

SKRIPSI

**BIFURKASI HOPF PADA SUATU MODEL
MANGSA-PEMANGSA DENGAN EFEK ALLEE**



Rhandy Ghetly Wirawan

NPM: 6161801064

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022**

FINAL PROJECT

**HOPF BIFURCATION IN A PREDATOR-PREY MODEL WITH
ALLEE EFFECT**



Rhandy Ghetly Wirawan

NPM: 6161801064

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

BIFURKASI HOPF PADA SUATU MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN EFEK ALLEE

Rhandy Ghetly Wirawan

NPM: 6161801064

Bandung, 22 Juli 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1



Dr. Livia Owen

Pembimbing 2



Benny Yong, Ph.D.

Ketua Tim Penguji



Farah Kristiani, Ph.D.

Anggota Tim Penguji



Dr. Daniel Salim

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

BIFURKASI HOPF PADA SUATU MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN EFEK ALLEE

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 22 Juli 2022



Rhandy Ghetly Wirawan
NPM: 6161801064

ABSTRAK

Skripsi ini membahas tentang model mangsa-pemangsa dengan efek Allee dan bifurkasi Hopf yang terjadi, kemudian divisualisasikan dengan simulasi-simulasi numerik. Model mangsa-pemangsa dengan efek Allee menggambarkan pertumbuhan populasi spesies mangsa dan spesies pemangsa akibat dari interaksi pemangsaan, di mana laju pertumbuhan populasi pemangsa dipengaruhi oleh efek Allee. Efek Allee merupakan fenomena yang terjadi akibat adanya batas minimum untuk ukuran populasinya. Dari model mangsa-pemangsa dengan efek Allee, dilakukan analisis berupa keberadaan dan kestabilan titik ekuilibrium, keberadaan orbit tertutup, dan bifurkasi Hopf. Orbit tertutup ini menyatakan suatu siklus tanpa henti yang menyebabkan ukuran populasi pada mangsa dan pemangsa terus mengalami peningkatan atau penurunan. Bifurkasi Hopf terjadi ketika adanya perubahan pada parameter-parameter seperti batas minimum dari ukuran populasinya, yang memengaruhi sehingga menyebabkan perubahan banyak titik ekuilibrium atau kestabilan pada titik ekuilibrium serta memicu terbentuknya suatu orbit tertutup. Dengan melakukan analisis pada model mangsa-pemangsa dengan efek Allee, terjadi bifurkasi Hopf yang menandakan bahwa muncul dua kemungkinan pada pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa, yaitu bertumbuh secara siklis atau tidak terjadi perubahan perihal ukuran populasinya yang tidak dipengaruhi oleh banyaknya kelahiran ataupun kematian.

Kata-kata kunci: Pemangsaan, Model Mangsa-Pemangsa, Titik Ekuilibrium, Bifurkasi Hopf, Efek Allee

ABSTRACT

This thesis discusses the predator-prey model with the Allee effect and the Hopf bifurcation that occurs, then visualized by numerical simulations. The predator-prey model with the Allee effect describes the population growth of prey and predator species as a result of predation interactions, where the growth rate of predator populations is affected by the Allee effect. Allee effect is a phenomenon that occurs due to the existence of a minimum limit for the population size. From the predator-prey model with the Allee effect, analysis was carried out in the form of the existence and stability of the equilibrium points, the existence of a closed orbit, and the Hopf bifurcation. This closed orbit represents a relentless cycle that causes the population sizes of both prey and predator to increase or decrease. Hopf bifurcation occurs when there is a change in parameters such as the minimum limit of the population size, which affects so that it causes changes in many equilibrium points or stability at equilibrium points and triggers the formation of a closed orbit. By analyzing the predator-prey model with the Allee effect, there is a Hopf bifurcation which indicates that there are two possibilities for the prey and predator populations growth, namely growing cyclically or there is no change in population size which is not affected by the number of births or deaths.

Keywords: Predation, Predator-Prey Model, Equilibrium Point, Hopf Bifurcation, Allee Effect

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena rahmat dan kasih-Nya, penulis diberikan kesehatan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul *Bifurkasi Hopf pada Suatu Model Mangsa-Pemangsa dengan Efek Allee* yang merupakan syarat kelulusan mata kuliah Skripsi di Fakultas Teknologi Informasi dan Sains Universitas Katolik Parahyangan (FTIS UNPAR).

Adapun skripsi ini dapat terselesaikan berkat pihak-pihak yang telah membantu penulis, baik berupa bimbingan maupun dukungan. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Keluarga penulis yang senantiasa memberikan dukungan kepada penulis selama perkuliahan.
2. Ibu Dr. Livia Owen selaku pembimbing skripsi penulis yang telah membimbing penulis selama proses penyusunan skripsi.
3. Bapak Benny Yong, Ph.D. selaku dosen wali dan pembimbing skripsi penulis yang telah membimbing penulis selama proses penyusunan skripsi.
4. Ibu Farah Kristiani, Ph.D. dan Bapak Dr. Daniel Salim selaku penguji skripsi penulis yang telah memberikan masukan untuk menyusun skripsi ini supaya skripsi ini menjadi lebih baik.
5. Seluruh dosen FTIS yang telah mendidik penulis dari awal masa perkuliahan.
6. Staf Tata Usaha FTIS yang telah memberikan bantuan administratif dari awal perkuliahan.
7. Admin Lab. Komputer yang telah mengizinkan penulis meminjam komputer ketika perangkat yang digunakan penulis sedang bermasalah.
8. Novaldi Dwi Putra sebagai teman berdiskusi, teman bermain, dan teman curhat yang telah memberikan dukungan dan masukan selama proses penyusunan skripsi.
9. Teman-teman yang dibimbing oleh Bapak Benny Yong, Ph.D.: Novaldi Dwi Putra, Orlin Monica Kencana, Feliya, Anthony Jason Susilo, dan Vellina Helida yang telah memberikan dukungan dan hiburan selama penyusunan skripsi.
10. Teman-teman HappyPadoru: Christopher Malvin Hidayat, Jonathan Dinbara, Jonathan Prasetyo Johan, Novaldi Dwi Putra, Topas Sagara, Steven Sergio, Ambroisius Adrian Djunaidi, dan Yohanes Reinhart yang telah memberikan dukungan dan hiburan kepada penulis.
11. Yohanes Dimas Prasetyo, Meilyana Novita, dan Alwy Bathia Ramadhan yang telah memberikan dukungan dan hiburan kepada penulis.
12. Teman-teman dari KMBP yang telah memberikan dukungan selama masa perkuliahan.
13. Teman-teman angkatan 2016, 2017, 2018, 2019, dan 2020 yang tidak dapat disebutkan satu per satu, baik satu Program Studi maupun tidak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan. Maka dari itu, penulis sangat menerima dan mengapresiasi masukan yang dapat mengembangkan skripsi ini menjadi lebih baik. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Bandung, Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Pertumbuhan Satu Populasi dan Dua Populasi	3
2.1.1 Model Pertumbuhan Eksponensial	3
2.1.2 Model Persamaan Logistik	4
2.1.3 Fenomena Efek Allee	5
2.1.4 Model Mangsa-Pemangsa	6
2.2 Titik Ekuilibrium, Kestabilan, dan Matriks Jacobian	7
2.3 Bifurkasi Hopf	10
3 MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN EFEK ALLEE	15
3.1 Model Matematis	15
3.2 Titik Ekuilibrium	16
3.3 Keberadaan <i>Limit Cycle</i>	23
3.4 Penentuan Nilai Parameter Bifurkasi	25
4 SIMULASI NUMERIK	27
4.1 Simulasi untuk Titik Ekuilibrium	27
4.2 Simulasi untuk Bifurkasi Hopf	29
5 KESIMPULAN DAN SARAN	33
5.1 Kesimpulan	33
5.2 Saran	34
DAFTAR REFERENSI	35
A PENYELESAIAN PERSAMAAN UNTUK EFEK ALLEE DALAM MODEL MANGSA-PEMANGSA	37
A.1 Model Matematis	37
A.2 Model Matematis yang Telah Diskala Ulang	37
A.3 Penentuan Nilai Parameter Bifurkasi	38

DAFTAR GAMBAR

2.1 Solusi-solusi model pertumbuhan eksponensial dengan tiga kondisi untuk nilai awal $N_0 \in \{5, 10, 15\}$	4
2.2 Grafik persamaan (2.8) dengan $r = 1$, $K = 100$, dan $N_0 \in \{1, 25, 65, 130, 175\}$	5
2.3 Perbandingan laju pertumbuhan dari model persamaan logistik (tanpa efek Allee), efek Allee lemah ($A = 0$), dan efek Allee kuat ($A = 0,3$), dengan $r = 1,6$ dan $K = 1$	6
2.4 Jenis titik ekuilibrium dan kestabilannya	9
2.5 Potret fase sistem (2.17)	11
2.6 Diagram bifurkasi Hopf dari sistem $\dot{r} = r(\mu - r^2)$	11
2.7 Potret fase sistem persamaan (2.18)	13
2.8 Diagram bifurkasi Hopf dari sistem $\dot{r} = r(\mu + r^2)$	13
3.1 Ilustrasi <i>nullclines</i> dari sistem dengan parameter $\alpha = 1$, $\beta = 0,15$, $\sigma = 1$, dan $\gamma = 0,2$	23
3.2 Ilustrasi <i>nullclines</i> dan vektor arah dari sistem dengan parameter $\alpha = 1$, $\beta = 0,15$, $\sigma = 1$, dan $\gamma = 0,2$	24
3.3 <i>Trapping region</i>	24
4.1 Potret fase dari sistem dengan parameter $\alpha = 1$, $\beta = 0,15$, $\sigma = 1$, dan $\gamma = 0,2$	29
4.2 Potret fase ketika nilai β divariasi dengan titik ekuilibrium $P_{1,3}$ disimbolkan dengan lingkaran hitam	29
4.3 Deret waktu u dan v terhadap t ketika nilai β divariasi	30
4.4 Potret fase ketika nilai γ divariasi dengan titik ekuilibrium $P_{1,3}$ disimbolkan dengan lingkaran hitam	31
4.5 Deret waktu u dan v terhadap t ketika nilai γ divariasi	31

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Makhluk hidup di alam semesta sangat beragam. Keberagaman tersebut memunculkan berbagai interaksi secara alami; salah satu contohnya adalah predasi (pemangsaan), yang melibatkan dua spesies, yaitu pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*). Fenomena ini menarik perhatian para ilmuwan pada abad ke-20 hingga saat ini. Pada abad ke-20, terdapat model matematis untuk fenomena predasi yang diperkenalkan oleh Alfred J. Lotka (1925, [1]) dan Vito Volterra (1926, [2]); model tersebut berupa suatu sistem persamaan diferensial. Model tersebut dikenal sebagai model mangsa-pemangsa Lotka-Volterra, yang kemudian banyak dikembangkan hingga saat ini.

Seiring berjalannya waktu, muncul berbagai fenomena yang dikaitkan dengan model mangsa-pemangsa Lotka-Volterra. Salah satu fenomena tersebut adalah efek Allee, yang diperkenalkan oleh Warder Clyde Allee pada awal tahun 1930-an [3]. Fenomena efek Allee terjadi akibat adanya suatu batas minimum untuk ukuran populasi suatu spesies. Jika ukuran populasi suatu spesies berada di bawah suatu batas minimum, maka muncul kemungkinan punahnya spesies tersebut. Apabila ditambah dengan faktor-faktor lainnya seperti tingkat pertumbuhan, tingkat interaksi spesies tersebut, dan lain sebagainya, maka dapat menyebabkan perubahan pada kemungkinan punahnya suatu spesies [4, 5].

Kemungkinan-kemungkinan lain yang dapat terjadi juga bergantung pada faktor-faktor yang memengaruhi ukuran dan laju pertumbuhan populasi dari spesies tersebut. Apabila faktor-faktor tersebut mengalami perubahan yang signifikan, maka ukuran dan laju pertumbuhan populasi juga mengalami perubahan. Variasi di sekitar suatu faktor yang dapat menyebabkan perubahan banyak ekuilibrium atau kestabilan memicu terjadi fenomena yang disebut bifurkasi. Fenomena bifurkasi ini juga menarik perhatian para ilmuwan sehingga banyak artikel dan karya tulis ilmiah yang telah dipublikasikan. Salah satu artikel tersebut berisi tentang model interaksi pemangsaan dan kompetitif, analisis model, mencari titik ekuilibrium, menentukan kestabilan dari titik ekuilibrium, dan memvisualisasikan pertumbuhan populasi antar spesies [6].

Pada skripsi ini, diselidiki lebih rinci perubahan seperti apa saja yang terjadi pada populasi mangsa dan pemangsa dalam interaksi pemangsaan. Perubahan yang dimaksud adalah perubahan ukuran dan laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa akibat dari variasi di sekitar faktor tertentu, diawali dengan menyelidiki keberadaan dan kestabilan titik-titik ekuilibrium yang dapat diartikan sebagai kemungkinan-kemungkinan yang muncul pada kedua populasi tersebut pada waktu yang akan datang, kemudian dilanjutkan dengan menganalisis dinamika kedua populasi tersebut bifurkasi yang terjadi ketika salah satu faktor dari faktor-faktor yang ada mengalami perubahan.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini tersusun sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model matematis dari model mangsa-pemangsa dengan efek Allee?
2. Bagaimana keberadaan dan kestabilan titik ekuilibrium dari model mangsa-pemangsa dengan efek Allee?

3. Bagaimana dinamika dan bifurkasi populasi dua spesies dengan efek Allee?

1.3 Tujuan

Skripsi ini ditulis dengan tujuan-tujuan sebagai berikut.

1. Mengetahui dan memahami konstruksi model matematis dari model mangsa-pemangsa dengan efek Allee.
2. Mencari keberadaan titik ekuilibrium dan menentukan kestabilan titik ekuilibrium dari model mangsa-pemangsa dengan efek Allee.
3. Menganalisis dinamika dan bifurkasi populasi dua spesies dengan efek Allee.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam skripsi ini adalah populasi mangsa dan pemangsa tidak mengalami kepunahan sebagai akibat dari fenomena efek Allee.

1.5 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari 5 bab, yaitu

BAB 1: PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika pembahasan.

BAB 2: LANDASAN TEORI

Bab ini berisi kajian teori dasar seperti model pertumbuhan populasi, titik ekuilibrium, dan bifurkasi yang menjadi langkah penyelesaian masalah dalam skripsi ini.

BAB 3: MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN EFEK ALLEE

Bab ini berisi pembahasan model matematis yang dikaitkan dengan efek Allee, keberadaan dan kestabilan titik ekuilibrium, dan bifurkasi yang terjadi.

BAB 4: SIMULASI NUMERIK

Bab ini berisi simulasi numerik yang dilakukan untuk melihat perubahan titik ekuilibrium beserta kestabilannya dan bifurkasi.

BAB 5: KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan dari apa yang telah dibahas dalam skripsi ini dan saran pengerjaan skripsi ke depannya.