

**SKRIPSI**

**METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL,  
METODE ITERASI VARIASIONAL,  
DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT  
UNTUK PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN  
DIFERENSIAL**



**ARVIN BUNAWAN**

**NPM: 6161901081**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2023**

**FINAL PROJECT**

**DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD,  
VARIATIONAL ITERATION, AND RUNGE KUTTA FOURTH  
ORDER FOR SOLVING SYSTEM OF DIFFERENTIAL  
EQUATIONS**



**ARVIN BUNAWAN**

**NPM: 6161901081**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2023**

# LEMBAR PENGESAHAN

## METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL, METODE ITERASI VARIASIONAL, DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT UNTUK PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

ARVIN BUNAWAN

NPM: 6161901081

Bandung, 22 Maret 2023

Menyetujui,

Pembimbing



Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Penguji



Liem Chin, M.Si.

Anggota Penguji



Dr. Ferry Jaya Permana

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

## PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL,  
METODE ITERASI VARIASIONAL,  
DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT  
UNTUK PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
22 Maret 2023



ARVIN BUNAWAN  
NPM: 6161901081

## ABSTRAK

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat fungsi yang tak diketahui dan turunan-turunannya. Beberapa persamaan diferensial yang saling terkait satu sama lain disebut sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial yang berbentuk tak linear seringkali sulit diperoleh solusi analitiknya sehingga diperkenalkan beberapa metode yang bersifat semi analitik seperti metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional. Metode transformasi diferensial membangun sebuah pendekatan analitik dengan ide dasar deret Taylor untuk menghasilkan solusi persamaan diferensial berupa deret pangkat. Metode ini cukup akurat untuk selang di sekitar waktu awal yaitu  $t = 0$ . Sedangkan solusi metode transformasi diferensial dibandingkan dengan metode iterasi variasional, metode ini membutuhkan langkah-langkah rekursif untuk memperoleh solusi yang semakin mendekati solusi sebenarnya. Kemudian, kedua metode tersebut diaplikasikan untuk menentukan solusi dari sistem model penularan virus HIV terhadap sel T CD4<sup>+</sup> pada tubuh manusia. Dari kedua metode tersebut, diperoleh solusi semi analitik berupa deret pangkat. Kedua solusi semi analitik yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi numerik dengan metode Runge Kutta. Dari ketiga metode tersebut, memberikan solusi hasil numerik yang serupa.

**Kata-kata kunci:** persamaan diferensial; sistem persamaan diferensial; deret Taylor; metode transformasi diferensial; metode iterasi variasional; metode Runge Kutta; model penularan virus HIV.

## ABSTRACT

A differential equation is an equation that contains the unknown function and its derivatives. Several differential equations that are related to each other are called a system of differential equations. It is often difficult to obtain an analytical solution for a system of differential equations with non-linear forms, so several semi-analytical methods such as differential transformation methods and variational iteration methods are introduced. The differential transformation method builds an analytic approach with the basic idea of Taylor series to produce a solution of the differential equation in the form of a power series. This method is quite accurate for intervals around the initial time i.e.  $t = 0$ . While the solution of the differential transformation method is compared to the iterational iteration method, this method requires recursive steps to obtain a solution that is closer to the actual solution. Then, both methods were applied to determine the solution of the model system of HIV transmission against  $CD4^+$  T cells in the human body. From these two methods, a semi-analytical solution is obtained in the form of a power series. The two semi-analytical solutions obtained will be compared with numerical solutions using the Runge Kutta method. Of the three methods, the solutions provide numerical results that are similar.

**Keywords:** differential equation; system of differential equations; Taylor series; differential transformation method; variational iteration method; Runge Kutta method; HIV virus spread model.

