

SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK SIR-SI UNTUK
PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA**



Orlin Monica Kencana

NPM: 6161801045

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022**

FINAL PROJECT

**DYNAMICAL ANALYSIS OF AN SIR-SI EPIDEMIC MODEL
FOR THE SPREAD OF MALARIA**



Orlin Monica Kencana

NPM: 6161801045

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK SIR-SI UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA

Orlin Monica Kencana

NPM: 6161801045

Bandung, 15 Juli 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1



Benny Yong, Ph.D.

Pembimbing 2



Jonathan Hoseana, Ph.D.

Ketua Tim Penguji



Farah Kristiani, Ph.D.

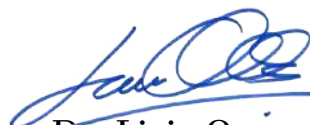
Anggota Tim Penguji



Dr. Andreas Parama Wijaya

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK SIR-SI UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 15 Juli 2022



Orlin Monica Kencana
NPM: 6161801045

ABSTRAK

Malaria adalah penyakit menular yang mengancam jiwa manusia dan disebabkan oleh parasit yang ditularkan melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi. Pada skripsi ini, akan dibentuk suatu model kompartemen untuk penyebaran penyakit malaria dengan tipe SIR-SI (*Susceptible-Infective-Recovered-Susceptible-Infective*). Model yang terbentuk ditentukan titik-titik kesetimbangannya, bilangan reproduksi dasarnya, dan kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakitnya menggunakan fungsi Lyapunov. Dipelajari pula bifurkasi mundur yang dapat terjadi pada model. Terjadinya bifurkasi mundur berarti terdapat kemungkinan bahwa penyakit tetap ada walaupun bilangan reproduksi dasar bernilai kurang dari satu. Analisis tersebut dilanjutkan dengan simulasi numerik dan analisis sensitivitas. Simulasi numerik dilakukan untuk memvisualisasikan perubahan besar subpopulasi dalam masing-masing kompartemen yang ada terhadap waktu, dalam berbagai kasus. Analisis sensitivitas dilakukan untuk menentukan parameter yang paling berpengaruh pada nilai bilangan reproduksi dasar. Ditemukan dua parameter yang demikian, yaitu rata-rata banyaknya gigitan seekor nyamuk dan tingkat kematian alami nyamuk.

Kata-kata kunci: bilangan reproduksi dasar, kestabilan global, fungsi Lyapunov, bifurkasi mundur, analisis sensitivitas

ABSTRACT

Malaria is an infectious disease that threatens human's life, and is caused by a parasite which is transmitted through bites of infected mosquitoes. In this thesis, we construct a compartmental model of type SIR-SI (*Susceptible-Infective-Recovered-Susceptible-Infective*) for the spread of malaria. We determine the model's equilibria and basic reproduction number, as well as the global stability of the model's disease-free equilibrium using a Lyapunov function. We also study a backward bifurcation which may occur in the model. The occurrence of a backward bifurcation means that there is a possibility that the disease persists even if the basic reproduction number is less than one. We continue the analysis with numerical simulations and a sensitivity analysis. The numerical simulations were carried out to visualise the time-evolution of the size of the subpopulation in each compartment, in various cases. The sensitivity analysis was conducted to determine the parameter upon which the value of the basic reproduction number depends most sensitively. Two such parameters were found, namely the average number of mosquito bites and the natural death rate of mosquitoes.

Keywords: basic reproduction number, global stability, Lyapunov function, backward bifurcation, sensitivity analysis

Untuk Papi, Mami, dan Adik tersayang.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala berkat dan penyertaan-Nya yang senantiasa membimbing dan menuntun penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan lancar dan tepat waktu. Skripsi berjudul “Analisis Dinamik Model Epidemik SIR-SI Untuk Penyebaran Penyakit Malaria” disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi Strata-1 Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembacanya.

Penulis yakin bahwa keberhasilan penulisan skripsi ini juga didukung dari berbagai pihak yang memberi banyak ilmu, bantuan, dan dukungan doa. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

- Papi, Mami, dan Adik penulis, Kevin, yang selalu memberikan dukungan, doa, dan nasihat untuk penulis.
- Bapak Benny Yong, Ph.D. selaku dosen pembimbing 1 dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. selaku dosen pembimbing 2 yang telah banyak memberikan banyak ilmu dan nasihat yang membangun. Serta dengan sabar mengoreksi penulisan skripsi penulis secara menyeluruh dan sangat terperinci.
- Ibu Farah Kristiani, Ph.D. selaku dosen penguji 1 dan Bapak Dr. Andreas Parama Wijaya selaku dosen penguji 2 yang telah memberikan kritik dan saran yang membantu penulisan skripsi ini menjadi semakin baik.
- Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen koordinator skripsi yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan sejak awal hingga akhir menjalani mata kuliah skripsi.
- Seluruh dosen FTIS khususnya dosen Program Studi Matematika dan staf Tata Usaha FTIS atas segala ilmu dan bantuannya selama masa perkuliahan berlangsung
- Devin Djappy yang dengan sabar mendengarkan keluh kesah dan memberikan dukungan serta hiburan kepada penulis.
- