

SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK SUATU MODEL SUPERINFEKSI
PADA PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA**



Novaldi Dwi Putra

NPM: 6161801067

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022**

FINAL PROJECT

**DYNAMICAL ANALYSIS OF A SUPERINFECTION MODEL
ON THE SPREAD OF MALARIA**



Novaldi Dwi Putra

NPM: 6161801067

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS DINAMIK SUATU MODEL SUPERINFEKSI PADA PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA

Novaldi Dwi Putra

NPM: 6161801067

Bandung, 22 Juli 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1



Benny Yong, Ph.D.

Pembimbing 2



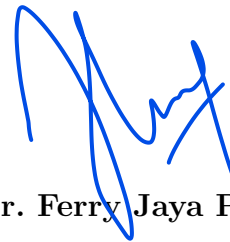
Dr. Livia Owen

Ketua Tim Penguji



Farah Kristiani, Ph.D.

Anggota Tim Penguji



Dr. Ferry Jaya Permana

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

ANALISIS DINAMIK SUATU MODEL SUPERINFEKSI PADA PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 22 Juli 2022



Novaldi Dwi Putra

NPM: 6161801067

ABSTRAK

Malaria merupakan salah satu dari kasus endemik yang tersebar di seluruh dunia. Malaria disebabkan oleh protozoa parasit tipe *Plasmodium* melalui gigitan nyamuk. Terdapat dua *Plasmodium* yang dibahas yaitu *Plasmodium Vivax* dan *Plasmodium Falciparum* di mana keduanya berperan dalam proses superinfeksi. Pada skripsi ini dibahas sebuah model superinfeksi pada penyebaran penyakit malaria yang melibatkan empat subpopulasi manusia dan tiga subpopulasi nyamuk. Pada model dilakukan analisis dinamik, yaitu mencari titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar, menyelidiki kondisi kestabilan titik kesetimbangan, melakukan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, dan menyelidiki adanya bifurkasi transkritikal yang terjadi. Terdapat empat titik kesetimbangan yang terdiri dari satu titik kesetimbangan bebas penyakit dan tiga titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan pertama yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil, dua titik kesetimbangan endemik melibatkan masing-masing *Plasmodium* dimana kedua titik kesetimbangan bersifat stabil, dan untuk titik kesetimbangan keempat melibatkan kedua *Plasmodium*, yang bersifat stabil untuk kondisi tertentu. Hasil analisis sensitivitas untuk bilangan reproduksi dasar menunjukkan bahwa parameter tingkat kesembuhan alami dan tingkat kematian alami nyamuk berpengaruh sangat signifikan terhadap dinamika penyebaran penyakit malaria.

Kata-kata kunci: malaria, superinfeksi, bilangan reproduksi dasar, analisis sensitivitas, bifurkasi transkritikal

ABSTRACT

Malaria is one of the endemic cases spread throughout the world. Malaria caused by protozoan parasite Plasmodium type through mosquito bites. There are two Plasmodium that are discussed, namely Plasmodium Vivax and Plasmodium Falciparum in Indonesia which both play a role in the superinfection process. In this undergraduate thesis, a model is discussed superinfection in the spread of malaria involving four human subpopulations and three mosquito subpopulations. In the model, dynamic analysis is carried out, namely looking for points equilibrium, determine the basic reproduction number, investigate the state of stability of the scales, perform a sensitivity analysis of the basic reproduction number, and investigate the presence of transcritical bifurcation occurs. There are four equilibrium points consisting of one disease-free equilibrium point and three endemic equilibrium points. The first equilibrium point is a stable disease-free equilibrium point, two equilibrium points endemic involving each Plasmodium where the two equilibrium points are stabil, and for the fourth equilibrium point involving both Plasmodium, which is stable for certain conditions. The results of the sensitivity analysis for the basic reproduction number showed that the parameters of natural cure rate and natural mortality rate of mosquitoes had a very significant effect on the dynamics of the spread of malaria.

Keywords: malaria, superinfection, basic reproductive numbers, sensitivity analysis, transcritical bifurcation

Untuk Mamah, Papah, dan Kaka tercinta

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Allah Swt. atas rida dan karunianya saya dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Adapun judul skripsi yang saya ajukan adalah “Analisis Dinamik Suatu Model Superinfeksi pada Penyebaran Penyakit Malaria”

Skripsi ini diajukan untuk memenuhi syarat kelulusan mata kuliah Skripsi di FTIS (Fakultas Teknologi Informasi dan Sains) UNPAR (Universitas Katolik Parahyangan). Tidak dapat disangkal bahwa butuh usaha yang keras dalam penyelesaian pengerjaan skripsi ini. Namun, karya ini tidak akan selesai tanpa orang-orang tercinta di sekeliling saya yang mendukung dan membantu. Terima kasih saya sampaikan kepada:

