

SKRIPSI

SKEMA *NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE* (NSFD)
UNTUK SUATU MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN VAKSINASI DAN LAJU INSIDENSI TERSATURASI



ANTHONY JASON SUSILO

NPM: 6161801059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022

UNDERGRADUATE THESIS

**A NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE SCHEME (NSFD)
FOR AN SIR EPIDEMIC MODEL WITH VACCINATION AND
A SATURATED INCIDENCE RATE**



ANTHONY JASON SUSILO

NPM: 6161801059

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

**SKEMA *NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE* (NSFD)
UNTUK SUATU MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN VAKSINASI DAN LAJU INSIDENSI TERSATURASI**

ANTHONY JASON SUSILO

NPM: 6161801059

Bandung, 15 Juli 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1



Benny Yong, Ph.D.

Pembimbing 2



Jonathan Hoseana, Ph.D.

Ketua Tim Penguji



Iwan Sugiarto, M.Si.

Anggota Tim Penguji



Dr. Andreas Parama Wijaya

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

**SKEMA *NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE* (NSFD)
UNTUK SUATU MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN VAKSINASI DAN LAJU INSIDENSI TERSATURASI**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 15 Juli 2022



The image shows a handwritten signature in black ink over a rectangular revenue stamp. The stamp is yellow and features the Garuda Pancasila emblem, the text '10000', 'METERAI TEMPEL', and the alphanumeric code '52BC6AJX868675686'.

Anthony Jason Susilo
NPM: 6161801059

ABSTRAK

Penyebaran penyakit dapat dipelajari dengan pemodelan matematis, salah satunya menggunakan model epidemik tipe SIR, yang membagi populasi ke dalam tiga kelas, yaitu kelas rentan (*susceptible*), kelas terinfeksi (*infected*), dan kelas pulih (*recovered*), serta menggunakan tingkat pemulihan konstan dan laju insidensi bi-linear pada versi paling sederhananya. Karena laju insidensi bi-linear kurang realistis saat sub-populasi manusia terinfeksi makin membesar, maka digunakan laju insidensi tersaturasi. Model yang didapatkan berbentuk sistem persamaan diferensial non-linear, sehingga solusi analitiknya sulit diperoleh. Selain itu, metode-metode numerik pada umumnya belum tentu dapat mempertahankan perilaku dinamik dari model kontinunya. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, digunakan metode *Nonstandard Finite Difference Scheme* (NSFD) untuk mendiskretisasi model epidemik kontinu tipe SIR dengan laju insidensi tersaturasi tersebut. Akan diperlihatkan bahwa baik model kontinunya maupun versi diskretnya yang diperoleh dengan metode NSFD memiliki bilangan reproduksi dasar, titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik yang sama. Analisis kestabilan secara lokal dan global dari kedua jenis titik kesetimbangan tersebut dilakukan untuk kedua versi model tersebut. Analisis kestabilan lokal dari model diskret menggunakan kriteria Schur-Cohn, sedangkan analisis kestabilan global dari kedua jenis model menggunakan fungsi Lyapunov. Simulasi numerik menunjukkan bahwa versi diskret yang diperoleh dengan metode NSFD tersebut memiliki solusi dengan perilaku dinamik yang serupa dengan perilaku dinamik versi kontinunya, tanpa adanya gejala *chaos*. Analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar menunjukkan bahwa tindakan melambatkan penyebaran penyakit dengan cara menurunkan tingkat penyebaran penyakit maksimum adalah yang paling tepat untuk dilaksanakan; caranya antara lain dengan mengurangi kontak dan mobilitas.

