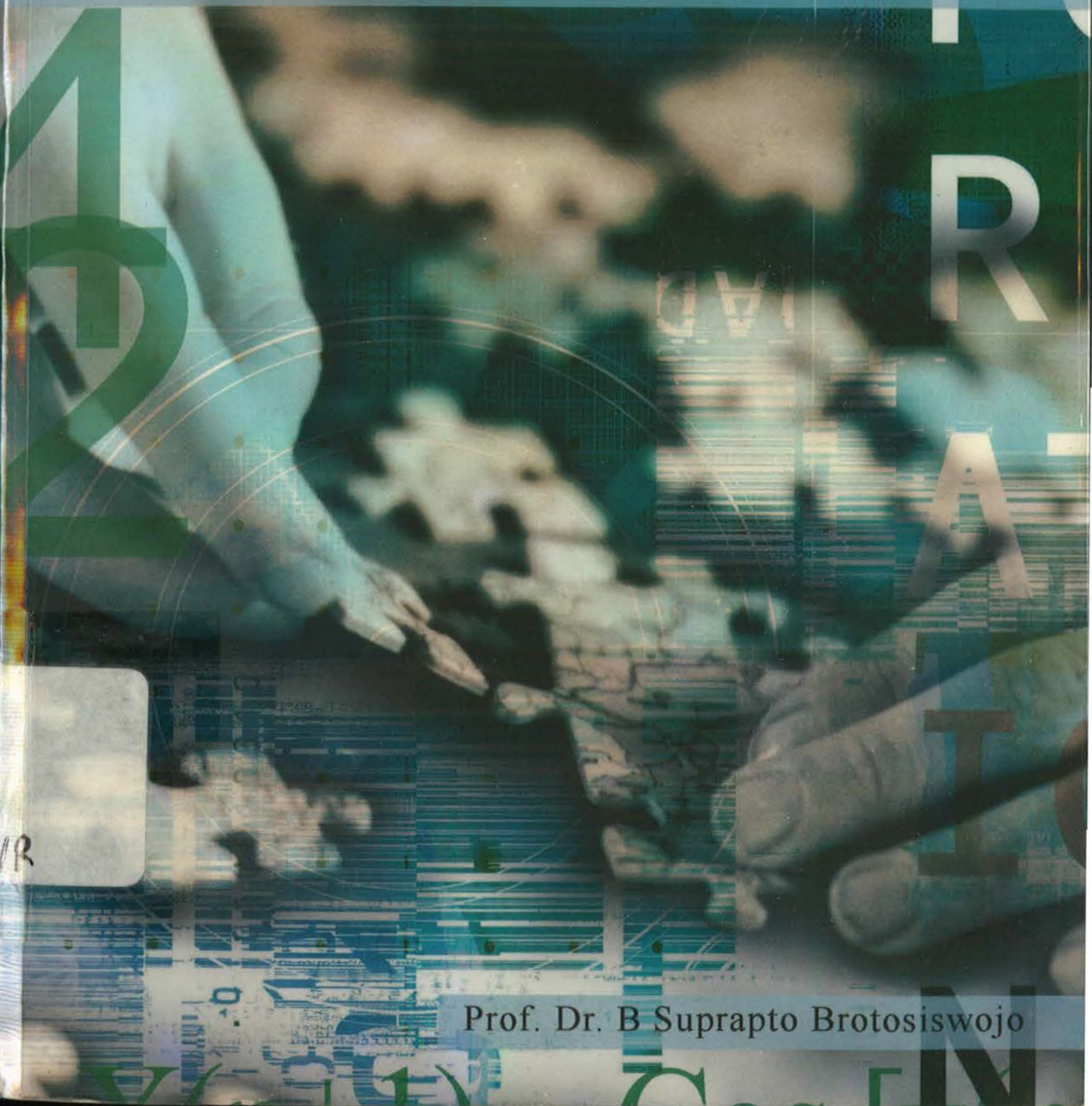
UNPAR PRESS

Merentang

PEMODELAN MATEMATIKA GEJALA ALAM

Dengan Bantuan Mesin Komputer



Prof. Dr. B Suprapto Brotosiswojo

2011

R

B.SUPRAPTO BROTOSISWOJO

PEMODELAN MATEMATIKA GEJALA ALAM

hal 71-73

hal 63.

