

**SKRIPSI**

**ESTIMASI *SPOT RATE* MENGGUNAKAN MODEL GERAK  
BROWN GEOMETRI, MODEL VASICEK, MODEL  
COX-INGERSOLL-ROSS (CIR), DAN MODEL DERET WAKTU**



**MARIA BEATRICE JOICELIN SAPUTRA**

**NPM: 6161901004**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2023**

**FINAL PROJECT**

***SPOT RATE* ESTIMATION WITH GEOMETRY BROWNIAN  
MOTION MODEL, VASICEK MODEL,  
COX-INGERSOLL-ROSS (CIR) MODEL, AND TIME SERIES  
MODEL**



**MARIA BEATRICE JOICELIN SAPUTRA**

**NPM: 6161901004**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2023**

# LEMBAR PENGESAHAN

## ESTIMASI *SPOT RATE* MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRI, MODEL VASICEK, MODEL COX-INGERSOLL-ROSS (CIR), DAN MODEL DERET WAKTU

Maria Beatrice Joicelin Saputra

NPM: 6161901004

Bandung, 16 Agustus 2023

Menyetujui,

Pembimbing



Dr. Ferry Jaya Permana

Ketua Penguji



Liem Chin, M.Si.

Anggota Penguji



Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

## PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**ESTIMASI *SPOT RATE* MENGGUNAKAN MODEL GERAK BROWN GEOMETRI, MODEL VASICEK, MODEL COX-INGERSOLL-ROSS (CIR), DAN MODEL DERET WAKTU**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
16 Agustus 2023



Maria Beatrice Joicelin Saputra  
NPM: 6161901004

## ABSTRAK

Tingkat suku bunga menjadi suatu hal yang penting dalam dunia perekonomian, karena sering digunakan sebagai acuan dalam menentukan berbagai hal, misalnya, perusahaan asuransi dalam menentukan tingkat diskonto yang digunakan dalam menentukan cadangan premi. Maka dari itu, pergerakan tingkat suku bunga perlu dimodelkan dan diestimasi. Nilai tingkat suku bunga selalu berubah terhadap waktu secara stokastik, sehingga tingkat suku bunga akan dimodelkan dengan model-model stokastik. Di Indonesia, salah satu tingkat suku bunga yang dapat digunakan sebagai acuan adalah tingkat suku bunga yang diambil dari tingkat imbal hasil Surat Utang Negara (SUN) dengan berbagai waktu jatuh tempo (tenor). Pada skripsi ini, tingkat suku bunga dari tingkat imbal hasil SUN akan dimodelkan dengan menggunakan model stokastik, yaitu model gerak Brown Geometri (GBM), model Vasicek, dan model CIR (Cox-Ingersoll-Ross), dengan mengestimasi parameter model. Hasil estimasi parameter model akan digunakan untuk mengestimasi nilai tingkat suku bunga di masa yang akan datang. Selain itu, tingkat suku bunga juga akan dimodelkan dengan model deret waktu ARIMA. Hasil estimasi dengan model-model stokastik dan model deret waktu akan dibandingkan dan diperiksa tingkat keakuratannya dengan mencari nilai galat mutlak (*absolut error*) dan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE). Berdasarkan penelitian model yang paling akurat untuk mengestimasi tingkat suku bunga dengan *window* 24 bulan adalah model CIR dan tingkat suku bunga dengan *window* 60 bulan adalah model deret waktu. Jadi, model deret waktu akan cocok digunakan untuk memodelkan data historis dengan *window* yang cukup panjang, sedangkan model stokastik akan lebih cocok digunakan untuk memodelkan data historis dengan *window* yang pendek.