Kata-kata kunci: model epidemik tipe SIR, metode NSFD, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, kriteria Schur-Cohn, fungsi Lyapunov, analisis sensitivitas

ABSTRACT

The spread of a disease can be studied by means of mathematical modeling, using, among others, an SIR-type epidemic model, which divides the population into three classes: the susceptible class, the infected class, and the recovered class, and employs a constant recovery rate and bi-linear incidence rate in its simplest version. Since a bi-linear incidence rate is unrealistic when the sub-population of infected humans gets larger, one may instead use a saturated incidence rate. The resulting model takes the form of a system of differential equations which is non-linear, so that its analytical solutions are difficult to obtain. In addition, numerical methods in general are not necessarily able to retain the dynamical behavior of the continuous model. To overcome this problem, one may use the Nonstandard Finite Difference Scheme (NSFD) method to discretize the aforementioned model. We will show that both the continuous and discrete models obtained by the NSFD method have the same basic reproduction number, disease-free equilibrium point, and endemic equilibrium point. We carry out modal local and global stability analysis of both types of equilibrium points, for both versions of the model. The local stability analysis of the discrete model uses the Schur-Cohn criterion. Meanwhile, the global stability analysis of both types of models uses Lyapunov functions. Numerical simulation shows that the discrete version obtained with by the NSFD method has solutions with dynamical behavior similar to that of the continuous version, without any indication of chaos. A sensitivity analysis of the basic reproduction number shows that the spread of disease is most appropriately suppressed by decreasing the maximum incidence rate, e.g., by reducing contacts and mobilities.

Keywords: SIR epidemic model, NSFD method, basic reproduction number, stability analysis, Schur-Cohn criteria, Lyapunov function, sensitivity analysis

Untuk Mama dan Andrew

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Tuhan Yesus Kristus atas rahmat, berkat, dan karunia yang diberikan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi berjudul “Skema *Nonstandard Finite Difference* (NSFD) untuk Suatu Model Epidemik SIR dengan Vaksinasi dan Laju Insidensi Tersaturasi” dengan baik dan tepat waktu. Penyusunan skripsi dilakukan sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi jenjang Strata-1 Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS), Universitas Katolik Parahyangan (UNPAR).

Selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi, penulis merasa sedih karena selama kurang lebih 2 tahun dilakukan secara *online* sehingga merasa sulit saat berkoordinasi dengan dosen serta bantuan dari teman-teman seperjuangan secara langsung. Namun, hal tersebut membuat penulis memiliki tanggung jawab yang tinggi. Selama menjadi mahasiswa UNPAR, penulis juga mendapatkan banyak ilmu dan bantuan dari berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih kepada

- Mama, Andrew, Ii Lili, Icong Ivan, Gavin, dan Licia yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan untuk penulis.
- Bapak Benny Yong, Ph.D selaku dosen pembimbing 1 dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D selaku dosen pembimbing 2 yang telah sabar dalam membimbing, memberikan ilmu, referensi, saran, dukungan, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan tepat waktu.
- Bapak Iwan Sugiarto, M.Si selaku dosen penguji 1 dan Bapak Dr. Andreas Parama Wijaya selaku dosen penguji 2 yang telah meluangkan waktu dalam memberikan saran dan komentar untuk pengembangan skripsi agar lebih baik.
- Bapak Dr. Daniel Salim selaku koordinator skripsi yang telah memberikan saran dan arahan sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
- Seluruh dosen FTIS, terutama dosen Program Studi Matematika yang sudah berkenan memberikan ilmu dan bimbingan kepada penulis selama proses perkuliahan di UNPAR.
- Vania, Orlin, Pepita, Novaldi, Rhandy, Kimberly, kak Jevan dan Celine sebagai teman yang meluangkan waktu memberikan bantuan dan saran kepada penulis. Serta kak Laura dan kak Felix sebagai alumni Matematika UNPAR yang telah meluangkan waktu untuk membantu penulis saat proses penyusunan skripsi.
- Semua teman dan pihak yang telah mendukung penulis baik selama perkuliahan maupun penyusunan skripsi yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi yang telah disusun ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis bersedia dan menerima kritik dan saran yang diberikan agar membangun dari pembaca. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah pengetahuan dan wawasan bagi mahasiswa maupun pembaca lainnya.