- Kedua orang tua dan kedua kaka penulis yang selalu memberikan dukungan dan semangat dari awal perkuliahan hingga penyusunan skripsi berakhir.
- Keluarga besar yang menyemangati dan mendoakan penulis selama masa perkuliahan.
- Bapak Benny Yong, Ph.D. selaku dosen wali dan dosen pembimbing yang sudah membimbing, memberikan ilmu, dan saran dari awal perkuliahan hingga proses penyusunan skripsi.
- Ibu Dr. Livia Owen selaku dosen pembimbing yang sudah membimbing, memberikan ilmu, membantu pemrograman dan saran selama proses penyusunan skripsi.
- Ibu Farah Kristiani, Ph.D. selaku penguji yang telah memberikan komentar dan saran sehingga penyusunan skripsi dapat selesai dengan baik.
- Bapak Dr. Ferry Jaya Permana selaku penguji yang telah memberikan komentar dan saran sehingga penyusunan skripsi dapat selesai dengan baik.
- Seluruh dosen FTIS yang telah memberikan ilmu, arahan, dan saran selama perkuliahan kepada penulis.
- Seluruh staf Tata Usaha FTIS yang telah memberikan bantuan administratif kepada penulis selama perkuliahan.
- Imelda Rara Rahmawati yang telah memberikan dukungan, hiburan, dan tempat untuk mencurahkan perasaan penulis.
- Alwy Bathia Ramadhan dan Orlin Monica Kencana sebagai sahabat dari awal perkuliahan yang telah memberikan dukungan, tempat bercerita dan bermain.
- Rhandy Ghetly Wirawan yang telah memberikan dukungan dan hiburan serta teman dalam proses penulisan skripsi.
- Teman-teman Segiti-gay: Adrian, Alwy, Dimas, Orlin, dan YOhanes Reinhart yang memberikan dukungan, hiburan, dan teman cerita bagi penulis.
- Teman-teman sesama anak bimbingan bapak Benny Yong, Ph.D.: Jason, Orlin, Rhandy, Velina yang telah memberikan dukungan dan hiburan.
- Teman-teman komunitas UKJK (Unit Kebudayaan Jepang dan Korea) khususnya Audy, Hasbi, Mia, Angel, Nathan, Dendy, Satria, dan Raffi yang telah memberikan dukungan dan teman bermain penulis.
- Teman-teman HappyPadoru: JPJ, jojo, Sergio, Topas, Malvin, Rhandy, dan Yohanes Reinhart yang telah memberikan dukungan dan hiburan bagi penulis.
- Divis Hubinsos (Hubungan Internal dan Sosial) HMPSMa 2019 dan 2020 yang telah memberikan ilmu dan pengalaman organisasi.
- Teman-teman Matematika angkatan 2017, 2018, 2019, dan 2020 yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan pada skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran akan sangat diterima dengan terbuka dan senang hati oleh penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menginspirasi pembaca.

Bandung, Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Malaria	3
2.2 Superinfeksi	3
2.3 Persamaan Diferensial Biasa	4
2.4 Titik Keseimbangan dan Jenis Kestabilan	5
2.5 Model $SI_1I_2 \dots I_nR$	5
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar dengan Metode Matriks Generasi	7
2.7 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	7
2.8 Bifurkasi Transkritikal	8
3 ANALISIS DINAMIK	11
3.1 Model Kompartemen Superinfeksi pada Transmisi Malaria	11
3.2 Pembentukan Model Kompartemen Superinfeksi pada Transmisi Malaria	13
3.3 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit dan Bilangan Reproduksi Dasar	15
3.4 Titik Keseimbangan Endemik <i>Single Plasmodium</i>	17
3.5 Titik Keseimbangan Endemik Bersama	20
3.6 Analisis Kondisi Bilangan Reproduksi dasar	20
3.7 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	21
3.8 Analisis Bifurkasi Transkritikal	24
3.8.1 Kasus Bilangan Reproduksi Dasar Pertama	24
3.8.2 Kasus Bilangan Reproduksi Dasar Kedua	26
4 ANALISIS SENSITIVITAS DAN BIFURKASI TRANSKRITIKAL	29
4.1 Hasil Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	29
4.2 Bifurkasi Transkritikal	32
4.2.1 Kasus Bifurkasi Transkritikal Bilangan Reproduksi Pertama (\mathcal{R}_1)	32
4.2.2 Kasus Bifurkasi Transkritikal Bilangan Reproduksi Kedua (\mathcal{R}_2)	33
5 KESIMPULAN	35
5.1 Kesimpulan	35

5.2 Saran	35
DAFTAR REFERENSI	37
A TITIK EKUILIBRIUM	39

DAFTAR GAMBAR

2.1	Superinfeksi	4
2.2	Model S-I-I-R	6
2.3	Grafik $\dot{x} = \theta x - x^2$	9
2.4	Diagram bifurkasi transkritikal dari sistem $\dot{x} = \theta x - x^2$	10
3.1	Model S-I-R-S-I	12
3.2	Kondisi bilangan reproduksi dasar	21
4.1	Simulasi numerik dengan grafik banyaknya individu dalam tiap-tiap kompartemen terhadap waktu untuk parameter γ_1 dan γ_2 dengan kenaikan nilai parameter sebesar 0%, 25%, dan 50% dengan parameter yang telah ditentukan pada Tabel 4.1	31
4.2	Simulasi numerik dengan grafik banyaknya individu dalam tiap-tiap kompartemen terhadap waktu untuk parameter μ_v dengan kenaikan nilai parameter sebesar 0%, 25%, dan 50% dengan parameter yang telah ditentukan pada 4.1	32