**Kata-kata kunci:** Gerak Brown Geometri; Model Vasicek; Model CIR; ARIMA; Tingkat Suku Bunga; *Spot Rate*.

## ABSTRACT

In the economic world, interest rates are important because they are often used as a reference in determining various things, for example, insurance companies determine the discount rate that used in determining the premium reserves. Therefore, the movement of interest rates needs to be modeled and estimated. The value of the interest rate always changes stochastically, so that the interest rate will be modeled using stochastic models. In Indonesia, one of the interest rates that can be used as a reference is the interest rate taken from the yield rate of Government Bonds (SUN) with various maturities (tenors). In this thesis, interest rates from yields on government securities will be modeled using stochastic models, namely the Geometric Brownian Motion (GBM) model, the Vasicek model, and the CIR (Cox-Ingersoll-Ross) model, by estimating the model parameters. The results of model parameter estimation will be used to estimate future interest rate values. In addition, the interest rate will also be modeled using the ARIMA time series model. The estimation results with stochastic models and time series models will be compared and checked for accuracy by finding the value of absolute error and the Root Mean Square Error (RMSE) value. Based on research, the most accurate model for estimating interest rates with a 24-month window is the CIR model and the interest rate with a 60-month window is a time series model. So, the time series model will be suitable for modeling historical data with a fairly long window, while the stochastic model will be more suitable for modeling historical data with a short window.

**Keywords:** Geometric Brownian Motion; Vasicek models; CIR models; ARIMA; Interest Rate; Spot Rate.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan bimbingan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Estimasi *Spot Rate* menggunakan Model Gerak Brown Geometri, Model Vasicek, Model Cox-Ingersoll-Ross (CIR), dan Model Deret Waktu” dengan baik dan lancar, sebagai pemenuhan syarat penyelesaian studi di Program Studi Matematika UNPAR. Penulis berharap bahwa skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca. Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari beberapa pihak yang selalu memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut, yaitu

1. Bapak Dr. Ferry Jaya Permana selaku dosen pembimbing yang telah membimbing, memberikan ilmu, kritik, dan saran selama membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Liem Chin, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dan pengembangan skripsi.
3. Bapak Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dan pengembangan skripsi.
4. Seluruh dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu, pelajaran, pengalaman, dan informasi selama penulis menjalani perkuliahan.
5. Seluruh staf TU FTIS yang telah memberikan bantuan bagi penulis dalam hal administrasi.
6. Orang tua penulis, Mama dan Papa, serta adik penulis, Dion, yang selalu memberikan dukungan, semangat, motivasi, dan doa selama proses penulis menjalani kuliah.
7. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2019, yang telah berdinamika bersama selama masa kuliah. Khususnya, Yolana Daniela, Leonardo Adrian, Kisha Atika, Evanda Argaretta, Putu Lila, Christian Jauhari, Yesuit Wongso, dan Enrico Elyah, yang selalu berjuang bersama selama masa kuliah.
8. Teman-teman KEKL Bandung, Kirana, Catherine, Dionne, Ave, dan Rian yang selalu menemani dan memberikan semangat kepada penulis selama menjalani proses perkuliahan di Bandung.
9. Teman-teman *St. Peter Choir* dan *Vox de Caelo*, Renata, Ci Devia, Danang, Yohan, Om Ferry, dan Tante Susi, yang selalu mendukung dan mendoakan penulis selama proses skripsi.
10. Seluruh pihak lain, yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang senantiasa mendukung penulis.

Bandung, 16 Agustus 2023

Penulis

# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xii</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 <i>State of the Art</i> . . . . .	2
1.5 Sistematika Pembahasan . . . . .	3
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>4</b>
2.1 Tingkat Suku Bunga . . . . .	4
2.2 Distribusi Normal . . . . .	5
2.3 Proses Wiener, Proses Ito, dan Lemma Ito . . . . .	6
2.4 Gerak Brown Geometri (GBM) . . . . .	7
2.5 Model Vasicek . . . . .	8
2.6 Model Cox-Ingersoll-Ross . . . . .	11
2.7 <i>Conditional Least Squares Estimation</i> (CLSE) . . . . .	14
2.8 <i>Root Mean Square Error</i> (RMSE) . . . . .	14
2.9 Deret Waktu . . . . .	14
2.10 Stasioneritas dan Non-stasioneritas . . . . .	15
2.11 Model ARIMA . . . . .	16
2.12 Uji Kestasioneran . . . . .	17
2.13 Diagnosa Model . . . . .	18
<b>3 ESTIMASI TINGKAT SUKU BUNGA</b>	<b>19</b>
3.1 Estimasi Parameter Gerak Brown Geometri . . . . .	19
3.2 Estimasi Parameter Model Vasicek . . . . .	20
3.3 Estimasi Parameter Model CIR . . . . .	25
3.4 Estimasi Tingkat Suku Bunga menggunakan Model Stokastik . . . . .	29
3.5 Estimasi Tingkat Suku Bunga menggunakan Model ARIMA . . . . .	31
<b>4 HASIL DAN ANALISIS</b>	<b>33</b>
4.1 Data Penelitian . . . . .	33
4.2 Hasil dan Analisis Estimasi Tingkat Suku Bunga menggunakan Model Stokastik . . . . .	35
4.2.1 Estimasi menggunakan Model Vasicek . . . . .	35
4.2.2 Estimasi menggunakan Model CIR . . . . .	36
4.2.3 Estimasi menggunakan Model Gerak Brown Geometri . . . . .	37