Bandung, Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan	2
1.4 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.2 Bilangan Reproduksi Dasar	6
2.3 Fungsi Lyapunov	7
2.4 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	7
2.5 Bifurkasi Pengganda Periode dan Transisi Menuju <i>Chaos</i>	7
3 ANALISIS MODEL EPIDEMIK KONTINU DAN MODEL NSFD	11
3.1 Diagram Kompartemen dan Pembentukan Model SIR	11
3.2 Total Populasi dan Ruang Fase	12
3.3 Titik Kesetimbangan	13
3.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit	14
3.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik	14
3.4 Bilangan Reproduksi Dasar	15
3.5 Analisis Kestabilan Model Kontinu	15
3.6 Model SIR dengan NSFD	17
3.6.1 Total Populasi dan Pembentukan Eksplisit Model NSFD	17
3.6.2 Titik Kesetimbangan	19
3.7 Analisis Kestabilan Model Diskret	20
3.7.1 Analisis Kestabilan Lokal Model Diskret	20
3.7.2 Analisis Kestabilan Global Model Diskret	22
4 SIMULASI NUMERIK MODEL DAN ANALISIS SENSITIVITAS	35
4.1 Simulasi Numerik	35
4.1.1 Grafik S dan I terhadap t untuk Model NSFD	35
4.1.2 Grafik S dan I terhadap t untuk Model-model Lainnya	37
4.1.3 Diagram Bifurkasi pada Bidang- hS dan Bidang- hI	38
4.1.4 Grafik S dan I terhadap t menggunakan Metode NSFD Lainnya	40
4.2 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	41
5 KESIMPULAN DAN SARAN	45

5.1 Kesimpulan	45
5.2 Saran	45
DAFTAR REFERENSI	47

DAFTAR GAMBAR

2.1	Sketsa Diagram Bifurkasi Model Verhulst Versi Diskret	8
3.1	Diagram Kompartemen dalam Pembentukan Model tipe SIR	12
4.1	Grafik S dan I terhadap t untuk Masing-masing Kasus	37
4.3	Diagram Bifurkasi Ruang (h, S, I)	39

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu masalah kesehatan yang menyangkut kehidupan banyak orang adalah penyakit menular. Jika manusia yang terkena penyakit menular masuk ke suatu sub-populasi manusia di suatu wilayah baru, maka penularan penyakit dapat terjadi sehingga mengakibatkan sub-populasi manusia di wilayah baru tersebut terinfeksi penyakit. Bahkan, mungkin juga terjadi penyebaran penyakit dari sub-populasi manusia yang terinfeksi penyakit ke sub-populasi manusia di wilayah yang berada di sekitarnya, sehingga memperbesar dampak penyakit tersebut. Penyebaran penyakit tersebut dinamakan *epidemi* [1].

Penyebaran penyakit tersebut dapat dipelajari dengan pemodelan matematis. Salah satu tipe model penyebaran penyakit yang sering digunakan adalah tipe SIR, yang membagi populasi manusia ke dalam tiga kelas, yaitu kelas rentan (*susceptible*), kelas terinfeksi (*infected*), dan kelas pulih (*recovered*). Pada versi paling sederhana dari model tipe SIR yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1967 [2, subbab 10.2], digunakan tingkat pemulihan konstan dan laju insidensi yang diasumsikan bi-linear, yaitu sebanding dengan hasil kali banyaknya individu manusia di kelas rentan dan infeksi. Namun, laju insidensi bi-linear ini kurang realistis saat sub-populasi manusia terinfeksi makin membesar, serta karena adanya faktor perubahan perilaku sosial dan faktor psikologis masyarakat. Sebagai pengganti laju insidensi bi-linear tersebut, dapat digunakan laju insidensi tersaturasi, yang bergantung pada tingkat penyebaran penyakit dan tingkat kesadaran manusia [3].