UNPAR PRESS

PEMODELAN MATEMATIKA GEJALA ALAM

UNPAR PRESS

Penyunting: Deny Rismansyah

Cetakan I,
Diterbitkan oleh Unpar Press
Jln. Ciumbuleuit No. 94 Bandung
Telp. (022) 2030918 ext. 144, 148 – Faks. (022) 2034847
e-mail: lppm@home.unpar.ac.id

Desain Sampul: Bambang Sugiharto
Desain Isi: Deny Rismansyah

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Brotosiswojo, B.Suprapto
Pemodelan Matematika Gejala Alam—Penulis: B.Suprapto Brotosiswojo
Bandung: Unpar Press, Oktober/2006
179 halaman, i - xii , 16,5 x 24,5 cm.
ISBN: 979 - 25 - 5132 - 8

1. Gejala Alam, Pemodelan Matematika   I. Judul

II. Brotosiswojo, B.Suprapto

Pengantar Penerbit

Stephen Wolfram salah satu peneliti muda, dalam bukunya berjudul *A New Kind of Science* telah membangunkan kesadaran kita tentang begitu banyaknya perangai alam yang berawal dari aturan sederhana yang diterapkan dan terjadi secara secara berulang-ulang dengan mempergunakan inferensi logika berantai yang hanya dapat diwujudkan dengan mesin komputer. Demikian juga dengan Mandelbrot, yang mempolopori geometri fraktal, yang merentang konsep dimensi dalam obyek alam telah melahirkan bentuk-bentuk simetrik dalam skala ukurannya, yang oleh sejumlah kalangan dipersepsikan sebagai karya seni lukis yang diekspresikan oleh aturan matematika dengan memanfaatkan mesin komputer sebagai instrumenya. Kemudian Lorentz memunculkan gejala *chaos* ketika menggarap cuaca pasangan persamaan diferensial tidak linear, yang menggugah munculnya gagasan *The butterfly effect* kibasan sayap kupu-kupu disuatu tempat yang dapat menimbulkan tornado yang dahsyat di tempat lainnya. Di Niels Bohr Institute (bapak teori kuantum) sekelompok peneliti muda secara berkelanjutan mengeluarkan e-book yang mengungkapkan upayanyadalam memodelkan gejala *chaos* melalui berbagai ungkapan yang selama ini kita kenal.

Perkembangan keilmuan sebagaimana diuraikan di atas sebaiknya juga disadari oleh peneliti mudadi Indonesia. Dalam konteks itu, guru besar Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Katolik Parahyangan, Beny Suprapto menulis sebuah buku berjudul ***Pemodelan Matematika Gejala Alam Dengan Bantuan Mesin Komputer***, sebuah buku yang masih langka, terutama yang ditulis oleh penulis buku Indonesia dan diterbitkan dalam bahasa Indonesia. Ditangan penulis buku ini, mesin komputer tidak hanya sekedar mesin hitung yang cepat dan akurat, tetapi meluas sebagai salah satu bagian dari logika berpikir dalam melakukan pemodelan matematika dalam sejumlah gejala dimasa lalu yang tidak tersentuh karena terbatasnya daya jangkau otak manusia.

Buku ini disajikan untuk mahasiswa tingkat strata-1 pada semester enam atau semester delapan. Artinya kadar kesulitannya masih berada dalam domain jangkauan mahasiswa yang belajar di FMIPA. Namun demikian, masyarakat umum yang menaruh minat dalam memanfaatkan mesin komputer untuk digunakan sebagai pemodelan terhadap gejala alam dapat mempergunakan buku ini sebagai bahan untuk membuka cakrawala, karena penulis buku ini, menulis dengan bahasa yang sederhana sehingga mudah dipahami oleh yang berminat membacanya.

Buku ini pada awalnya merupakan diktat kuliah yang diajarkan oleh penulis buku ini kepada mahasiswanya di FMIPA UNPAR. Dengan perbaikan seperlunya kemudian menjadi sebuah buku yang diterbitkan oleh UNPAR PRESS. Diharapkan dengan diterbitkannya buku ini, pembaca dapat tercerahkan untuk memahami alam yang dianugrahkan Sang Pencipta sebagai tempat hidup bersama. Selamat membaca dan selamat tercerahkan.