4.2.4	Tingkat Keakuratan Hasil Estimasi Tingkat Suku Bunga menggunakan Model Stokastik . . . . .	38
4.2.5	Pengaruh Pemilihan Panjang Data ( <i>Window</i> ) . . . . .	39
4.3	Hasil dan Analisis Estimasi menggunakan Model ARIMA . . . . .	40
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>46</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	46
5.2	Saran . . . . .	46
	<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>48</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Bentuk <i>yield curve</i> . . . . .	4
2.2	Simulasi gerak Brown Geometri untuk berbagai nilai $\mu$ . . . . .	8
2.3	Simulasi gerak Brown Geometri untuk berbagai nilai $\sigma$ . . . . .	8
2.4	Simulasi model Vasicek untuk berbagai nilai $\kappa$ . . . . .	10
2.5	Simulasi model Vasicek untuk berbagai nilai $\theta$ . . . . .	11
2.6	Simulasi model Vasicek untuk berbagai nilai $\sigma$ . . . . .	11
2.7	Simulasi model CIR untuk berbagai nilai $\kappa$ . . . . .	13
2.8	Simulasi model CIR untuk berbagai nilai $\theta$ . . . . .	13
2.9	Simulasi model CIR untuk berbagai nilai $\sigma$ . . . . .	13
2.10	Grafik data dengan pola musiman . . . . .	15
4.1	Plot data bulanan imbal hasil obligasi Indonesia tenor 1 dan 5 tahun . . . . .	33
4.2	Plot data bulanan imbal hasil obligasi Indonesia tenor 10 dan 30 tahun . . . . .	34
4.3	Kurva imbal hasil obligasi Indonesia Oktober 2019 . . . . .	34
4.4	Estimasi $\hat{\kappa}$ Model Vasicek . . . . .	35
4.5	Estimasi $\hat{\theta}$ Model Vasicek . . . . .	35
4.6	Estimasi $\hat{\sigma}$ Model Vasicek . . . . .	35
4.7	Perbandingan <i>spot rate</i> aktual dan estimasi berdasarkan model Vasicek . . . . .	36
4.8	Estimasi $\hat{\kappa}$ Model CIR . . . . .	36
4.9	Estimasi $\hat{\theta}$ Model CIR . . . . .	36
4.10	Estimasi $\hat{\sigma}$ Model CIR . . . . .	36
4.11	Perbandingan <i>spot rate</i> aktual dan estimasi berdasarkan model CIR . . . . .	37
4.12	Estimasi $\hat{\mu}$ Model GBM . . . . .	37
4.13	Estimasi $\hat{\sigma}$ Model GBM . . . . .	37
4.14	Perbandingan <i>spot rate</i> aktual dan estimasi berdasarkan model GBM . . . . .	38
4.15	Uji ADF data imbal hasil tenor 1 tahun . . . . .	40
4.16	Plot ACF tenor 1 tahun . . . . .	40
4.17	Uji ADF data imbal hasil tenor 1 tahun setelah <i>differencing</i> . . . . .	40
4.18	Plot ACF setelah proses <i>differencing</i> . . . . .	41
4.19	Plot data imbal hasil tenor 1 tahun setelah <i>differencing</i> . . . . .	41
4.20	EACF data imbal hasil tenor 1 tahun . . . . .	41
4.21	QQ plot residual . . . . .	42
4.22	Histogram residual . . . . .	42
4.23	Uji <i>Shapiro-Wilk</i> . . . . .	43
4.24	Uji <i>Ljung Box</i> . . . . .	43
4.25	Hasil estimasi dengan model ARIMA . . . . .	43

## DAFTAR TABEL

4.1	Statistik deskriptif nilai <i>absolut error</i> dari nilai estimasi . . . . .	38
4.2	RMSE dari Model Stokastik . . . . .	39
4.3	Nilai <i>absolut error</i> untuk beberapa <i>window</i> . . . . .	39
4.4	RMSE hasil estimasi model untuk beberapa <i>window</i> . . . . .	39
4.5	AIC dan BIC . . . . .	42
4.6	Hasil estimasi model ARIMA . . . . .	44
4.7	Statistik deskriptif nilai <i>absolut error</i> dari nilai estimasi . . . . .	44
4.8	Perbandingan nilai <i>absolut error</i> dari hasil estimasi dengan <i>window</i> 60 bulan . . . . .	44

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Informasi dan asumsi tingkat suku bunga merupakan suatu hal penting dalam dunia perekonomian. Sebagai contoh, perusahaan asuransi memerlukan asumsi tingkat suku bunga untuk menentukan tingkat diskonto yang digunakan dalam menentukan premi. Perusahaan asuransi harus mengestimasi tingkat suku bunga di masa yang akan datang agar dapat menentukan besar cadangan premi yang sesuai dengan keadaan pasar, sehingga mengurangi kemungkinan kerugian yang didapat. Maka dari itu, pergerakan tingkat suku bunga perlu dimodelkan dan diestimasi. Nilai tingkat suku bunga selalu berubah terhadap waktu secara stokastik, sehingga tingkat suku bunga biasanya dimodelkan dengan model-model stokastik.

Di Indonesia, tingkat suku bunga yang sering digunakan sebagai acuan adalah BI-7 *Day Reverse Repo Rate* (BI7DRR) yang ditetapkan oleh Bank Indonesia. Namun, jika diperhatikan data historis BI7DRR dari tanggal 18 Februari 2021 sampai 21 Juli 2022 tidak mengalami perubahan nilai atau konstan, begitu pula data dari tanggal 19 Januari 2023 sampai 22 Juni 2023 <sup>1</sup>. Berbeda dengan BI7DRR, tingkat imbal hasil dari Surat Utang Negara (SUN) selalu berubah setiap hari, sehingga banyak perusahaan di Indonesia menggunakan tingkat imbal hasil dari SUN sebagai tingkat suku bunga acuan. Sebagai contoh, Otoritas Jasa Keuangan (OJK) menetapkan pada surat edaran tentang pedoman pembentukan cadangan teknis bagi Perusahaan Asuransi dan Perusahaan Reasuransi, bahwa asumsi tingkat diskonto yang digunakan dalam menentukan cadangan premi harus mengikuti tingkat imbal hasil (*yield*) dari SUN <sup>2</sup>.

Tingkat imbal hasil SUN diterbitkan harian oleh Lembaga Penilai Harga Efek Indonesia (PHEI). Nilai tingkat imbal hasil dari SUN berubah secara dinamis setiap hari dan nilainya berbeda untuk jangka waktu jatuh tempo (*tenor*) yang berbeda. Nilai tingkat imbal hasil dari SUN untuk berbagai *tenor* akan membentuk suatu kurva, yang sering disebut sebagai kurva imbal hasil (*yield curve*).

Pemodelan tingkat suku bunga sudah menjadi perhatian sejak tahun 1973 [1]. Rendleman dan Bartter memperkenalkan model tingkat suku bunga yang mengikuti Gerak Brown Geometri (GBM) [2]. Kelebihan dari model GBM adalah penaksiran parameteranya yang relatif mudah dilakukan. Namun, tingkat suku bunga memiliki sifat bahwa nilainya akan selalu bergerak kembali ke nilai rata-rata jangka panjangnya (*mean reversion*), sementara model GBM mengasumsikan bahwa tingkat suku bunga berubah secara eksponensial, sehingga model GBM tidak memiliki sifat *mean*

---

<sup>1</sup>BI 7-day (Reverse) Repo Rate. Sumber: <https://www.bi.go.id/id/statistik/indikator/bi-7day-rr.aspx>

<sup>2</sup>Surat Edaran OJK 05/2016. Sumber: <https://www.ojk.go.id/id/regulasi/otoritas-jasa-keuangan/rancangan-regulasi/Documents/SE>

*reversion*. Beberapa contoh model yang memiliki sifat *mean reversion* dan sering digunakan untuk memodelkan tingkat suku bunga adalah model Vasicek dan model Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Model GBM, Vasicek, dan CIR sering digunakan untuk penilaian instrumen keuangan, seperti penilaian opsi, seperti pada [2], [3], dan [4]. Pada skripsi ini, pergerakan tingkat suku bunga akan dimodelkan pula dengan menggunakan model deret waktu karena diketahui bahwa data tingkat suku bunga merupakan data deret waktu, sehingga model deret waktu diasumsikan akan cocok digunakan untuk memodelkan tingkat suku bunga.

