	Plot galat dari Taylor te^t dan solusi-solusi dari metode dekomposisi Adomian Laplace	51
4.6	Perbandingan $te^t[8/2]$ dengan Taylor $te^t[8/2]$, $y_0 + \dots + y_4[8/2]$, dan $y_0 + \dots + y_5[8/2]$	51
4.7	Perbandingan $te^t[8/2]$ dengan Taylor $te^t[8/2]$, $y_0 + \dots + y_6[8/2]$, dan $y_0 + \dots + y_7[8/2]$	51
4.8	Plot galat solusi menggunakan aproksimasi Padé $[8/2]$	52



DAFTAR TABEL

2.1	Tabel Transformasi Laplace	7
2.2	Tabel nilai e^x , deret Taylor e^x , dan aproksimasi Padé [3/3], [4/4], [3/4], dan [4/3]	19
3.1	Tabel total koefisien dari α	42
3.2	Tabel total koefisien dari $\beta - c\alpha$	42
4.1	Komponen pada variabel y_0, y_1, y_2 , dan y_3	46
4.2	Tabel nilai te^t , Taylor te^t , dan solusi-solusi metode dekomposisi Adomian Laplace	50
4.3	Tabel nilai te^t , Taylor te^t , dan solusi-solusi metode dekomposisi Adomian Laplace dengan aproksimasi Padé [8/2]	51



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Skripsi ini membahas mengenai penggunaan metode dekomposisi Adomian Laplace dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear orde dua. Persamaan-persamaan diferensial biasanya dibuat untuk mendeskripsikan fenomena-fenomena dalam kehidupan yang sulit dibayangkan [1], sehingga terbentuklah ide untuk memodelkan fenomena tersebut secara matematis dengan tujuan membantu mendeskripsikan fenomena tersebut. Perlu diketahui, suatu model matematis tidak mungkin mendeskripsikan faktor-faktor secara keseluruhan, baik internal maupun eksternal. Mengingat hal tersebut, maka suatu model tidak akan lepas dari asumsi-asumsi tertentu [2]. Contohnya, ketika membuat suatu model matematis biasanya diasumsikan bahwa terdapat suatu nilai awal serta variabel bebas, misalnya waktu, yang kontinu.

Persamaan diferensial biasa linear merupakan contoh model matematis yang solusinya dapat dicari secara analitik, seperti faktor integrasi, separasi variabel, koefisien tak tentu, variasi parameter, dan transformasi Laplace [3, bab 2-3]. Tiap metode memiliki batasan dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial, salah satu batasan tersebut adalah bentuk dari persamaan diferensial.

Penggunaan transformasi Laplace dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial biasa linear memiliki kelebihan yaitu pencarian solusi dari suatu persamaan diferensial menjadi sama halnya dengan penyelesaian suatu masalah aljabar, namun memiliki kelemahan berupa kondisi awal harus diketahui [4, hlm. 203]. Sedangkan, untuk persamaan diferensial biasa tak linear, sulit untuk dicari solusinya secara analitik. Penggunaan transformasi Laplace pun semakin dibatasi karena ada beberapa fungsi tak linear yang tidak dapat ditransformasikan secara langsung, sehingga seringkali tidak dapat digunakan. Dengan demikian, diperkenalkan metode semi-analitik yaitu metode dekomposisi Adomian Laplace, untuk mengatasi masalah tersebut.

Metode dekomposisi Adomian pertama kali diusulkan oleh George Adomian [5], dan penerapan utamanya adalah menyelesaikan persamaan diferensial dengan nilai awal yang memuat fungsi tak linear [6]. Yang menjadi ciri khas dari metode dekomposisi Adomian yaitu menggunakan polinomial Adomian untuk merepresentasikan suku tak linear pada persamaan diferensial. Dengan demikian, penggunaan transformasi Laplace untuk persamaan diferensial biasa tak linear dapat dilakukan dengan bantuan metode dekomposisi Adomian. Gabungan antara metode dekomposisi Adomian dengan transformasi Laplace adalah metode dekomposisi Adomian Laplace [7]. Meski sudah banyak penerapannya pada banyak kasus, seperti sistem persamaan diferensial dan sistem persamaan integro-diferensial [8], sayangnya belum ada pembuktian secara analitik mengenai kesesuaian dari metode tersebut.

Dalam penelitian ini, akan dibuktikan bahwa metode dekomposisi Adomian Laplace dapat mengaproksimasi solusi eksak secara akurat dengan menerapkan ke persamaan diferensial biasa bentuk sederhana, yaitu bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear orde dua koefisien konstan homogen. Setelah itu, metode semi-analitik tersebut akan digunakan untuk mencari hampiran solusi dari persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa tak linear, yang kemudian akan dibandingkan dengan solusi eksaknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut masalah-masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini

1. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial biasa orde dua menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace?
2. Bagaimana cara membuktikan secara analitik kesesuaian dari metode dekomposisi Adomian Laplace dengan menunjukkan kesesuaian solusi umum persamaan diferensial biasa linear orde dua koefisien konstan homogen?
3. Bagaimana akurasi solusi persamaan diferensial biasa linear dan tak linear dari metode dekomposisi Adomian dibandingkan dengan solusi eksak?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. menerapkan metode dekomposisi Adomian Laplace pada persamaan-persamaan diferensial biasa orde dua;
2. menunjukkan kesesuaian solusi dari persamaan diferensial biasa linear orde dua koefisien konstan homogen dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace;
3. mengevaluasi akurasi solusi dari metode dekomposisi Adomian Laplace dan hasil dari aproksimasi Padé dengan solusi eksaknya.

1.4 *State of the Art*

Metode semi-analitik mempunyai banyak jenis, antara lain metode dekomposisi Adomian, metode dekomposisi Adomian Laplace, dan metode transformasi diferensial. Metode-metode ini memiliki tujuan yang sama yaitu menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial.

Dalam skripsi ini, penelitian dilakukan dengan menerapkan metode dekomposisi Adomian Laplace. Dipilihnya metode tersebut dikarenakan adanya kelebihan berupa penggunaan transformasi Laplace yang membuat persamaan-persamaan diferensial menjadi permasalahan aljabar. Namun, jika terdapat bentuk tak linear pada proses transformasi, maka digunakan polinomial Adomian yang bertujuan merepresentasikan bentuk tak linear pada persamaan diferensial biasa.

Sudah ditunjukkan pula efektifitas metode dekomposisi Adomian Laplace dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua [7]. Algoritma penggunaan metode dekomposisi Adomian Laplace dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa pada [7] dilakukan dengan cara mengelompokkan berdasarkan fungsi turunan, sedangkan pada skripsi ini akan dilakukan pengelompokkan dengan cara yang berbeda, yaitu pengelompokkannya dilakukan berdasarkan fungsi turunan dengan orde tertinggi [9]. Selain itu, akan dilakukan pemerincian perhitungan, pengembangan hasil dengan menggunakan aproksimasi Padé khususnya untuk persamaan diferensial dengan fungsi tak linear, serta penambahan visualisasi dan perbandingan galat dari solusi yang didapat. Kekurangan dari metode semi-analitik ini adalah belum adanya pembuktian secara matematis mengenai kesesuaian dari metode tersebut sehingga pada skripsi ini akan dibuktikan kesesuaian dari metode dekomposisi Adomian Laplace dengan mengambil bentuk solusi umum dari persamaan diferensial biasa linear orde dua koefisien konstan homogen sebagai perbandingan.