Deny Rismansyah

Daftar Isi

Pendahuluan

Buku ini ditulis sebagai bahan kuliah selama satu semester yang diberikan kepada mahasiswa strata-1 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Judulnya tampak agak aneh. Bukankah dalam ilmu fisika misalnya sudah banyak model-model matematika yang sangat tangguh, seperti aturan-aturannya Newton untuk mekanika klasik, aturannya Maxwell untuk elektrodinamika, Termodinamikanya Black, Kelvin, Boltzmann dsb, Mekanika Kuantumnya Schrodinger, Heisenberg dan Feynman. Lalu apa lagi yang masih perlu diungkapkan dalam membuat pemodelan matematika gejala alam?

Rentangan gejala alam yang sudah dimodelkan dalam ungkapan matematika oleh para pakar itu juga sudah mencapai wilayah yang sangat luas. Dalam ukuran obyek yang digarap mulai dengan skala lebih kecil dari nano-meter hingga ukuran jagad raya. Dalam skala waktu dari usia jagad raya hingga selang waktu usia hidupnya positron dalam "pair creation".

Tetapi hingga saat ini ada dimensi arena yang terlupakan atau mungkin sengaja dihindari, yaitu obyek-obyek yang sifatnya kompleks. Memang ada wilayah obyek yang melibatkan benda banyak, bahkan sangat banyak seperti agregat gas, bahan cair, bahan padat, maupun plasma sebagai kumpulan sangat banyak atom atau molekul. Tetapi yang sanggup ditangani barulah situasi yang berada dalam keadaan kesetimbangan, dengan mengungkapkannya dalam bentuk statistik. Model-model fisika yang handal itu belum mampu melukiskan banyak perangai alam yang kita jumpai sehari-hari, seperti bagaimana memodelkan gejala turbulensi dalam aliran air sungai, bagaimana memodelkan pembentukan awan yang kita saksikan sehari-hari, bagaimana mekanika dari gelembung-gelembung udara saat air mendidih,...dsb.

Barangkali harus kita sadari bahwa ketika para pengembang ilmu tersebut menghasilkan karya-karyanya yang sangat handal, saat itu belum ada mesin komputer dengan kemudahan dan kecanggihannya jaman sekarang ini dalam menghimpun dan menyimpan data, melakukan proses inferensi logika secara berantai panjang dengan sangat cepat.

Ada harapan bahwa kehadiran mesin komputer dengan kemampuan yang dimiliki saat ini (dan mungkin saat mendatang) dapat membantu kita dalam melakukan proses pemodelan tersebut..Memang pada awalnya mesin komputer lebih dilihat sebagai alat berhitung (bilangan) yang cepat dan akurat. Misalnya pada mekanika kuantum dengan aturan persamaan geraknya Schrodinger, solusi eksak yang dapat diwujudkan jumlahnya sangat terbatas, seperti gerak partikel bebas, gerak harmonik, elektron dalam atom Hidrogen. Lain-lainnya harus dicari lewat proses aproksimasi atau dalam bahasa asingnya *perturbation.* Dicari ungkapan eksak terdekat yang dapat ditemukan, kekurangannya didekati sampai beberapa tahap terdekat. Kemudian mesin komputer digunakan untuk melakukan hitungan numeriknya.

Tetapi kita tahu bahwa mesin komputer bukan sekedar mesin hitung bilangan. Nyata bisa digunakan untuk menulis naskah, membuat foto, merekam musik, ..dsb. Mesin komputer adalah mesin *olah logika*, termasuk juga dapat digunakan untuk memproses matematika simbolik. Oleh karena itu sekarang mesin tersebut juga digunakan untuk *membantu kita berpikir* dalam memodelkan gejala alam yang tak tersentuh lewat cara-cara lama. Betapa kita sekarang menyadari bahwa otak manusia ini juga punya keterbatasan, sama halnya dengan keterbatasan indera penglihatan kita, maupun indera pendengaran kita. Maka dalam upaya memahami perangai alam ini, kita bersedia menggunakan *bantuan alat lain* dalam proses *penglihatan*, maupun *pendengaran.*

Karena dengan indera pendengaran kita, rentang frekuensi getaran yang sanggup kita dengar sangat terbatas, kita membuat alat-alat yang dapat digunakan untuk menangkap getaran ultrasonik. Getaran ultrasonik yang memang bisa dibuat di alam ini sekarang kita gunakan di bidang kedokteran misalnya dalam bentuk ultrasonografi untuk memotret gerakan-gerakan dalam tubuh kita yang tidak dapat dilihat dengan mata. Kita juga sudah menggunakan getaran ultrasonik itu sebagai pengamat keretakan yang terjadi di dalam bahan-bahan padat tanpa membongkarnya *ultrasonic non-distructive testing.*