Hasil estimasi dengan model-model stokastik dan model deret waktu akan dibandingkan dan diperiksa tingkat keakuratannya dengan mencari nilai galat mutlak (*absolut error*) dan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE). Model dengan tingkat keakuratan yang tinggi akan menjadi model yang paling cocok digunakan untuk memodelkan dan mengestimasi tingkat suku bunga. Simulasi pemodelan dan pengestimasi akan dilakukan untuk data historis tingkat suku bunga yang diambil dari tingkat imbal hasil Obligasi Pemerintah Indonesia dengan tenor 1 tahun.

## 1.2 Rumusan Masalah

Masalah-masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah

1. Bagaimana cara mengestimasi parameter model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR?
2. Bagaimana cara mengestimasi tingkat suku bunga dengan menggunakan model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR, dan model ARIMA?
3. Bagaimana perbandingan kinerja model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR, dan model ARIMA yang paling cocok untuk memodelkan dan mengestimasi tingkat suku bunga?

## 1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Mengestimasi parameter model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR dari data historis imbal hasil Obligasi Indonesia.
2. Mengestimasi tingkat suku bunga dengan menggunakan model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR, dan model deret waktu.
3. Membandingkan kinerja model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR, dan model deret waktu yang paling cocok untuk memodelkan dan mengestimasi tingkat suku bunga.

## 1.4 *State of the Art*

Pada penelitian sebelumnya, telah dilakukan analisis tingkat suku bunga dengan menggunakan model Vasicek dan model CIR untuk data *zero-coupon bond* Kanada oleh Serkan Zeytun dan Ankit Gupta pada penelitiannya yang berjudul “*A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model*”

of the Short Rate”[5]. Selain itu, penelitian dengan judul “*Analisis Tingkat Suku Bunga Acuan Bank Indonesia dengan Model Vasicek dan Model CIR*”, oleh Sebastian Trasakti Kristanto, 2021, dan “*Pemodelan Stokastik Waktu Diskret dan Kontinu untuk Kasus BI 7-Day Repo Rate*”, oleh Giovanni Valendhito Putrandaru, menceritakan tentang analisis tingkat suku bunga dengan menggunakan model Vasicek, CIR, dan GBM pada data BI7DRR.

Pada skripsi ini akan digunakan data historis *spot rate* yang berasal dari tingkat imbal hasil Surat Utang Negara karena data memiliki pergerakan yang lebih fluktuatif dibandingkan dengan data BI7DRR. Data akan dimodelkan dengan menggunakan model GBM, model Vasicek, dan model CIR, yang merupakan model stokastik, serta akan dilihat pula estimasi dengan menggunakan model deret waktu, yaitu model ARIMA. Jika pada penelitian sebelumnya hasil estimasi tingkat suku bunga hanya dibandingkan antara model Vasicek dan model CIR saja, seperti pada [5], tanpa melihat pengaruh perubahan panjang *window*, skripsi ini akan membandingkan hasil estimasi tingkat suku bunga dengan model GBM, model Vasicek, model CIR, dan model ARIMA dan kemudian akan dilakukan pula analisis pengaruh perubahan panjang *window*.

## 1.5 Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

Pada Bab 1 akan dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, *state of the art*, dan sistematika pembahasan.

Pembahasan pada Bab 2 akan meliputi landasan teori yang akan mendasari pemodelan *spot rate*.

Bab 3 akan membahas mengenai estimasi parameter model dan langkah-langkah mengestimasi *spot rate* dengan model gerak Brown Geometri, model Vasicek, model CIR, dan model ARIMA.

Pada Bab 4 akan dibahas mengenai hasil dan analisis estimasi *spot rate*.

Isi dari Bab 5 terdiri dari kesimpulan dan saran dari hasil dan analisis estimasi *spot rate*.