

SKRIPSI

**PENGGUNAAN ALJABAR *MAX-PLUS* UNTUK
MENENTUKAN WAKTU TERCEPAT PENYELESAIAN
PROYEK DAN PERBANDINGANNYA DENGAN *CPM* DAN
*PERT***



FILBERT

NPM: 6161901005

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2023**

FINAL PROJECT

**AN APPLICATION OF MAX-PLUS ALGEBRA FOR THE
DETERMINATION OF THE EARLIEST FINISH TIME OF
PROJECTS AND ITS COMPARISON WITH CPM AND PERT**



FILBERT

NPM: 6161901005

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2023**

LEMBAR PENGESAHAN

PENGGUNAAN ALJABAR *MAX-PLUS* UNTUK MENENTUKAN WAKTU TERCEPAT PENYELESAIAN PROYEK DAN PERBANDINGANNYA DENGAN *CPM* DAN *PERT*

Filbert

NPM: 6161901005

Bandung, 17 Juli 2023

Menyetujui,

Pembimbing 1



Iwan Sugiarto, M.Si.

Pembimbing 2



Jonathan Hoseana, Ph.D.

Ketua Penguji



Dr. Erwinna Chendra

Anggota Penguji



Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**PENGGUNAAN ALJABAR *MAX-PLUS* UNTUK MENENTUKAN WAKTU
TERCEPAT PENYELESAIAN PROYEK DAN PERBANDINGANNYA
DENGAN *CPM* DAN *PERT***

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
17 Juli 2023



Filbert
NPM: 6161901005

ABSTRAK

Misalkan terdapat suatu proyek yang terdiri dari beberapa kegiatan yang saling berkaitan, dalam arti bahwa beberapa kegiatan merupakan prasyarat bagi kegiatan-kegiatan lainnya. Misalkan pula diketahui durasi dari tiap-tiap kegiatan tersebut. Berdasarkan data durasi-durasi ini, akan ditentukan waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut. Untuk menyelesaikan masalah ini, metode-metode yang sering digunakan adalah *CPM* (*critical path method*) dan *PERT* (*program evaluation and review technique*). Namun, kedua metode tersebut memerlukan pembuatan graf. Dalam skripsi ini, akan dibahas suatu metode lain untuk menentukan waktu tercepat penyelesaian proyek tanpa memerlukan pembuatan graf, yaitu metode aljabar max-plus. Dibahas langkah-langkah dari metode ini beserta suatu contoh sederhana sebagai ilustrasi, lalu metode tersebut diaplikasikan ke dalam sebuah proyek diambil dari makalah yang ada di literatur, yaitu proyek *new product development*. Dalam makalah tersebut, waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut telah ditentukan dengan *CPM* dan *PERT* saja. Dalam skripsi ini, penghitungan waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut dengan *CPM* dan *PERT* dilakukan kembali, kemudian hasilnya dibandingkan dengan waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut yang diperoleh dengan metode aljabar *max-plus* menggunakan durasi normal dan durasi rata-rata dari tiap-tiap kegiatan. Diperoleh bahwa untuk proyek tersebut, metode aljabar max-plus menggunakan durasi normal menghasilkan waktu tercepat penyelesaian proyek yang sama dengan waktu tercepat penyelesaian proyek yang diperoleh dari *CPM*, sedangkan metode aljabar *max-plus* menggunakan durasi rata-rata menghasilkan ekspektasi waktu tercepat penyelesaian proyek yang sama dengan ekspektasi waktu tercepat penyelesaian proyek yang diperoleh dari *PERT*.

Kata-kata kunci: *critical path method*; *program evaluation and review technique*; aljabar max-plus; waktu tercepat penyelesaian proyek.