Karena indera penglihatan kita hanya sanggup menangkap gelombang elektromagnetik dalam rentang panjang gelombang antara 400 – 800 nanometer, maka, kita menggunakan alat-alat lain yang sanggup menangkap sinar ultra-violet, atau infra-merah, atau gelombang-mikro, bahkan sampai gelombang elektromagnetik dengan panjang gelombang puluhan meter (radio), maupun sinar-gamma yang sangat sangat kecil ukuran panjang gelombangnya. Gelombang elektromagnetik di luar jangkauan indera penglihatan kita itu memang benar-benar ada di alam ini. Kita sudah menyaksikannya secara nyata, seperti teknologi televisi atau komunikasi lewat telpon genggam.

Oleh karena itu mestinya kita tidak perlu malu mengakui bahwa otak kita juga memiliki sejumlah keterbatasan dalam hal olah logika. Rasanya daya ingatan kita tidak akan sanggup untuk menampung data 40 gigabyte yang sekarang dapat ditampung dalam kotak kecil. Otak kitapun tidak sanggup melakukan inferensi berantai sampai sejuta tahap, sedangkan proses seperti itu dapat dilakukan dengan mudah oleh mesin komputer jaman sekarang dalam waktu kurang dari satu detik. Jadi tidak ada salahnya bila mesin komputer itu kita gunakan juga dalam merumuskan ungkapan aturan logika (matematika) yang kita pakai untuk memodelkan gejala alam.

Buku ini dimaksudkan sebagai pengenalan akan telah adanya perwujudan pemodelan matematika yang mengikut sertakan mesin komputer sebagai komponen di dalamnya. Oleh karena itu sebaiknya kuliah yang terkait dengan buku ini dilakukan dengan benar-benar mengikut sertakan mesin komputer. Rasanya pada saat ini hal semacam itu dengan mudah dapat diwujudkan karena sarana yang diperlukan masih dalam jangkauan biaya untuk belajar pada jenjang universitas.

Sekedar untuk memberi gambaran, topik yang disajikan dalam buku ini dibagi dalam 6 bab. Bab-1 memperkenalkan bentuk sederhana Iterasi Fungsional dari Persamaan Logistik, sebuah model sederhana yang menelorkan konsep Chaos yang tidak tersedia dalam perbendaharaan matematika klasik. Juga diperkenalan salah satu cara membuat kriteria chaos dengan indikator *koefisien Lyapunov*.

Bab-2 membahas upaya melukiskan proses pantulan berantai dengan obyek lingkaran dan segiempat. Meskipun aturan dasarnya sederhana, tetapi hal tersebut tidak dapat digarap lewat rumusan persamaan diferensial mekanika. Sehingga diperlukan ungkapan dalam bentuk iterasi fungsional yang perwujudannya melibatkan bantuan mesin komputer. Kalau pada bab-1 obyeknya masih bersifat abstrak, maka pada bab-2 ini obyeknya dapat kita temui dalam kehidupan sehari-hari. Di sini juga ditunjukkan terjadinya chaos, dan diperkenalkan alat yang juga dapat dijadikan indikator lewat *Irisan Poincare*.

Bab-3 menyajikan obyek sederhana yang juga kita temui dalam kehidupan sehari-hari, yaitu ayunan fisik. Bentuk sederhananya sudah biasa digarap dengan persamaan diferensial. Jika simpangan sudutnya sangat kecil, dapat kita peroleh solusinya secara pasti. Tetapi karena model lengkapnya tidak lagi membentuk persamaan diferensial yang linier maka gejala chaos pun akan muncul. Ini sekedar menunjukkan bahwa gejala chaos bisa terjadi ketika aturannya berupa persamaan diferensial yang tidak lagi linier.

