

**SKRIPSI**

**METODE ELEMEN HINGGA UNTUK PERSAMAAN PANAS  
PADA KONDISI TETAP**



**Daniel Ronaldo Saragih**

**NPM: 2016710049**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2023**

**FINAL PROJECT**

**FINITE ELEMENT METHOD FOR HEAT EQUATION IN  
STEADY STATE**



**Daniel Ronaldo Saragih**

**NPM: 2016710049**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2023**

**LEMBAR PENGESAHAN**

**METODE ELEMEN HINGGA UNTUK PERSAMAAN PANAS  
PADA KONDISI TETAP**

**Daniel Ronaldo Saragih**

**NPM: 2016710049**

**Bandung, 07 Februari 2023**

**Menyetujui,**

**Pembimbing 1**



**Prof. Marcus Wono Setya Budhi,  
Ph.D**

**Pembimbing 2**



**Dr. Andreas Parama Wijaya**

**Ketua Tim Penguji**



**Dr. Livia Owen**

**Anggota Tim Penguji**



**Dr. Daniel Salim**

**Mengetahui,**

**Ketua Program Studi**



**Dr. Livia Owen**



### **Komentar dan/atau Saran Dosen Penguji**

Silakan Bapak/Ibu dosen penguji memberikan komentar dan/atau saran di tabel yang tersedia.

Sebagai catatan, penomoran pada tabel otomatis bila diisi dengan Microsoft Word (tidak bisa otomatis di google doc, lihat:

<https://youtu.be/o0qgZOx08pI>)

Untuk komentar/saran yang ringan, seperti kesalahan ketik, Bapak/Ibu boleh memberi komentar langsung di file draft skripsi.

Catatan terkait tabel:

1. Kolom 'Komentar dan/atau saran' diisi oleh **dosen penguji**.
2. Kolom 'Tanggapan' diisi oleh **mahasiswa** dengan memberi tanda ✓ di entri yang sesuai (silakan copy-paste lambang tersebut). Bila dalam satu komentar/saran ada bagian yang diperbaiki dan tidak diperbaiki sekaligus, silakan beri tanda ✓ di keduanya.
3. Kolom 'Revisi/Keterangan' diisi oleh **mahasiswa**.
  - a. Apabila ada perbaikan, mahasiswa mencantumkan perbaikan yang telah dilakukan. Mahasiswa disarankan untuk juga menyertai halaman dan baris perbaikan dilakukan di file skripsi terbaru.
  - b. Apabila tidak ada perbaikan, mahasiswa wajib mencantumkan alasan kenapa tidak dilakukan perbaikan.
  - c. Apabila dalam satu komentar/saran ada yang diperbaiki dan ada yang tidak diperbaiki, maka lakukanlah poin 3a dan 3b sekaligus.

Apabila mahasiswa mendapat komentar/saran langsung di file draft skripsi, maka mahasiswa diharapkan untuk memberi *highlight* pada bagian yang telah diperbaiki di file skripsi terbaru. Hal ini untuk mempermudah dosen penguji memeriksa kembali perbaikan dari skripsi mahasiswa. Apabila hasil revisi telah disetujui oleh dosen penguji, mahasiswa boleh menghapus *highlight* tersebut.



**Jurusan Matematika**  
**Fakultas Teknologi Informasi dan Sains**  
**Universitas Katolik Parahyangan**

**Nama Dosen Penguji:** Dr. Livia Owen, S.Si., M.Si.

Apakah ada komentar/saran yang ditulis langsung di file draft skripsi? **ada**

No	Komentar dan/atau saran	Tanggapan		Revisi/Keterangan
		diperbaiki	tidak diperbaiki	
1.	<p>Komentar Presentasi :</p> <p>Lain kali persiapan harus lebih baik, susun kata-kata yang akan diucapkan, jangan tiba-tiba diam di tengah presentasi.</p> <p>Karena presentasi kamu masih dalam bentuk video, kamu bisa edit ketika kamu batuk atau lainnya. Makanya jangan mepet menyelesaikan segala sesuatu.</p> <p>Daftar isi tertulis kesimpulan dan saran 3x</p>			
2.	Tambahkan 2 kata kunci lainnya	✓		Kata kunci sudah ditambahkan yaitu keadaan tetap dan distribusi temperatur
3.	Seluruh tanda kurung gunakan \left( \right)	✓		Perbaikan sudah dilakukan untuk semua persamaan yang menggunakan tanda kurung