## KATA PENGANTAR

Dalam kerendahan hati, puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus, sumber segala hikmat dan kebijaksanaan, yang telah memberikan petunjuk dan anugerah-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan judul "Metode Transformasi Diferensial, Metode Iterasi Variasional, dan Metode Runge Kutta Orde Empat untuk Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial". Saya Arvin Bunawan, seorang mahasiswa dari Universitas Katolik Parahyangan jurusan Matematika peminatan Aktuaria menyusun skripsi ini untuk menyelesaikan syarat lulus Strata-1. Penulis menyadari akan banyaknya bantuan dalam proses penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, pada bagian ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Keluarga inti (Papa, Mama, Cici, dan Dede) dan juga keluarga besar dari pihak mama saya yang telah mendukung, menasehati, menyemangati, dan mendoakan saya, sehingga skripsi ini bisa selesai.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. selaku dosen pembimbing saya yang senantiasa membimbing, mengarahkan, serta memberikan ilmu dan saran terbaik dalam proses pengerjaan dan penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Liem Chin, M.Si. dan Bapak Dr. Ferry Jaya Permana selaku dosen penguji yang memberikan saran dan komentar agar skripsi ini menjadi lebih baik.
4. Seluruh staff dan dosen FTIS UNPAR, yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang tak ternilai selama menempuh pendidikan di program studi matematika.
5. Christian Soenggoro S.Si selaku sahabat saya yang mau membantu menyempurnakan programan yang saya kerjakan pada skripsi saya.
6. Manzo, Aldynova, Rico, dan semua teman-teman yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang mendukung dan memotivasi penulis hingga skripsi dapa selesai.
7. Teman-teman dari group ONYX yang senantiasa tetap mendukung dan mengasah mental penulis dari SMA hingga saat ini dengan bermain dan belajar bersama walau berbeda bidang kuliah yang diambil.
8. Segenap program studi matematika, penulis ucapkan terima kasih atas kehadiran dan semangat persaudaraan yang tulus dari teman-teman yang telah memberikan dukungan dan inspirasi yang tak tergantikan selama perjalanan studi.

Penulis sadar bahwa skripsi ini tidak sempurna. Oleh karena itu, penulis terbuka untuk menerima segala kritik dan saran yang dapat membangun dan menyempurnakan skripsi ini. Terakhir, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Bandung, 3 Agustus 2023

Penulis

# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xii</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 <i>State of the Art</i> . . . . .	2
1.5 Sistematika Pembahasan . . . . .	3
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>4</b>
2.1 Sistem Persamaan Diferensial Biasa . . . . .	4
2.2 Deret Taylor . . . . .	4
2.3 Runge Kutta Orde 4 . . . . .	5
<b>3 METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL DAN METODE ITERASI VARIASIONAL</b>	<b>7</b>
3.1 Transformasi Diferensial . . . . .	7
3.1.1 Sifat-Sifat Metode Transformasi Diferensial . . . . .	7
3.2 Metode Iterasi Variasional . . . . .	10
3.3 Penerapan Metode Transformasi Diferensial, Metode Iterasi Variasional, dan Metode Runge Kutta Orde Empat pada Persamaan Diferensial Riccati . . . . .	11
3.3.1 Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Persamaan Diferensial Riccati . . . . .	12
3.3.2 Penerapan Metode Iterasi Variasional pada Persamaan Diferensial Riccati . . . . .	12
3.3.3 Penerapan Metode Runge Kutta Orde Empat pada Persamaan Diferensial Riccati . . . . .	14
3.3.4 Plot Grafik Solusi Persamaan Diferensial Riccati Antar Metode . . . . .	14
3.4 Penerapan Metode Transformasi Diferensial, Metode Iterasi Variasional, dan Metode Runge Kutta Orde Empat pada Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	16
3.4.1 Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	16
3.4.2 Penerapan Metode Iterasi Variasional pada Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	17
3.4.3 Penerapan Metode Runge Kutta Orde Empat pada Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	18
3.4.4 Plot Grafik Solusi Sistem Persamaan Diferensial Antar Metode . . . . .	19
<b>4 SOLUSI MODEL PENULARAN VIRUS HIV-1 TERHADAP SEL-T CD4<sup>+</sup></b>	<b>24</b>