ABSTRACT

Consider a project consisting of several activities which are related to each other, in the sense that some activities are prerequisites for some other activities. Suppose the duration of each of these activities is known. Based on these durations, determine the shortest time to complete the project. To solve this problem, methods that are often used are *CPM* (*critical path method*) and *PERT* (*program evaluation and review technique*). However, both methods require the construction of graphs, and so are not easy to program using computers. In this final project, we discuss an alternative method to determine the fastest project completion time without constructing a graph, namely, the max-plus algebra method. We discuss the steps involved in this method, along with a simple illustrative example. Subsequently, we apply the method to the project taken from paper in the literature, namely, a new product development project. In the papers, the fastest time to complete the project has been determined using the *CPM* and *PERT* only. In this final project, the calculation of the fastest time to complete the project using *CPM* and *PERT* is repeated, then the results are compared with the fastest time to complete the project obtained by the *max-plus* algebra method using normal duration and the average duration of each activity. It is found that for the project, the max-plus algebra method using normal duration produces the fastest project completion time which is the same as the fastest project completion time obtained from *CPM*, while the *max-plus* algebra method uses the average duration, average results in the expected fastest time for project completion which is the same as the expected fastest time for project completion obtained from *PERT*.

Keywords: critical path method; program evaluation and review technique; max-plus algebra; project completion time.

Wisuda adalah impian setiap mahasiswa. Namun kita perlu berjuang semester demi semester untuk mewujudkannya. Jangan pernah mengeluh.



KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat karunia-Nya, penulis mampu menyelesaikan tugas akhir skripsi dengan judul “Penggunaan Aljabar *Max-Plus* Untuk Menentukan Waktu Tercepat Penyelesaian Proyek dan Perbandingannya dengan *CPM* dan *PERT*” sebagai syarat untuk mendapatkan gelar sarjana pada Program Studi Matematika ini dengan baik dan tepat waktu. Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin dapat selesai baik tanpa adanya dukungan, bimbingan, dan bantuan doa dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Kedua orang tua penulis, Johan dan Liang Siang yang selalu memberi dukungan, semangat, dan doa dalam proses penyelesaian skripsi ini.
2. Adik penulis, Anggie Aureria Terens yang selalu memberi dukungan dan semangat dalam menjalankan proses perkuliahan sampai proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. selaku dosen pembimbing yang selalu bersedia meluangkan waktu, tenaga, pikiran, dan memberikan masukan dengan sabar dalam mendampingi serta memberikan arahan dalam penyusunan skripsi.
4. Ibu Dr. Erwinna Chendra dan Bapak Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math. selaku dosen penguji yang telah memberikan ilmu, kritik, dan saran yang menjadikan skripsi ini menjadi lebih baik lagi, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf Tata Usaha FTIS yang telah memberikan ilmu, waktu, dan bantuan kepada penulis selama perkuliahan.
6. Sahabat-sahabat penulis, Fiona, Syawqi, Gaby yang telah memberikan dukungan, bantuan, dan hiburan selama perkuliahan serta menemani penulis dalam proses penyusunan skripsi ini.
7. Rey, Victon, Lius, Kambuy, Iyo, Mario, Dalay, Andre, Richard, Reyner, dan Supen yang telah menemani penulis dan menghibur penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
8. Anjul, Ricky, Patrick, dan Yesu yang menemani, menghibur, dan membantu penulis selama perkuliahan dan proses penyelesaian skripsi ini.
9. Felix, Nehem, dan Satrio yang selalu memberikan informasi-informasi dan membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Lidya, Cindy, dan Mina yang menghibur dan menemani penulis, serta memberikan dukungan selama proses perkuliahan.
11. Kakak-kakak dan teman-teman Matematika angkatan 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, dan 2021 terima kasih atas kebersamaan, bantuan, dan pengalaman yang telah diberikan selama perkuliahan.
12. Semua pihak yang telah memberikan bantuan kepada penulis selama perkuliahan dan proses penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dan kesalahan dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis berharap adanya saran dan kritik yang membantu skripsi ini untuk menjadi lebih baik lagi.

Bandung, 17 Juli 2023

Penulis



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	2
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Graf Berarah	4
2.2 Model Jaringan	5
2.3 Aljabar <i>max-plus</i>	9
2.3.1 Definisi	10
2.3.2 Sifat-sifat Aljabar <i>max-plus</i>	10
2.3.3 Aljabar <i>max-plus</i> pada Matriks	11
3 MODEL ALJABAR <i>max-plus</i> PADA JARINGAN	13
3.1 Penerapan Aljabar <i>max-plus</i> pada Masalah Jaringan	13
3.2 Contoh Kasus	14
4 PENGGUNAAN ALJABAR <i>max-plus</i> PADA PROYEK <i>New Product Development</i>	21
4.1 Proyek <i>New Product Development</i>	21
4.1.1 <i>CPM</i>	22
4.1.2 <i>PERT</i>	23
4.1.3 Aljabar <i>max-plus</i>	24
5 KESIMPULAN DAN SARAN	36
5.1 Kesimpulan	36
5.2 Saran	36
DAFTAR REFERENSI	37