Bab-4 membahas apa yang lazim disebut "Cellular Automata". Ketika kita menggarap agregat kumpulan benda banyak seperti zat padat atau zat cair otak kita tidak lagi sanggup untuk membahas dari sifat mikroskopiknya. Kita menunggu sampai ada situasi kesimbangan termal dan mengharapkan statistik dapat diterapkan untuk memperoleh informasi tentang sifat makroskopiknya. *Cellular Automata* bertolak dari sisi lain yaitu aturan interaksi dalam skala mikroskopik. Yang menarik dari pola pemikiran ini adalah bahwa dalam aturan interaksi yang sederhana, jika dilakukan berulang-ulang, maka sanggup untuk menghasilkan pola-pola yang belum pernah kita jumpai. Tetapi bukankah itu proses alam yang sesungguhnya kita saksikan sehari-hari? Mengapa biji jagung yang kecil ukurannya itu kalau ditanam dapat tumbuh menjadi pohon jagung, bahkan yang buahnya juga jagung. Mengapa biji kacang kalau diletakkan di tanah yang sama menghasilkan pohon kacang yang berbeda dengan pohon jagung? Di mana mereka menyimpan data tentang aturan tumbuhnya? Apakah bukan bahwa aturan itu sesungguhnya sederhana tetapi diterapkan secara berulang-ulang untuk dapat mewujudkan bangun akhirnya?

Bab-5 menyajikan hubungan antara Iterasi Fungsional dengan bangun-bangun yang dikenal dengan nama *fraktal*, yaitu obyek geometri yang memiliki sifat simetri dalam skalanya. Obyek yang di petakan adalah sebuah titik, berawal dari satu tempat ke tempat lain mengikuti aturan tertentu. Ada kalanya aturannya tidak hanya satu macam, boleh lebih dari satu. Bahkan ada semacam penjatahan berapa banyak porsi jumlah langkah yang digunakan untuk masing-masing jenis aturan yang dipakai. Proses urutan iterasinya pun boleh dilakukan secara acak antara jenis aturan masing-masing. Yang menakjubkan adalah bahwa lukisan-lukisan obyek alam yang tampak oleh pancaindera kita itu dapat muncul dari proses iterasi semacam ini. Rasanya ini sejalan dengan kenyataan bahwa obyek alam tersebut dibangun oleh kumpulan obyek yang sangat kecil ukurannya seperti atom atau molekul. Barangkali saja aturan-aturan itulah yang mengendalikan terbentuknya obyek alam tadi.

Bab-6 membahas lebih lanjut tentang fraktal, tetapi dalam kaitannya dengan auran matematika yang kita terapkan. Proses berantai dalam wujud perintah kepada mesin komputer dapat dilakukan dengan subrutin yang boleh memanggil dirinya sendiri ("recursive"). Contohnya diwujudkan dalam bentuk mengubah garis, dan mengubah obyek geometri yang dalam bahasanya Excel disebut *shape*.

Kita sadar bahwa apa yang kita saksikan sehari-hari berbeda dengan matematika geometri yang selama ini kita pelajari seperti segitiga, kubus, bola, elips, parabola,...dsb. Daun-daun pada pohon bentuk geometrinya praktis sama, hanya ukurannya berbeda-beda. Fraktal tampaknya merupakan kenyataan gejala alam yang lebih realistik. Bab ini memberi contoh-contoh sederhana bahwa jika kita bersedia mengikut sertakan mesin komputer sebagai alat berpikir kita, maka pemodelan matematika dapat menggarap pelbagai obyek geometri dalam alam yang riil.

Saat ini ilmu tentang keenam topik tadi sudah berkembang cukup jauh dan banyak buku-buku yang tersedia untuk dipelajari secara lebih mendalam. Apa yang disajikan dalam buku kuliah ini dimaksudkan sebagai perkenalan, dengan memberikan contoh-contohnya yang sederhana agar prosesnya dapat diwujudkan dalam kurun waktu satu semester.

Ada sedikit persoalan barangkali, yaitu karena prosesnya harus ditampilkan dengan bantuan mesin komputer, timbul pertanyaan perangkat lunak jenis apa yang dapat digunakan? Yang sesungguhnya penting adalah alur berpikir kita dalam memerintah mesin komputer tersebut menjalankan apa yang kita kehendaki serta menampilkan wujud nyata dari hasilnya. Jadi mestinya pelbagai perangkat lunak yang tersedia dan mudah dipahami cara kerjanya dapat digunakan, seperti Pascal, Delphi,.C++, Java, dll. Hanya saja masing-masing punya selera dalam menuliskan "bahasa perintahnya", jadi perlu ada yang dipilih.