**Jurusan Matematika**  
**Fakultas Teknologi Informasi dan Sains**  
**Universitas Katolik Parahyangan**

No	Komentar dan/atau saran	Tanggapan		Revisi/Keterangan
		diperbaiki	tidak diperbaiki	
4.	Error diganti galat	✓		Perbaikan sudah dilakukan dibagian bab4 dimana kata error di ganti galat, total ada 5 kata error yang diubah menjadi galat
5.	Perhatikan penggunaan huruf kapital yang tepat	✓		Perbaikan sudah dilakukan terhadap seluruh huruf yang seharusnya menggunakan huruf kapital, contoh nya "Jenis-Jenis matriks" menjadi "jenis-jenis matriks". Perubahan juga dilakukan pada awal paragraf baru dimana paragraf sebelumnya diakhiri tanda titik(.)
6.	Perbaiki seluruh alinea yang tidak tepat. Alinea harus terdiri atas beberapa kalimat. Satu bab tau subbab harus terdiri atas beberapa alinea.	✓		Perbaikan sudah dilakukan terhadap seluruh alinea, dimana alinea yang terbentuk secara sengaja di tambah <code>\noindent</code> sehingga tidak menjadi alinea baru
7.	Gambar 2.1 perlu diperbaiki dan ditambahkan keterangan lebih detail	✓		Perbaikan sudah dilakukan dengan menghapus gambar karena dianggap tidak berkaitan dengan subbab delta dirac
8.	Jangan ada space kosong terlalu jauh, gunakan perintah <code>\vspace{-5mm}</code> atau perintah lainnya	✓		Perbaikan sudah dilakukan dengan menggunakan perintah <code>\vspace{-5mm}</code>



**Jurusan Matematika**  
**Fakultas Teknologi Informasi dan Sains**  
**Universitas Katolik Parahyangan**

No	Komentar dan/atau saran	Tanggapan		Revisi/Keterangan
		diperbaiki	tidak diperbaiki	
9.	Gunakan \noindent agar tidak terbentuk alinea baru	✓		Perbaikan dilakukan untuk semua alinea sebagai contoh hal 5 baris 16 dan seterusnya
10.	Periksa kembali referensi yang digunakan dan pakailah edisi terbaru	✓		Perbaikan sudah dilakukan dan untuk edisi buku terbaru yaitu buku boyce th.2021 edisi 12
11.	Sebutkan kontribusi kamu berupa Kode Program	✓		Kontribusi saya pada pembuatan program ialah dimana program saya modifikasi agar proses diskritisasi dimulai pada ujung kiri batang besi dan berakhir pada ujung kanan batang besi. Proses yang dilakukan mempunyai hasil dimana pada saat sumber panas masuk dapat dilakukan perhitungan distribusi panas yang lebih akurat pada ujung kiri. Kemudian program saya modifikasi agar dapat menampilkan perbandingan antara solusi numerik dan analitik yang dilakukan.
12.	Banyak sekali notasi, koefisien, variable yang belum didefinisikan dengan baik	✓		Perbaikan dilakukan dengan memperbaiki beberapa koefisien dan beberapa basis yang sudah diperbaiki



**Jurusan Matematika**  
**Fakultas Teknologi Informasi dan Sains**  
**Universitas Katolik Parahyangan**

No	Komentar dan/atau saran	Tanggapan		Revisi/Keterangan
		diperbaiki	tidak diperbaiki	
13.	Ubah semua kesimpulan & saran agar sesuai dengan apa yang kamu hasilkan	✓		Kesimpulan dan saran sudah diperbaiki berdasarkan analisis yang telah dilakukan



## PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

### **METODE ELEMEN HINGGA UNTUK PERSAMAAN PANAS PADA KONDISI TETAP**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
Tanggal 07 Februari 2023



do Saragih  
NPM: 2016710049

## ABSTRAK

Proses perpindahan panas merupakan suatu fenomena di mana suhu bergerak dari lokasi yang memiliki suhu tinggi ke lokasi yang bersuhu lebih rendah. Fenomena ini dapat dimodelkan dengan persamaan panas. Solusi dari persamaan ini dapat dicari secara analitik maupun numerik. Skripsi ini membahas model hasil distribusi panas pada kondisi tetap di suatu batang besi, yaitu saat panas tidak berubah terhadap waktu lagi. Kemudian, pendekatan numerik dengan metode elemen hingga akan digunakan untuk menyelesaikan model tersebut. Hal ini dilatar belakangi oleh tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik. Namun, skripsi ini berfokus pada penerapan metode numerik pada kasus yang sederhana. Penyelesaian numerik menggunakan perangkat lunak MATLAB. Hasil numerik akan dibandingkan dengan solusi analitik. Analisa numerik menghasilkan perbedaan antara solusi analitik dan numerik yang relatif kecil.

**Kata-kata kunci:** Metode Elemen Hingga, Persamaan Panas, Keadaan Tetap, Analisis Numerik, Distribusi Temperatur

## ABSTRACT

The process of heat transfer is a phenomenon in which temperature moves from a location with a high temperature to a location with a lower temperature. This phenomenon can be modeled by the heat equation. The solution of this equation can be found analytically or numerically. This thesis discusses the model resulting from heat distribution under constant conditions in an iron rod, that is, when heat does not change with time anymore. Then, a numerical approach using the finite element method will be used to solve the model. This is motivated by not all differential equations can be solved analytically. However, this thesis focuses on applying numerical methods to simple cases. Numerical solving using MATLAB software. Numerical results will be compared with analytical solutions. Numerical analysis results in relatively small differences between the analytical and numerical solutions with relatively small errors at each point compared.

**Keywords:** Finite Element Method, Heat Equation, Steady State, Numerical Analysis, Temperature Distribution

## KATA PENGANTAR

Penulis mengucapkan syukur kepada Tuhan Yang Maha Kuasa, kepada Bunda Maria, atas berkat dan karunia yang telah diberikan sepanjang hidup penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi berjudul METODE ELEMEN HINGGA UNTUK PERSAMAAN PANAS PADA KONDISI TETAP yang disusun sebagai syarat menjadi Sarjana Matematika di Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR). Penulis mengucapkan syukur dan berterima kasih sedalam-dalamnya untuk orang-orang yang telah mendukung, mendoakan serta memberi tuntunan dalam menyelesaikan skripsi ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih untuk :

1. Mama, Jojo, dan Bapak yang selalu mendukung penulis dalam meraih pendidikan yang baik dan layak. Doa-doa yang mengalir dan kata-kata penyemangat selalu menjadi pijakan kuat untuk penulis.
2. Bapak Dr. Ferry Jaya Permana, ASAI yang telah menjadi dosen wali selama masa perkuliahan, yang selalu sabar dalam mengingatkan dan membimbing penulis.
3. Bapak Prof. Marcus Wono Setya Budhi, Ph.D yang telah menjadi dosen pembimbing pertama bagi penulis, telah mau menerima kekurangan yang sangat kurang dan mau membentuk penulis menuju perubahan yang baik.
4. Dr. Andreas Parama Wijaya yang telah menjadi dosen pembimbing kedua bagi penulis, telah sabar menghadapi kelemotan dan ketidaksiplinan penulis, proses tersebut membentuk penulis menjadi pribadi yang akan ontime.
5. Ibu Dr. Livia Owen dan Bapak Dr. Daniel Salim sudah menjadi dosen penguji bagi penulis dan menjadikan ujian skripsi sebagai salah satu momen yang tidak akan pernah penulis karena itu sangat berkesan.
6. Seluruh bapak dan ibu dosen jurusan Matematika UNPAR dan FTIS, sudah menjadi dosen yang terbaik selama ini.
7. Mas Gugie, Mbak Mala, Mbak Ayu, Bapak Yusuf, dan Bapak Ahmad yang sudah menjadi teman baik dan tempat curhat ketika di BKA.
8. Yang terkasih dan tercinta Adinda Tri Nurhayati Susilo Putri yang sudah setia menemani dari awal hingga saat ini tidak pernah lelah dan selalu mengerti yang diperlukan. Skripsi ini menjadi kado untuk mu dan perjuangan kita.
9. Kak Karina Anggraeni, Kak Laura Adeline, Bang Shandy, Bang Dius, Kak Lisa dan teman-teman KTM, sangat bersyukur bisa mengenal dan dekat dengan kalian, terutama kepada kak Karin dan Laura, kalian yang terbaik.
10. Teman-teman angkatan 2016 yang sudah baik selama masa perkuliahan dan mau menemani bermain dan belajar bareng.
11. Teman-teman angkatan 2013-2018 dan beberapa teman angkatan 2020 dan 2021 yang sudah mau berbagi ilmu kepada penulis, yang mau untuk ditanya-tanyai tentang mata kuliah maupun materi lain
12. Vishal dan teman-teman, Kallita Diva, Elbert, Elfrand dan teman-teman yang belum disebutkan, penulis banyak mengucapkan terima kasih sebanyak-banyaknya untuk kalian semua.
13. Tim PKC UNPAR tempat penulis berlatih segala hal, kepada Bang Bear dan Bang Aldi, kepada pelatih yang terkasih.