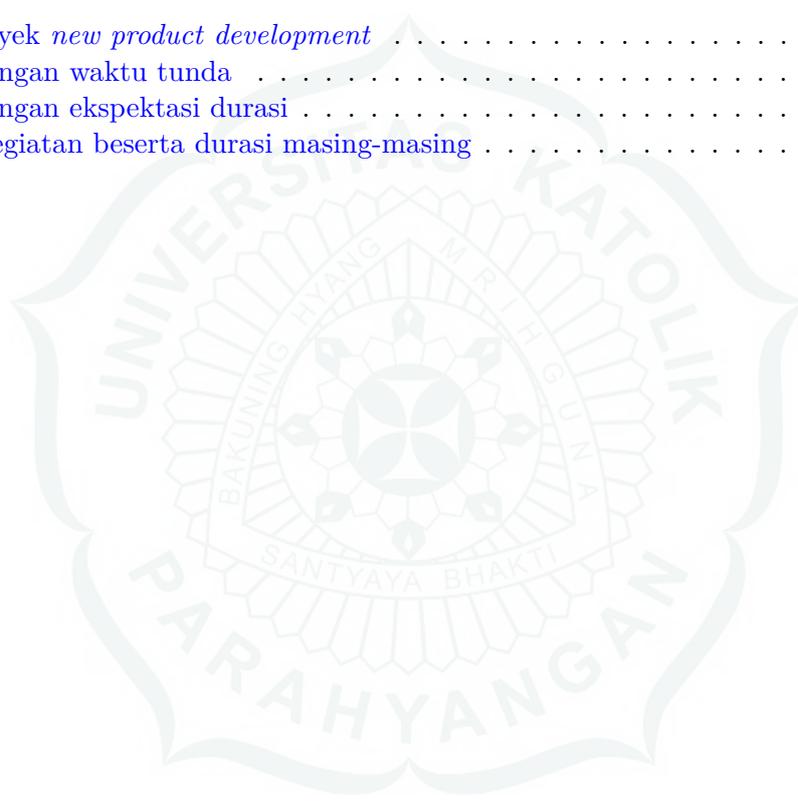
DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh-contoh graf	5
2.2	Graf berarah yang menunjukkan hubungan keprasyaratan kegiatan-kegiatan dalam Tabel 2.1	6
2.3	Graf pada Gambar 2.2 yang dilengkapi ES dan EF	7
2.4	Graf pada Gambar 2.3 yang dilengkapi LS dan LF	7
4.1	Graf yang terbentuk dari Tabel 4.1	22



DAFTAR TABEL

2.1	Daftar kegiatan beserta durasinya masing-masing	5
2.2	Penghitungan waktu tunda	8
2.3	Penghitungan ekspektasi durasi	9
3.1	Daftar kegiatan beserta durasinya dan ekspektasi masing-masing	14
4.1	Data proyek <i>new product development</i>	21
4.2	Penghitungan waktu tunda	22
4.3	Penghitungan ekspektasi durasi	23
4.4	Daftar kegiatan beserta durasi masing-masing	24



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penjadwalan proyek adalah suatu proses penting yang dapat menentukan apakah pengerjaan proyek berhasil atau tidak [1]. Penjadwalan proyek melibatkan pengalokasian waktu untuk tiap-tiap kegiatan yang ada dalam proyek tersebut. Dengan penjadwalan yang baik, diharapkan pengerjaan proyek dapat memenuhi tenggat waktu dan meminimalkan risiko penundaan, sehingga menghindari dampak negatif seperti terbuangnya waktu dan perlunya biaya tambahan. Pada penjadwalan suatu proyek, ditentukan waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut dengan memerhatikan kegiatan-kegiatan kritis (yaitu kegiatan-kegiatan yang tidak dapat ditunda) agar tidak terjadi keterlambatan dalam penyelesaian proyek tersebut.