4.1	Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> . . . . .	24
4.2	Solusi Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> dengan Metode Transformasi Diferensial . . . . .	24
4.3	Solusi Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> dengan Metode Iterasi Variasional . . . . .	28
4.4	Solusi Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> dengan Metode Runge Kutta Orde Empat . . . . .	30
4.5	Plot Grafik Solusi Sistem Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> Antar Metode . . . . .	32
<b>5</b>	<b>PENUTUP</b> . . . . .	<b>34</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	34
5.2	Saran . . . . .	34
	<b>DAFTAR REFERENSI</b> . . . . .	<b>35</b>

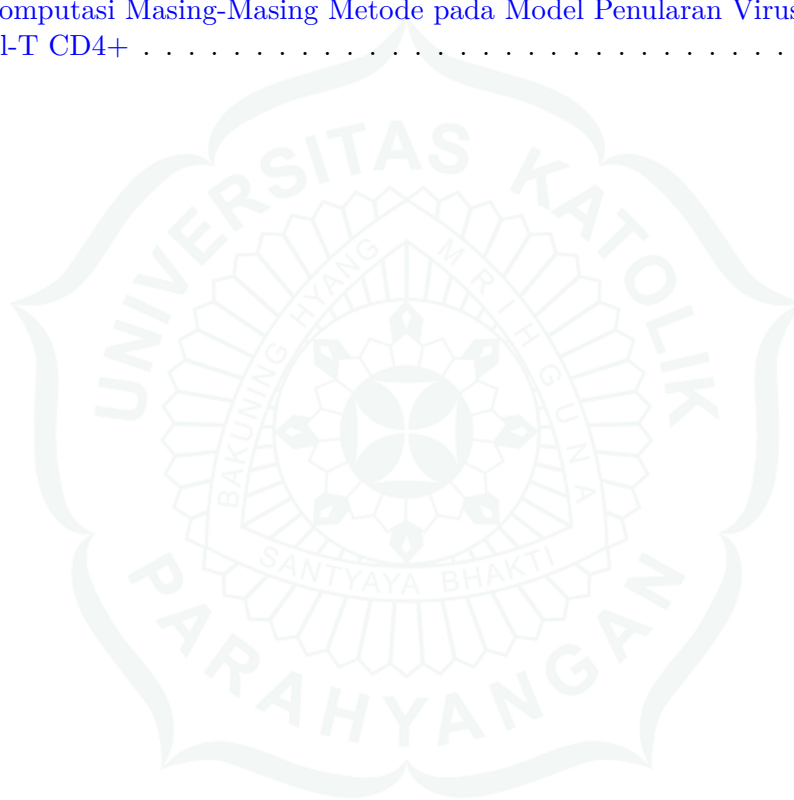


## DAFTAR GAMBAR

3.1	Grafik Solusi Semi Analitik PD Riccati . . . . .	14
3.2	Grafik Penurunan Persentase Galat Relatif Aproksimasi PD Riccati Metode Semi Analitik . . . . .	15
3.3	Grafik Solusi Numerik dengan RK4 dan Perbandingan Antar 3 Metode PD Riccati	15
3.4	Perbandingan Grafik Solusi Semi Analitik untuk SPD Variabel $p$ . . . . .	20
3.5	Perbandingan Grafik Solusi Semi Analitik untuk SPD Variabel $q$ . . . . .	20
3.6	Perbandingan Grafik Solusi Semi Analitik untuk SPD Variabel $r$ . . . . .	21
3.7	Grafik Solusi Sistem Persamaan Diferensial dengan Metode Runge Kutta Orde Empat	21
3.8	Grafik Penurunan Persentase Galat Relatif Sistem Persamaan Diferensial (MTD) .	22
3.9	Grafik Penurunan Persentase Galat Relatif Sistem Persamaan Diferensial (MIV) .	22
3.10	Grafik Solusi Sistem Persamaan Diferensial Antar Metode . . . . .	23
4.1	Grafik Solusi Antar $k$ Sistem Model Penularan Virus HIV Terhadap Sel CD4 <sup>+</sup> (MTD)	27
4.2	Grafik Penurunan Persentase Galat Relatif Aproksimasi Sistem Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> (MTD) . . . . .	27
4.3	Grafik Solusi Antar Iterasi Sistem Model Penularan Virus HIV Terhadap Sel CD4 <sup>+</sup> (MIV) . . . . .	29
4.4	Grafik Penurunan Persentase Galat Relatif Aproksimasi Sistem Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4 <sup>+</sup> (MIV) . . . . .	30
4.5	Grafik Sistem Model Penularan Virus HIV Terhadap Sel CD4 <sup>+</sup> (RK4) . . . . .	32
4.6	Grafik Solusi Sistem Model Penularan Virus HIV Terhadap Sel CD4 <sup>+</sup> Antar Metode	33