Model-model epidemik kontinu tipe SIR berbentuk sistem persamaan diferensial yang bersifat non-linear, sehingga solusi analitiknya sulit atau bahkan tidak mungkin diperoleh. Di lain pihak, beberapa metode numerik standar seperti metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode-metode lainnya berkemungkinan tidak dapat mempertahankan sifat-sifat dinamis dari model-model tersebut [4, 5]. Dalam skripsi ini, dipelajari suatu metode numerik non-standar yang dapat mengatasi kelemahan tersebut, yaitu metode *Nonstandard Finite Difference Scheme* (NSFD) [6], yang diterapkan pada sebuah model epidemik tipe SIR dengan vaksinasi dan laju insidensi tersaturasi.

Dari model yang dibahas juga akan dianalisis kestabilan dari titik-titik kesetimbangannya, baik secara lokal maupun global, dan hubungannya dengan nilai bilangan reproduksi dasar. Kestabilan lokal diperoleh dari nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian, sedangkan kestabilan global diperoleh dari fungsi Lyapunov. Analisis tersebut kemudian diterapkan juga pada versi diskretnya yang diperoleh dengan metode NSFD, untuk memperlihatkan bahwa versi diskret ini memiliki sifat-sifat dinamis yang sama dengan versi kontinunya yaitu model semula. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dan analisis sensitivitas.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut beberapa masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana cara mengonstruksi suatu model epidemik kontinu tipe SIR yang mempertimbangkan vaksinasi dan laju insidensi tersaturasi?

2. Bagaimana cara mendiskretisasi model tersebut menggunakan metode NSFD?
3. Bagaimana cara menentukan titik kesetimbangan dan kestabilannya, serta bilangan reproduksi dasar dari model tersebut dan versi diskretnya?
4. Bagaimana solusi numerik dari model tersebut yang diperoleh menggunakan metode NSFD bila dibandingkan dengan yang diperoleh menggunakan metode Euler?
5. Parameter-parameter apa yang paling berpengaruh pada nilai bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 dalam kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\mathcal{R}_0 < 1$?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penyusunan skripsi ini adalah

1. mengonstruksi suatu model epidemik kontinu tipe SIR yang mempertimbangkan vaksinasi dan laju insidensi tersaturasi;
2. mendiskretisasi model tersebut menggunakan metode NSFD;
3. menentukan titik kesetimbangan dan kestabilannya, serta bilangan reproduksi dasar dari model tersebut dan versi diskretnya;
4. menentukan solusi numerik dari model tersebut menggunakan metode NSFD dan membandingkannya dengan yang diperoleh menggunakan metode Euler;
5. menentukan parameter-parameter yang paling berpengaruh pada nilai bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 dalam kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\mathcal{R}_0 < 1$.

1.4 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari lima bab berikut.

- **BAB 1: PENDAHULUAN**
Pada bab ini dibahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika pembahasan.
- **BAB 2: LANDASAN TEORI**
Pada bab ini dibahas teori yang akan digunakan dalam bab-bab selanjutnya, antara lain persamaan diferensial, metode *Nonstandard Finite Difference Scheme* (NSFD), bilangan reproduksi dasar, fungsi Lyapunov, kriteria Schur-Cohn, kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan, dan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar.
- **BAB 3: ANALISIS MODEL EPIDEMIK KONTINU DAN MODEL NSFD**
Pada bab ini dibahas diagram kompartemen dan pembentukan model, total populasi dan ruang fase model tersebut, bilangan reproduksi dasar model tersebut, titik-titik kesetimbangan model tersebut beserta kestabilannya, diskretisasi model tersebut dengan metode NSFD, serta titik-titik kesetimbangan dari versi diskret dari model semula beserta kestabilannya.
- **BAB 4: SIMULASI NUMERIK MODEL DAN ANALISIS SENSITIVITAS**
Pada bab ini dibahas simulasi numerik dari model semula menggunakan metode Euler dan NSFD, serta analisis sensitivitas dari bilangan reproduksi dasar.
- **BAB 5: KESIMPULAN DAN SARAN**
Pada bab ini dibahas kesimpulan dari pembahasan pada bagian bab-bab sebelumnya dan saran yang diberikan untuk penelitian selanjutnya.