Waktu tercepat penyelesaian proyek tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan metode-metode seperti *CPM* (*critical path method*) dan *PERT* (*program evaluation and review technique*) [2]. Pada proses penghitungan *CPM* dan *PERT*, perlu dibuat sebuah graf berarah yang menggambarkan alur dari pengerjaan proyek tersebut. Dari graf berarah tersebut, selanjutnya ditentukan sebuah lintasan yang disebut lintasan kritis yang memuat kegiatan-kegiatan kritis, yaitu kegiatan-kegiatan yang tidak dapat ditunda tanpa menyebabkan keterlambatan dalam penyelesaian proyek tersebut.

Baik *CPM* maupun *PERT* memerlukan pembuatan graf berarah dalam proses penghitungannya. Pada skripsi ini dibahas suatu metode alternatif yang dapat digunakan untuk menentukan waktu tercepat penyelesaian suatu proyek tanpa harus membuat graf, yaitu metode aljabar *max-plus*. Pada metode ini, hanya akan digunakan dua operasi, yaitu operasi penjumlahan dan maksimum, dalam proses penghitungannya [3]. Dalam metode aljabar *max-plus*, dibentuk sebuah matriks yang nantinya dapat memberikan waktu penyelesaian proyek, lintasan kritis, dan waktu tunda maksimum dari tiap-tiap kegiatan. Karena metode ini tidak memerlukan pembuatan graf, dan hanya melibatkan operasi penjumlahan dan perkalian matriks aljabar *max-plus*, yang pada dasarnya hanya terdiri dari operasi-operasi penjumlahan dan maksimum saja.

Terdapat penelitian yang sudah membahas waktu tercepat dalam penyelesaian suatu proyek, seperti penelitian [4] mengenai *new product development*. Dalam penelitian tersebut, telah dilakukan penghitungan waktu tercepat penyelesaian proyek dengan *CPM* dan *PERT*. Karena penelitian tersebut menggunakan *CPM* dan *PERT*, maka penelitian tersebut melibatkan pembuatan graf. Pada skripsi ini, metode aljabar *max-plus* akan diaplikasikan pada proyek tersebut. Dengan melalui proses penghitungan matriks, diperlihatkan bahwa hasil yang didapat dalam skripsi ini dengan metode aljabar *max-plus* menggunakan durasi-durasi normal dari tiap-tiap kegiatan akan sama dengan hasil yang sudah diperoleh dalam penelitian-penelitian sebelumnya dengan *CPM*, dan

hasil yang didapat dengan metode aljabar *max-plus* menggunakan durasi rata-rata dari tiap-tiap kegiatan akan sama dengan hasil yang sudah diperoleh dalam penelitian-penelitian sebelumnya dengan *PERT*, pada proyek tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dirumuskan beberapa masalah yang akan dijawab dalam skripsi ini.

1. Bagaimana perbandingan hasil penghitungan waktu tercepat penyelesaian proyek *new product development* dengan metode aljabar *max-plus* dengan *CPM* dan *PERT*?
2. Apa perbedaan metode aljabar *max-plus* dalam mencari waktu penyelesaian proyek bila dibandingkan dengan *CPM* dan *PERT*?

1.3 Tujuan

Tujuan pembuatan makalah seminar ini adalah

1. menentukan waktu tercepat penyelesaian proyek *new product development* dengan metode aljabar *max-plus*, serta membandingkan hasilnya dengan waktu tercepat penyelesaian proyek yang diperoleh dengan *CPM* dan *PERT*;
2. menentukan perbedaan metode aljabar *max-plus* dalam menentukan waktu tercepat penyelesaian proyek bila dibandingkan dengan *CPM* dan *PERT*.