## DAFTAR TABEL

3.1	Sifat - Sifat Transformasi Diferensial . . . . .	11
3.2	Waktu Komputasi Masing-Masing Metode pada Persamaan Diferensial Riccati . . . . .	16
3.3	Waktu Komputasi Masing-Masing Metode pada Sistem Persamaan Diferensial . . . . .	20
4.1	Hasil TD $k = 3, 4, 5, \dots$ . . . . .	26
4.2	Waktu Komputasi Masing-Masing Metode pada Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T CD4+ . . . . .	33



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari banyak kejadian alam yang kita jumpai seperti pergerakan benda atau manusia, gerak gelombang, dan lainnya. Kejadian alam tersebut merupakan aspek yang bisa dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Hal yang paling mudah kita jumpai adalah kejadian yang memiliki keterkaitan dengan waktu, seperti gerakan partikel, peluruhan zat radioaktif, gelombang, difusi atau konduksi panas dimensi satu, rangkaian listrik, dan kejadian-kejadian lainnya. Suatu peristiwa dapat dimodelkan menjadi persamaan diferensial, jika peristiwa tersebut merupakan laju perubahan terhadap waktu, misalkan kecepatan merupakan laju perubahan posisi sesaat dalam suatu interval waktu tertentu [1, hlm . 16-17]. Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang terdiri dari fungsi yang tak diketahui dan turunan-turunannya.

Sistem persamaan diferensial biasa yang linear umumnya dapat diselesaikan menggunakan metode analitik seperti metode transformasi Laplace [2], metode koefisien tak tentu [2], dan metode variasi parameter [2]. Namun untuk sistem persamaan diferensial biasa yang tak linear, penyelesaian secara analitik tidak mudah bahkan mustahil untuk dilakukan. Beberapa metode numerik seperti metode Runge-Kutta dapat diaplikasikan untuk memperoleh penyelesaian secara numerik. Selain metode numerik tersebut, dapat pula digunakan metode iteratif yang menghasilkan suatu pendekatan penyelesaian numerik semi analitik yang berupa sebuah fungsi deret pangkat. Pada tahun 1986, Zhou memperkenalkan suatu metode yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial baik yang linear maupun tidak linear, yaitu dengan metode transformasi diferensial. Metode ini membangun sebuah teknik semi analitik dengan ide dasar deret Taylor untuk menghasilkan penyelesaian persamaan diferensial dalam bentuk polinom [3].

Selain metode transformasi diferensial, sistem persamaan diferensial tak linear juga dapat diselesaikan dengan metode iterasi variasional. Metode iterasi variasional adalah metode yang dikembangkan oleh Ji Huan He untuk menyediakan metode yang efektif dan efisien untuk memecahkan suatu sistem persamaan diferensial tak linear. Hasil yang diperoleh dari metode ini untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial akan membentuk deret Taylor [4].

Pada skripsi ini, metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional diterapkan untuk menentukan solusi semi analitik dari persamaan diferensial Riccati, sistem persamaan diferensial linear, dan sistem persamaan diferensial tak linear. Sistem persamaan diferensial tak linear diaplikasikan pada sistem model penularan virus HIV terhadap sel imun pada tubuh manusia. Kedua solusi semi analitik ini akan dibandingkan dengan solusi numeriknya [metode Runge Kutta orde empat (RK4)].

## 1.2 Rumusan Masalah

Berikut merupakan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini.

