

SKRIPSI

**KONTROL OPTIMAL MODEL KOMPARTEMEN SIPA PADA
PENYEBARAN PENYAKIT AIDS**



Pepita Tumiar Dorothy

NPM: 6161801046

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022**

FINAL PROJECT

**OPTIMAL CONTROL OF SIPA COMPARTMENT MODEL FOR
AIDS SPREADS**



Pepita Tumiar Dorothy

NPM: 6161801046

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMAL MODEL KOMPARTEMEN SIPA PADA PENYEBARAN PENYAKIT AIDS

Pepita Tumiar Dorothy

NPM: 6161801046

Bandung, 18 Agustus 2022

Menyetujui,
Pembimbing 1



Iwan Sugiarto, S.Si., M.Si.

Ketua Tim Penguji



Liem Chin, S.Si., M.Si.

Anggota Tim Penguji



Dr. Daniel Salim, M.Si.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

KONTROL OPTIMAL MODEL KOMPARTEMEN SIPA PADA PENYEBARAN PENYAKIT AIDS

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 18 Agustus 2022



Pepita Tumiar Dorothy
NPM: 6161801046

ABSTRAK

Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan salah satu virus yang menginfeksi sel-sel sistem kekebalan tubuh manusia dan melemahkan kemampuan tubuh sehingga rentan terhadap infeksi. Sementara itu, *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS) merupakan kondisi akibat infeksi virus HIV. Penyakit ini dapat menular jika individu rentan mengalami kontak dengan individu terinfeksi, seperti pertukaran cairan dalam tubuh, hubungan seksual tanpa menggunakan alat kontrasepsi, transplantasi organ, atau proses menyusui. Pada skripsi ini, akan dibahas suatu model matematis SIPA untuk penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu. Kontrol kesadaran individu dibagi menjadi dua jenis, yakni peningkatan kesadaran individu dan penurunan kesadaran individu. Peningkatan kesadaran individu dilakukan dengan cara penyuluhan kesehatan, sedangkan penurunan kesadaran individu disebabkan oleh kurangnya edukasi, informasi, dan faktor lingkungan. Dari model ini, akan dikaji titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, kestabilan dari dua titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik untuk kestabilan titik kesetimbangan. Berikutnya, nilai kontrol kesadaran individu yang optimal akan ditentukan untuk menekan penyebaran penyakit AIDS. Dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal, akan digunakan fungsi Hamilton dan Prinsip Minimum Pontryagin. Berdasarkan hasil simulasi numerik, dengan nilai kontrol optimal yang diperoleh, semakin kecil nilai bobot relatif biaya, maka terjadi penurunan pada banyaknya individu terinfeksi virus HIV yang belum sadar akan bahaya penyakit AIDS, banyaknya individu terinfeksi virus HIV tahap kronis, dan banyaknya individu menderita penyakit AIDS. Berbeda halnya dengan banyaknya individu terinfeksi virus HIV yang sadar akan bahaya penyakit AIDS yang mengalami peningkatan.

Kata-kata kunci: HIV, Model SIPA, Kesadaran Individu, Titik Kesetimbangan, Bilangan Reproduksi Dasar, Kontrol Optimal

ABSTRACT

Human Immunodeficiency Virus (HIV) is a virus that infects cells of the human immune system and weakens the body's ability to make it susceptible to infection. Individuals infected with this virus are said to be suffering from Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS). This disease can be transmitted if susceptible individuals have direct contact with infected individuals, such as through the exchange of fluids in the body, sexual intercourse without using contraception, organ transplantation, or breastfeeding. In this thesis, we will discuss a mathematical model of SIPA for the spread of AIDS with individual awareness control. Individual awareness control is divided into two types, namely increasing individual awareness and decreasing individual awareness. Increasing individual awareness is carried out through health education, while the decrease in individual awareness is caused by a lack of education, information, and environmental factors. From this model, we will study disease-free and endemic equilibrium points, stability of two equilibrium points, basic reproduction numbers, and numerical simulations for equilibrium point stability. Next, the optimal individual awareness control value will be determined to suppress the spread of AIDS. In solving the optimal control problem, the Hamilton function and Pontryagin's Minimum Principle will be used. Based on the results of numerical simulations, with the optimal control value obtained, the smaller the value of the relative weight of costs, the decrease in the number of individuals infected with HIV who are not aware of the dangers of AIDS, the number of individuals infected with the chronic stage of HIV, and the number of individuals suffering from AIDS. Unlike the case with the number of individuals infected with the HIV who are aware of the increasing danger of AIDS.

Keywords: HIV, SIPA Model, Individual Consciousness, Equilibrium Point, Basic Reproduction Number, Optimal Control

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur kepada Tuhan Yesus Kristus, atas berkat dan anugrah-Nya yang senantiasa menyelimuti penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Skripsi berjudul "Kontrol Optimal Model Kompartemen SIPA pada Penyebaran Penyakit AIDS" ditulis untuk memenuhi studi Strata-1 Program Studi Matematika di Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan. Penyusunan skripsi ini tidak akan berhasil tanpa adanya ilmu, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ini mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Papa, Mama, abang, kakak, adek, dan seluruh keluarga besar yang selalu memberikan dukungan melalui doa, nasihat, material, serta moral dari awal perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Iwan Sugiarto, S.Si., M.S selaku dosen wali dan dosen pembimbing, yang senantiasa memberikan ilmu, saran, waktu, semangat, dan arahan kapanpun hingga penulis dapat selesai tepat waktu.
3. Bapak Liem Chin, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji, yang telah memberikan masukan dan kritik membangun bagi penulis.
4. Bapak Dr. Daniel Salim, M.Si. selaku koordinator skripsi dan dosen penguji, yang telah membimbing selama proses skripsi dan memberikan masukan, serta kritik yang memmbangun bagi penulis.
5. Seluruh dosen FTIS khususnya Program Studi Matematika dan staf Tata Usaha atas segala ilmu, bantuan, dan dukungan yang diberikan selama masa perkuliahan kepada penulis.
6. Daniel Tambunan, yang telah menjadikan saya pribadi yang lebih baik, menemani, memotivasi dan mengingatkan selama proses penyelesaian skripsi ini.
7. Gezia Heptania, sebagai kakak, sahabat, sekaligus motivator dari awal perkuliahan hingga akhir waktu. Terima kasih juga atas kesan dan kenangan yang telah diberikan semasa perkuliahan.
8. Sahabat SMPK3 Penabur (Cia, Pudidi, Adit, Nio, Benedict, Junike, Beatrice, Andreas) yang selalu mendukung, menemani, memberikan keceriaan, dan kenangann.
9. Alson, Bella, Caroline, Caca, Farel, Inez, Jason, Satrio, dan Mei yang selalu membantu, menemani dan memberikan keceriaan selama masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi.
10. Teman-teman angkatan 2018 atas waktu dan kebersamaan yang telah dilalui bersama.
11. Teman-teman Matematika UNPAR angkatan 2017-2021 yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
12. Semua pihak yang membantu penulis selama perkuliahan dan proses penyusunan skripsi ini.

Penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan adanya krtik dan saran yang membangun. Semoga dengan adanya skripsi ini, penulis dapat membantu pembaca untuk menambah wawasan dan pengetahuan. Demikian skripsi ini disusun, penulis mengucapkan terima kasih.