Semoga doa dan kasih selalu menjadi hal baik dan skripsi ini menjadi bermanfaat bagi pembaca.

Bandung, **Februari** 2023



# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xix</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	1
1.3 Tujuan . . . . .	1
1.4 Sistematika Pembahasan . . . . .	2
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>3</b>
2.1 Persamaan diferensial orde-2 . . . . .	3
2.1.1 Persamaan diferensial linear orde-2 dengan koefisien konstan . . . . .	3
2.1.2 Persamaan diferensial linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan . . . . .	4
2.1.3 Persamaan diferensial linear nonhomogen orde-2 dengan koefisien konstan . . . . .	5
2.2 Fungsi delta Dirac . . . . .	5
2.3 Jenis-jenis matriks . . . . .	6
2.3.1 Matriks Diagonal . . . . .	6
2.3.2 Matriks Triangular . . . . .	6
2.3.3 Matriks Tridiagonal . . . . .	7
<b>3 PENERAPAN METODE ELEMEN HINGGA PADA PERSAMAAN PANAS DALAM KONDISI TETAP</b>	<b>9</b>
3.1 Persamaan panas pada kondisi tetap . . . . .	9
3.1.1 Kondisi batas Neumann dan Dirichlet . . . . .	10
3.1.2 Elemen interpolasi linear . . . . .	10
3.1.3 Fungsi interpolasi global . . . . .	11
3.2 Formula lemah . . . . .	11
3.3 Proyeksi Galerkin . . . . .	11
3.3.1 Diskritisasi elemen . . . . .	12
3.3.2 Proses diskritisasi . . . . .	13
3.3.3 Formulasi sistem aljabar linier . . . . .	14
3.3.4 Aliran panas di ujung Dirichlet . . . . .	15
3.4 Penggabungan Elemen Hingga . . . . .	16
3.4.1 Fungsi elemen interpolasi . . . . .	16
3.4.2 Penyatuan Elemen . . . . .	18
<b>4 ANALISIS HASIL NUMERIK</b>	<b>19</b>
4.1 Penyelesaian masalah numerik dalam persamaan panas dengan kondisi tetap . . . . .	19
4.2 Tingkat Akurasi . . . . .	20
4.3 Penyelesaian Analitik . . . . .	21

4.4 Perbandingan solusi numerik dan analitik . . . . .	21
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>23</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	23
5.2 Saran . . . . .	23
<b>REFERENCES</b>	<b>25</b>