1. Bagaimana menentukan solusi semi analitik dari persamaan diferensial Riccati dan sistem persamaan diferensial linear dengan metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional?
2. Bagaimana metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional diaplikasikan untuk menentukan solusi pada model penularan virus HIV pada sel-T CD4<sup>+</sup>?
3. Bagaimana hasil perbandingan solusi metode semi analitik (metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional) dengan metode numerik (metode Runge Kutta orde empat)?

## 1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Menentukan solusi semi analitik dari persamaan diferensial Riccati dan sistem persamaan diferensial linear dengan metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional.
2. Mengaplikasikan metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional untuk menentukan solusi pada model penularan virus HIV pada sel-T CD4<sup>+</sup>.
3. Dapat melihat perbandingan solusi metode numerik (metode Runge Kutta orde empat) dengan solusi metode semi analitik (metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional) memiliki solusi yang berhimpit.

## 1.4 *State of the Art*

Dalam skripsi ini, dilakukan pengembangan menentukan solusi untuk model penularan virus HIV-1 terhadap sel-T CD4<sup>+</sup> dengan beberapa metode semi analitik, yaitu metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional. Solusi yang dihasilkan dari kedua metode tersebut kemudian dibandingkan dengan solusi numerik, yaitu dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Hasil perbandingan akan ditampilkan berupa grafik dengan bantuan Maple. Berikut ini disertakan beberapa penelitian sebelumnya dan referensi-referensi yang digunakan berkaitan dengan pencarian solusi model penularan virus HIV terhadap sel imun pada tubuh manusia:

1. Pada [1] dan [2] dibahas beberapa metode untuk mencari solusi analitik untuk persamaan diferensial dan sistem persamaan diferensial, seperti metode koefisien tak tentu, metode variasi parameter, metode diagonalisasi, metode transformasi Laplace. Selanjutnya pada referensi buku [5] dibahas mengenai metode numerik yang digunakan pada skripsi ini seperti metode Runge-Kutta, metode Euler, metode Heun.
2. Metode semi analitik yang digunakan pada skripsi ini seperti metode transformasi diferensial [6] dan metode iterasi variasional [4]. Kedua referensi tersebut menjelaskan mengenai latar belakang dan penjelasan metode yang dapat dipahami, yang akan dijabarkan kembali pada bab tiga.

3. Model penularan virus HIV terhadap sel imun pada tubuh manusia yaitu sel-T  $CD4^+$  dijelaskan pada [7]. Solusi pada sistem model tersebut diperoleh dengan metode semi analitik, yaitu metode Laplace Adomian dan dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde empat.

## 1.5 Sistematika Pembahasan

### 1. Bab 1: Pendahuluan

Bab satu merupakan bagian pengenalan pada skripsi ini. Bab satu terbagi atas lima bagian, yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan, *state of the art*, dan sistematika pembahasan.

### 2. Bab 2: Landasan Teori

Bab dua menjelaskan mengenai metode Runge Kutta orde empat dan teori-teori yang menjadi landasan dari metode-metode semi analitik yang digunakan pada skripsi ini.

### 3. Bab 3: Metode Transformasi Diferensial dan Metode Iterasi Variasional

Bab tiga pada skripsi ini membahas mengenai metode transformasi diferensial dan metode iterasi variasional dan mencari solusi contoh persamaan diferensial Riccati dan sistem persamaan diferensial linear dengan ketiga metode.

### 4. Bab 4: Solusi Model Penularan Virus HIV-1 Terhadap Sel-T $CD4^+$ dengan Metode Semi Analitik dan Metode Runge Kutta Orde Empat

Bab empat pada skripsi ini mengaplikasikan metode yang sudah dibahas pada bab dua dan bab tiga untuk menemukan solusi model penularan virus HIV-1 terhadap sel-T  $CD4^+$ .

### 5. Bab 5: Penutup

Bab lima pada skripsi ini dibagi menjadi dua, yaitu kesimpulan bab tiga dan empat dan juga saran untuk pengembangan skripsi ini.