1.4 *State of the Art*

Dalam skripsi ini, yang dimaksud dengan suatu proyek adalah suatu rangkaian kegiatan-kegiatan yang saling berhubungan dan harus dilakukan dalam urutan tertentu. Hubungan antarkegiatan yang dipertimbangkan adalah hubungan keprasyaratan, yang artinya suatu kegiatan tidak dapat dimulai jika suatu kegiatan lain belum terselesaikan. Pada umumnya, dalam menganalisis suatu proyek digunakan beberapa metode, seperti *CPM* dan *PERT*. Namun, dalam skripsi ini, dibahas sebuah metode alternatif, yaitu metode aljabar *max-plus*. Aljabar *max-plus* merupakan sebuah sistem matematis yang pada dasarnya diperoleh dengan cara mengganti operasi penjumlahan dan perkalian di himpunan bilangan real yang biasa kita kenal, masing-masing menjadi operasi maksimum dan operasi penjumlahan. Permasalahan mengenai jaringan proyek dapat dimodelkan dengan baik dengan menggunakan aljabar *max-plus* [5, 6, 7]. Metode aljabar *max-plus* telah diaplikasikan pada permasalahan sistem produksi [8], sistem jaringan kontrol *traffic light* [9], sistem jaringan antrean [10], sistem jaringan kereta [11], dan sebagainya.

Untuk skripsi ini, penulis berfokus pada penelitian-penelitian yang sudah dilakukan pada makalah [4]. Penelitian tersebut menggunakan *CPM* dan *PERT* untuk menentukan waktu tercepat penyelesaian proyek *new product development*. Proses penghitungan dengan *CPM* dan *PERT* pada penelitian tersebut ditentukan dengan membuat graf berarah, kemudian menentukan nilai-nilai *ES*

(*earliest start*), *EF* (*earliest finish*), *LS* (*latest start*), dan *LF* (*latest finish*) dari tiap-tiap kegiatan yang ada, lintasan kritis, dan waktu tunda maksimum dari kegiatan-kegiatan pada proyek tersebut.

Pada skripsi ini, penulis pertama-tama membahas teori mengenai graf berarah (subbab 2.1) dan model jaringan termasuk *CPM* dan *PERT*, sebagai dua metode standar untuk menentukan waktu tercepat penyelesaian suatu proyek (subbab 2.2). Kemudian, penulis mempelajari aljabar *max-plus*, meliputi definisinya, sifat-sifatnya, dan aljabar matriks dengan entri-entri anggota aljabar *max-plus* (subbab 2.3). Dalam Bab 3, penulis membahas cara menentukan waktu tercepat penyelesaian suatu proyek dengan metode aljabar *max-plus*, sebagai alternatif dari *CPM* dan *PERT* (subbab 3.1), beserta suatu contoh kasus sederhana (subbab 3.2). Dalam Bab 4, penulis mengaplikasikan metode aljabar *max-plus* tersebut pada proyek yang sudah disebutkan sebelumnya, kemudian membandingkan hasilnya. Pada proyek tersebut, dibuat matriks dengan entri-entri anggota aljabar *max-plus* yang merepresentasikan proyek tersebut, lalu ditentukan waktu tercepat penyelesaian proyeknya dan ekspektasi waktu tercepat penyelesaian proyek. Kemudian, ditentukan juga vektor rute terjauh yang memberikan informasi mengenai kegiatan-kegiatan kritis dari proyek tersebut dan didapat juga vektor *slack* yang entri-entrinya merupakan waktu tunda maksimum dari tiap-tiap kegiatan agar seluruh pengerjaan proyek tidak mengalami keterlambatan. Metode aljabar *max-plus* yang digunakan pada penelitian ini memiliki perbedaan dengan *CPM* dan *PERT*, yaitu tidak memerlukan pembuatan graf dalam proses penghitungannya.

1.5 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari lima bab berikut.

Bab 1: Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, *state of the art*, dan sistematika pembahasan.

Bab 2: Landasan teori

Bab ini membahas teori yang dipakai yaitu graf berarah, model jaringan termasuk *CPM* dan *PERT*, serta aljabar *max-plus*.

Bab 3: Model aljabar *max-plus* pada jaringan

Bab ini membahas langkah-langkah menentukan waktu tercepat penyelesaian suatu proyek dengan metode aljabar *max-plus*, beserta suatu contoh kasus.

Bab 4: Penggunaan Aljabar *max-plus* Pada Proyek *New Product Development*

Bab ini membahas aplikasi metode aljabar *max-plus* pada suatu proyek yang berasal dari penelitian yang sudah dilakukan sebelumnya.

Bab 5: Kesimpulan dan saran

Bab ini berisi kesimpulan dan saran untuk mengembangkan skripsi ini.