## DAFTAR GAMBAR

3.1	Penempatan batang besi dengan panjang $L$ pada koordinat $x$ dengan titik-titik diskritisasi $x_i$ dengan $i = 0, 1, \dots, N_E$ dengan nilai $x_0 = 0$ dan $x_{N_E} = L$ . . . . .	10
3.2	Elemen-elemen pada domain $0 \leq x \leq L$ dengan fungsi interpolasi $\phi_i$ pada titik ke- $x_i$ . . . . .	10
3.3	Hasil diskritisasi elemen yang terjadi dari ujung kiri ke ujung kanan (a), diskritisasi elemen dengan jumlah elemen ganjil yang dimulai dari titik tengah (b), diskritisasi elemen dengan jumlah elemen genap yang dimulai dari titik tengah (c) . . . . .	13
4.1	Hasil 1 . . . . .	20
4.2	Hasil 2 . . . . .	20
4.3	Hasil perbandingan dari solusi numerik (titik 'o') dan analitik (garis biru) menghasilkan tingkat galat yang relatif kecil yaitu 0,0825 . . . . .	22



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Banyak fenomena alam dapat dinyatakan ke dalam suatu persamaan diferensial. Contohnya penyebaran panas pada suatu objek atau medium. Fenomena penyebaran panas cukup banyak terjadi dalam kehidupan sehari-hari, terlebih lagi zaman sekarang penggunaan alat elektronik yang masif. Sebagai contoh, komputasi aliran panas pada oven. Dengan mengetahui penyebaran panas pada kabinet oven, pengembang teknologi dapat mengetahui penyebaran panas yang optimal pada oven [1].

Suatu persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial parsial, terkadang tidak mudah dicari solusi analitiknya. Oleh karena itu, seringkali suatu metode numerik digunakan untuk mencari dan menganalisa solusi persamaan diferensial. Metode numerik yang umum digunakan adalah metode beda hingga. Metode ini cukup sederhana, namun kestabilan solusi bergantung dari parameter numerik yang digunakan [2]. Metode lainnya adalah metode elemen hingga. Metode ini sering digunakan pada permasalahan dengan domain yang tidak teratur. Prinsip dari metode ini adalah dengan membentuk formulasi lemah dari persamaan diferensial awal dan menghampiri solusi dengan kombinasi linear dari suatu fungsi basis. Biasanya, fungsi basis yang digunakan adalah fungsi linear bagian demi bagian. Dengan prinsip tersebut, permasalahan persamaan diferensial dapat diubah menjadi suatu persamaan matriks yang relevan. Hal ini tentu saja menyederhanakan permasalahan persamaan diferensial.

Skripsi ini membahas penerapan metode elemen hingga pada persamaan panas pada kondisi tetap yang merupakan suatu persamaan diferensial biasa. Solusi analitik dari persamaan tersebut juga dapat diperoleh dengan mudah sehingga perbandingannya dengan solusi numerik juga akan dibahas. Skripsi ini mendeskripsikan ulang pembahasan di referensi [3].

### 1.2 Rumusan Masalah

Skripsi ini akan membahas masalah-masalah yang ditulis sebagai berikut:

1. Bagaimana proses penurunan persamaan panas pada kondisi tetap?
2. Bagaimana pembentukan persamaan matriks yang ekuivalen dengan persamaan panas pada kondisi tetap dengan metode elemen hingga?
3. Bagaimana pemrograman dari metode elemen hingga pada persamaan panas?

### 1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan ini adalah penulis ingin menunjukkan proses pembentukan persamaan panas, dan cara penggunaan metode elemen hingga pada persamaan panas pada kondisi yang tetap.

## 1.4 Sistematika Pembahasan

Sistematika penulisan pada skripsi ini terdiri dari 5 Bab, yaitu:

Bab 1: Pendahuluan

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab 2: Landasan teori

Membahas teori dasar dari metode-metode penyelesaian persamaan diferensial, menyelesaikan matriks dan penjelasan tentang delta dirac.

Bab 3: Penerapan metode elemen hingga pada persamaan panas dalam kondisi tetap

Membahas tentang persamaan panas dan proses diskritisasi elemen, serta pendekatan dengan menggunakan proyeksi galerkin.

Bab 4: Analisis hasil numerik

Berisi penyelesaian secara numerik dan secara analitik dari persamaan panas, beserta perbandingan tingkat akurasi dari kedua analisis yang dilakukan.

Bab 5: Kesimpulan dan saran

Berisi kesimpulan dan saran dari penulis.