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Malaria merupakan kasus penyakit yang cukup terkenal dan tersebar di seluruh penjuru dunia. Menurut laporan WHO pada tahun 2018 [1], diperkirakan lebih dari 400.000 kasus kematian terjadi dari total lebih dari 200 juta kasus manusia. Sebagian besar kasus disebabkan oleh *Plasmodium Falciparum* dan *Plasmodium Vivax*. Di daerah dengan penularan malaria yang tinggi, manusia dapat terinfeksi nyamuk yang berpotensi membawa beberapa jenis *Plasmodium*, seperti *P. Vivax* dan *P. Falciparum*.

Superinfeksi merupakan proses seorang individu yang sebelumnya telah terinfeksi oleh salah satu dari varian patogen lalu terinfeksi lagi dengan patogen yang berbeda dan mengambil alih infeksi dari patogen pertama [2]. Banyak teori yang menjelaskan bagaimana superinfeksi pada malaria terjadi, mereka menyatakan bahwa superinfeksi terjadi ketika satu individu manusia menampung lebih dari satu spesies *Plasmodium*, yang mungkin terjadi dari gigitan nyamuk secara berkala atau satu gigitan nyamuk dengan beberapa *Plasmodium*. Namun demikian, superinfeksi terjadi di daerah yang memiliki endemisitas tinggi malaria, yang menunjukkan bahwa superinfeksi berasal dari gigitan nyamuk-nyamuk yang terinfeksi dengan *Plasmodium* yang berbeda.

Model matematis telah digunakan oleh banyak penulis untuk analisis dinamik suatu model penyakit, seperti pada demam berdarah [3], tuberkulosis [4], COVID-19 [5] dan masih banyak lagi. Pada skripsi ini dilakukan analisis dinamik pada model superinfeksi penyakit malaria yang bertujuan untuk mengamati dinamika penyebaran penyakit malaria dalam sebuah populasi karena adanya superinfeksi yaitu dengan menentukan titik kesetimbangan dan kestabilannya, memperoleh bilangan reproduksi dasar, menganalisis sensitivitas, serta melihat apakah terjadi bifurkasi transkritikal.

Analisis sensitivitas dilakukan untuk melihat suatu parameter, ada dan dapat berpengaruh terhadap model superinfeksi pada penyebaran penyakit malaria. Adapun pembuktian keberadaan bifurkasi transkritikal bertujuan untuk melihat pengaruh perubahan yang kecil pada suatu faktor terhadap penyebaran penyakit malaria, di mana faktor yang dimaksud berupa suatu parameter yang berkaitan dengan model superinfeksi pada penyebaran penyakit malaria.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, rumusan masalah dalam skripsi ini antara lain

1. Bagaimana model kompartemen untuk superinfeksi pada transmisi malaria?
2. Bagaimana memperoleh titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar dari model kompartemen superinfeksi pada penyebaran malaria?
3. Bagaimana cara mengetahui sebuah model superinfeksi terdapat bifurkasi transkritikal?
4. Bagaimana simulasi numerik dapat mengonfirmasi hasil-hasil analitik pada model superinfeksi penyebaran penyakit malaria?

1.3 Tujuan

Skripsi ini ditulis dengan tujuan-tujuan sebagai berikut.

1. Mengetahui dan memahami model kompartemen untuk superinfeksi pada transmisi malaria.
2. Mengetahui dan memahami titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar dari model kompartemen superinfeksi pada penyebaran malaria.
3. Menyelidiki dan mengetahui adanya bifurkasi transkritikal pada model superinfeksi pada penyakit malaria.
4. Mengetahui dan mempelajari simulasi numerik dapat mengonfirmasi hasil-hasil analitik pada model superinfeksi penyebaran penyakit malaria.

1.4 Batasan Masalah

Adapun beberapa batasan pada skripsi ini, di antaranya

1. penyebaran penyakit pada wilayah tertutup,
2. populasi konstan, dan
3. superinfeksi yang terjadi hanya melibatkan *Plasmodium Falciparum* dan *Plasmodium Vivax*.

1.5 Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan skripsi ini terdiri dari

1. Bab 1: Pendahuluan
Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, dan sistematika pembahasan.
2. Bab 2: Landasan Teori
Bab ini berisi landasan teori yang mendukung dalam pengerjaan skripsi ini.
3. Bab 3: Analisis Dinamik
Bab ini berisi pembuatan model kompartemen pada superinfeksi transmisi malaria, cara memperoleh titik-titik kesetimbangan dan kestabilannya beserta bilangan reproduksi dasar, analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, dan analisis bifurkasi transkritikal.
4. Bab 4: Simulasi Numerik
Bab ini berisi hasil numerik dan grafik untuk analisis sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar, serta terjadinya bifurkasi transkritikal.
5. Bab 5: Kesimpulan
Bab ini berisi kesimpulan dan saran pada skripsi ini.