Bandung, Agustus 2022

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|-------------|
| KATA PENGANTAR | xv |
| DAFTAR ISI | xvii |
| DAFTAR GAMBAR | xix |
| DAFTAR TABEL | xxi |
| 1 PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 2 |
| 1.3 Tujuan | 2 |
| 1.4 Batasan Masalah | 2 |
| 1.5 Sistematika Pembahasan | 2 |
| 2 LANDASAN TEORI | 5 |
| 2.1 Persamaan Diferensial | 5 |
| 2.2 Sistem Persamaan Diferensial | 5 |
| 2.3 Sistem Persamaan Diferensial Non Linear Orde Satu | 6 |
| 2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan | 6 |
| 2.5 Model SI | 7 |
| 2.6 Bilangan Reproduksi Dasar dengan Menggunakan Matriks Generasi | 8 |
| 2.7 Kontrol Optimal | 9 |
| 3 MODEL MATEMATIS PENYEBARAN PENYAKIT AIDS | 11 |
| 3.1 Model Matematis Penyebaran Penyakit AIDS dengan Kontrol Kesadaran Individu | 11 |
| 3.2 Pembentukan Model Matematis Penyebaran Penyakit AIDS dengan Kontrol Kesadaran Individu | 12 |
| 3.3 Titik Kesetimbangan Model Penyebaran Penyakit AIDS | 14 |
| 3.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit | 15 |
| 3.3.2 Bilangan Reproduksi Dasar | 15 |
| 3.3.3 Titik Kesetimbangan Endemik | 17 |
| 3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan | 19 |
| 3.4.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit | 19 |
| 3.4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik | 20 |
| 3.5 Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan | 20 |
| 3.5.1 Simulasi Model Matematis Penyebaran Penyakit AIDS saat Kondisi Bebas Penyakit | 21 |
| 3.5.2 Simulasi Model Matematis Penyebaran Penyakit AIDS saat Kondisi Endemik | 22 |
| 3.6 Simulasi Numerik untuk Model Penyebaran Penyakit AIDS dengan Berbagai Nilai Kontrol | 24 |
| 3.6.1 Simulasi Numerik untuk Berbagai Nilai u_1 | 24 |
| 3.6.2 Simulasi Numerik untuk Berbagai Nilai u_2 | 25 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | PENYELESAIAN KONTROL OPTIMAL | 27 |
| 4.1 | Simulasi Numerik Kontrol Optimal | 28 |
| 4.2 | Simulasi Numerik Kontrol Optimal dengan Berbagai Nilai Bobot Relatif Biaya . . | 30 |
| 5 | KESIMPULAN DAN SARAN | 35 |
| 5.1 | Kesimpulan | 35 |
| 5.2 | Saran | 35 |
| | DAFTAR REFERENSI | 37 |

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Diagram Kompartemen Model SI | 8 |
| 3.1 | Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit AIDS dengan Kontrol Kesadaran Individu | 12 |
| 3.2 | Hasil Simulasi Numerik dari Model saat Kondisi Bebas Penyakit | 22 |
| 3.3 | Hasil Simulasi Numerik dari Model saat Kondisi Endemik | 23 |
| 3.4 | Hasil Simulasi Numerik untuk Berbagai nilai u_1 | 24 |
| 3.5 | Hasil Simulasi Numerik untuk Berbagai Nilai u_2 | 25 |
| 4.1 | Hasil Simulasi Numerik Kontrol Optimal untuk $\varphi_1 = 7500$ dan $\varphi_2 = -1400$ | 29 |
| 4.2 | Hasil Simulasi Numerik Kontrol Optimal untuk $\varphi_1 = 7500$ dan $\varphi_2 = -1400$ | 31 |
| 4.3 | Hasil Simulasi Numerik Kontrol Optimal untuk $\varphi_1 = 18000$ dan $\varphi_2 = -700$ | 32 |
| 4.4 | Hasil Simulasi Numerik Kontrol Optimal untuk $\varphi_1 = 30000$ dan $\varphi_2 = -500$ | 33 |

DAFTAR TABEL

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Notasi Model Kompartemen Penyebaran Penyakit AIDS | 11 |
| 3.2 | Parameter Model Kompartemen Penyebaran Penyakit AIDS | 12 |
| 3.3 | Nilai Awal Model Matematis Penyebaran Penyakit AIDS | 21 |
| 3.4 | Nilai Parameter Model | 21 |
| 4.1 | Nilai Awal Kontrol Optimal | 28 |
| 4.2 | Pengaruh Berbagai Nilai Bobot Relatif Biaya pada Faktor Kontrol | 30 |

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan salah satu virus yang menginfeksi sel-sel sistem kekebalan tubuh manusia dan melemahkan kemampuan tubuh sehingga rentan terhadap infeksi. Sementara itu, *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS) merupakan kondisi akibat infeksi virus HIV. Penyakit ini termasuk salah satu penyakit menular. Sel CD4, jenis sel darah putih atau limfosit, merupakan salah satu sel dalam sistem kekebalan tubuh yang dihancurkan oleh virus HIV. Penurunan sel sistem kekebalan tubuh ini menyebabkan virus mudah masuk ke dalam tubuh.

Penularan virus HIV terjadi melalui pertukaran cairan dalam tubuh seperti ASI, darah, sperma, atau cairan vagina. Virus HIV juga dapat ditularkan melalui hubungan seksual tanpa menggunakan alat kontrasepsi, transplantasi organ, atau proses melahirkan. Manusia tidak akan tertular atau terinfeksi virus HIV jika melalui kontak fisik biasa seperti berjabat tangan, bersentuhan, berciuman, atau berbagi alat makan¹.