Dalam sajian di buku ini penulis memilih perangkat lunak Microsoft Excel, yang biasanya tersedia di lembaga-lembaga dalam kaitan dengan tugas-tugas administratif. Dengan demikian apa yang sudah tersedia itu dapat dimanfaatkan juga untuk kepentingan pengajaran kuliah ini. Lazimnya yang banyak digunakan dalam Excel adalah tampilan sel-sel yang dapat diisi dengan data maupun rumus. Ungkapan grafiknya diwujudkan lewat tampilan Chart yang dapat melakukan proses *automatic scaling.* Mungkin tidak banyak disadari bahwa Excel juga menyediakan fasilitas pemrograman dalam bahasa Visual Basic (for Application). Di situ kita juga dapat menggunakan obyek *shape* yang bentuknya mudah dilukis.baik secara manual maupun melalui program. Dengan sifat "object oriented" dalam pemrogramannya, editornya juga langsung menyajikan pilihan-pilihan perintah yang tepat dan dipahami bahasanya oleh mesin komputer, sehingga kita tidak perlu lagi menghafalkannya, ataupun membuka buku-buku catatan. Pada contoh-contoh yang disajikan di buku ini, semua subrutin dibuat dalam bentuk *private* agar tidak beroperasi sebagai macro yang dapat merusak program Excel lainnya.

Bagi mereka yang tidak biasa menggunakan perangkat lunak ini, beberapa petunjuk singkat disediakan sebagai lampiran pada buku ini.

Bab 1

Iterasi Fungsional Persamaan Logistik

Salah satu kelebihan mesin komputer yang dapat dimanfaatkan adalah kemampuannya untuk melakukan proses berulang (iterasi). Kita menyusun algoritma untuk melakukan proses logika untuk satu tahap, lalu proses tersebut diulangi berkali-kali. Yang paling sederhana tentunya jika proses setahap tadi bentuknya sebuah fungsi, misalnya f(x)=sin(x), atau f(x)=cos(x).

Untuk tidak disalahtafsirkan, jika proses itu berulang 3 kali misalnya dimulai dengan x=2.5, maka yang kita peroleh adalah $f^{3}(2.5)$ = sin(sin(sin(2.5))).

Pada proses Iterasi Fungsional rantai tahapannya dapat berjumlah sangat banyak, sehingga hanya dengan bantuan mesin komputer kita dapat memperoleh berapa nilainya untuk $f^{100}(2.5)$.

Sebagai kelaziman, ungkapan sebuah Iterasi Fungsional dituliskan dengan indeks tahapan, misalnya X(n+1) = Cos[X(n)] dengan pengertian nilai n = 0, 1, 2, 3, ...dst.

Latihan:
Lakukan proses semacam itu untuk $f^{n+1}(x)=\sin(f^{n}(x))$,
dan $f^{n+1}(x)=\cos(f^{n}(x))$, sampai 100 tahap.

1.1. Atraktor

Model sederhana dari proses pemetaan atau Iterasi Fungsional yang menyimpan banyak ragam konsep adalah persamaan logistik

$$X(n+1) = R * X(n) * [1 - X(n)] \qquad [1.1]$$

dengan R sebagai parameter. Nilai X(0) biasanya dibatasi dalam rentang antara 0 dan 1.

Sejumlah pengertian atau konsep baru akan muncul dari hasil pengamatan tentangperangai dari proses iterasi semacam itu. Untuk memudahkan proses komputasinya, pada sajian ini akan digunakan Microsoft Excel yang kebanyakan penggunaannya sudah dikenal untuk tugas yang lain seperti administrasi perkantoran.

Sebagai contoh untuk menjalankan latihan tsb di atas, kita dapat memilih sel tertentu, misalnya sel C4, mengisikannya dengan nilai 2.5 sebagai X(0). Kemudian pada sel C5 kita isikan rumus =Cos(C4). Setelah itu kita melakukan "copy" dari rumus yang ada di C5 ke baris-baris di bawahnya C6, C7, C8, ...dst. Maka akan muncul nilai-nilai X(1), X(2), X(3),....dst., terserah kapan (n=berapa) anda akan menghentikannya.

Ada baiknya sebagai sekedar indikator, pada sel B4 diisikan bilangan 0, lalu di sel B5 rumus =B4+1, dan rumus ini di"copy" ke sel-sel di bawahnya. Dengan demikian hasilnya juga dapat di wujudkan dalam bentuk tampilan grafik. Sebaiknya dipilih "X-Y scater" agar dapat memasukkan baris-baris B sebagai data sumbu-X dan baris-baris C sebagai data sumbu-Y.

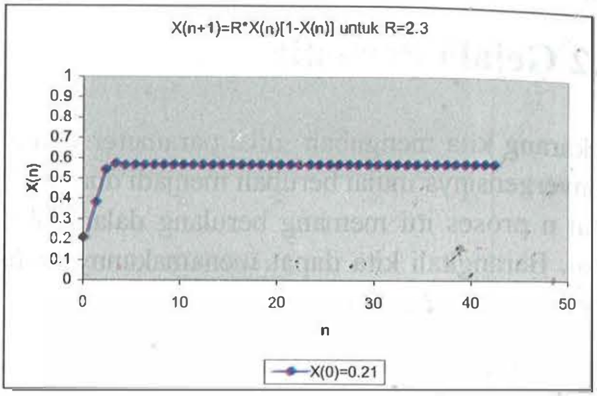
Lewat cara serupa anda dapat membuat grafik untuk Iterasi Fungsional persamaan logistik, beserta ungkapan grafiknya.

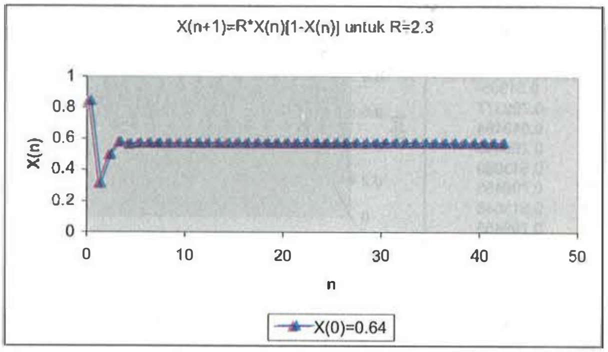
Misalnya pada R = 2.3 kita dapatkan bentuk sbb.

ITERASI FUNGSIONAL

Persamaan Logistik X(n+1) = R*X(n)*[1-X(n)] R = 2.3

n	X1(n)	X2(n)
0	0.21	0.84
1	0.38157	0.30912
2	0.542741	0.491199
3	0.570798	0.574822
4	0.563471	0.562124
5	0.565734	0.566123
6	0.565062	0.564944
7	0.565264	0.565299
8	0.565203	0.565193
9	0.565222	0.565225
10	0.565216	0.565215
11	0.565218	0.565218
12	0.565217	0.565217
13	0.565217	0.565217
14	0.565217	0.565217
15	0.565217	0.565217
16	0.565217	0.565217
17	0.565217	0.565217
18	0.565217	0.565217
19	0.565217	0.565217
20	0.565217	0.565217
21	0.565217	0.565217
22	0.565217	0.565217
23	0.565217	0.565217
24	0.565217	0.565217
25	0.565217	0.565217
26	0.565217	0.565217
27	0.565217	0.565217
28	0.565217	0.565217
29	0.565217	0.565217
30	0.565217	0.565217
31	0.565217	0.565217
32	0.565217	0.565217
33	0.565217	0.565217
34	0.565217	0.565217
35	0.565217	0.565217
36	0.565217	0.565217
37	0.565217	0.565217
38	0.565217	0.565217
39	0.565217	0.565217
40	0.565217	0.565217
41	0.565217	0.565217
42	0.565217	0.565217





Gambar 1- 1 Lintasan konvergen ke satu atraktor, apapun nilai awalnya

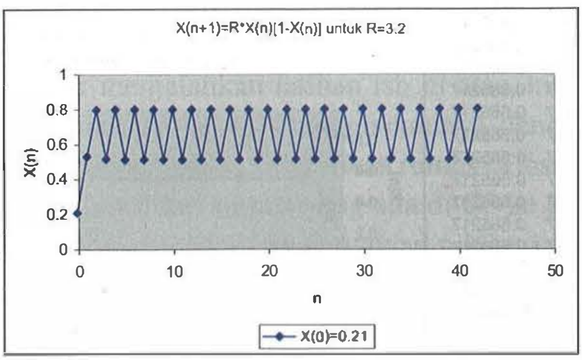
Kalau kita memulai dengan X(0)=0.21, sejak n=15 nilai X(n) cenderung tetap = 0.565217. Untuk membuat perbandingan kita juga melakukan hal yang serupa tetapi mulai dengan X(0)=0.64. memang awalnya X(n) berbeda tetapi setelah n=15, nilai X(n) juga cenderung tetap pada = 0.565217 . Proses yang serupa juga terjadi bila kita memilih nilai X(0) lainnya, selama masih dalam rentang antara 0 dan 1. Titik konvergensi X(n) untuk n yang cukup besar yang besarnya sebut saja sebagai Xb itu lazim disebut ATRAKTOR, seolah-olah menarik semua nilai X(0) ke nilai Xb itu.

1.2 Gejala Periodik

Sekarang kita mengubah nilai parameter R menjadi R=3.2, maka titik konvergensinya mulai berubah menjadi dua. Kalau diikuti lewat tahapan nilai n proses itu memang berulang dalam siklus bolak-balik antara 2 nilai. Barangkali kita dapat menamakannya sebagai gejala PERIODIK dengan perioda-2.

ITERASI FUNGSIONAL
Persamaan Logistik X(n+1) = R*X(n)*[1-X(n)]   R = 3.2

n	X1(n)
0	0.21
1	0.53088
2	0.796949
3	0.517829
4	0.798983
5	0.51395
6	0.799377
7	0.513194
8	0.799443
9	0.513069
10	0.799453
11	0.513048
12	0.799455
13	0.513045
14	0.799455
15	0.513045
16	0.799455
17	0.513045
18	0.799455
19	0.513045
20	0.799455
21	0.513045
22	0.799455
23	0.513045
24	0.799455



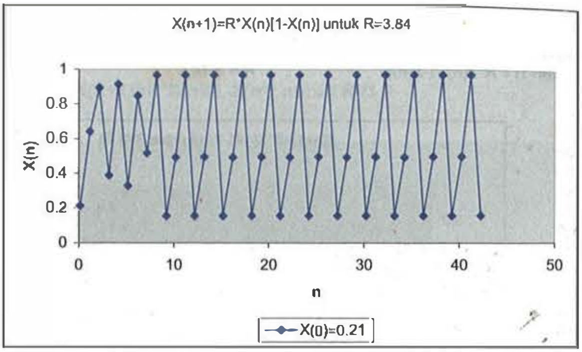
Gambar 1- 2 Gejala periodik dengan 2 atraktor

Gejala yang serupa juga terjadi kalau kita memilih nilai awal X(0) yang lain asalkan masih dalam rentang antara 0 dan 1.

Guna membuat perbandingan lebih lanjut, akan dipilih nilai R = 3.84. Seperti terlihat pada gambar di bawah ini, pada n yang cukup besar titik atraktornya berubah menjadi 3. Urutannya juga secara periodik mengikuti tahapan nilai n.

ITERASI FUNGSIONAL
Persamaan Logistik X(n+1) = R*X(n)*[1-X(n)]   R = 3.84

n	X1(n)
0	0.21
1	0.637056
2	0.887868
3	0.382304
4	0.906807
5	0.324511
6	0.841742
7	0.511536
8	0.959489
9	0.14926
10	0.48761
11	0.95941
12	0.149537
13	0.488356
14	0.959479
15	0.149294
16	0.487701
17	0.959419
18	0.149507
19	0.488273
20	0.959472
21	0.149321
22	0.487772
23	0.959426
24	0.149483

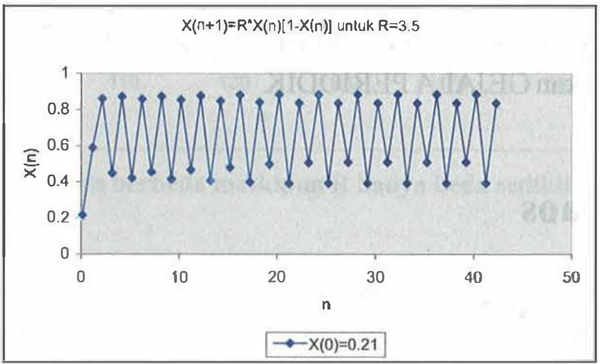


Gambar 1- 3 Gejala periodik dengan 3 atraktor

Pada R = 3.5 juga dijumpai ada 4 titik atraktor yang mengikuti urutan tahapan n

ITERASI FUNGSIONAL
Persamaan Logistik X(n+1) = R*X(n)*[1-X(n)]   R = 3.5

n	X1(n)
0	0.21
1	0.58065
2	0.852235
3	0.440758
4	0.862716
5	0.414529
6	0.849431
7	0.447642
8	0.865405
9	0.407677
10	0.845168
11	0.458008
12	0.868828
13	0.39888
14	0.839212
15	0.472274
16	0.87231
17	0.38985
18	0.832534
19	0.487974
20	0.874494
21	0.38414
22	0.828018
23	0.498415
24	0.874991



Gambar 1- 4 Gejala periodik dengan 4 atraktor