Manusia yang terinfeksi virus HIV tidak bisa disembuhkan. Sampai saat ini, belum ada obat dan vaksin yang ditemukan. Namun, terdapat pengobatan untuk meningkatkan banyaknya sel CD4 dalam tubuh agar tidak mengalami penurunan secara drastis dan menghambat perkembangan virus HIV menjadi penyakit AIDS, yaitu pengobatan ARV (*Anti Retroviral Therapy*)¹.

Berdasarkan laporan Kementerian Kesehatan Republik Indonesia periode Januari sampai Juni 2021, banyaknya kasus HIV/AIDS adalah 17.397 jiwa dan individu yang melakukan pengobatan ARV adalah 14.806 jiwa. Berdasarkan jenis kelaminnya, kasus HIV/AIDS paling banyak adalah laki-laki, yaitu 69%. Sebagian besar terdapat pada tingkatan umur 25-49 tahun, yaitu 70,4%. Persentase faktor risiko lain dari HIV/AIDS pada LGBT sebesar 26,2% [1].

Untuk mengendalikan penyebaran penyakit AIDS pemerintah berupaya meningkatkan kesadaran individu akan bahaya penyakit AIDS dengan cara memperluas akses untuk pemeriksaan sel CD4 dan banyaknya virus HIV dalam darah, serta meningkatkan pengobatan ARV dan kualitas pelayanan kesehatan. Pemerintah juga melakukan penyuluhan kesehatan kepada masyarakat dengan cara menyediakan edukasi, informasi, dan komunikasi². Dipihak lain, penurunan kesadaran individu diakibatkan karena kurangnya penyuluhan kesehatan dan lingkungan yang tidak mendukung (sosial dan budaya).

Pada skripsi ini, dibahas model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu [2]. Kontrol kesadaran individu dibagi menjadi dua jenis, yaitu peningkatan kesadaran individu dan penurunan kesadaran individu. Model penyebaran penyakit ini adalah model SIPA yang terdiri dari empat kelas kompartemen, yaitu *Susceptible*, *Infected*, *Pre-AIDS*, dan *AIDS*. Empat kelas kompartemen ini menunjukkan banyaknya individu rentan (*Susceptible*), banyaknya individu terinfeksi (*Infected*), banyaknya individu terinfeksi tahap kronis (*Pre-AIDS*), dan banyaknya individu menderita penyakit AIDS. Pertama-tama, dikaji titik kesetimbangan, kestabilan titik

¹Organization, W. H. (2021) Hiv/aids. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/hiv-aids>, diakses pada 10 November 2021.

²Indonesia, K. K. R. (2017) Program pengendalian hiv aids dan pims fasilitas kesehatan tingkat pertama. <https://siha.kemkes.go.id/portal/manajemen-program>, diakses pada 29 November 2021.

kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik dari model matematis tersebut. Selanjutnya, diperiksa pengaruh berbagai nilai bobot relatif biaya pada variabel kontrol agar dapat meminimumkan banyaknya individu terinfeksi.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah-masalah yang dibahas pada skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana perumusan model matematis pada penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kontrol optimal untuk model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik kontrol optimal untuk model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Menentukan model matematis pada penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu.
2. Menentukan titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kontrol optimal untuk model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu.
3. Melakukan simulasi numerik kontrol optimal untuk model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam skripsi ini:

1. Banyaknya total individu konstan.
2. Semua individu pada setiap kompartemen dapat meninggal secara alami.

1.5 Sistematika Pembahasan

Dalam skripsi ini, digunakan sistematika pembahasan yang memuat lima bab, meliputi:

1. BAB I : Pendahuluan
Bab ini membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika pembahasan.
2. BAB II : Landasan Teori
Bab ini membahas teori-teori mengenai penyebaran penyakit AIDS, seperti persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kontrol optimal.
3. BAB III : Model Matematis Penyebaran Penyakit AIDS
Bab ini membahas model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, kestabilan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik.

4. BAB IV : Penyelesaian Kontrol Optimal

Bab ini membahas simulasi numerik kontrol optimal untuk model matematis penyebaran penyakit AIDS dengan kontrol kesadaran individu dengan berbagai nilai kontrol dan berbagai nilai bobot relatif biaya.

5. BAB V : Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan dari bab sebelumnya, menjawab rumusan masalah dari skripsi ini, serta memberikan saran untuk pengembangan lebih lanjut.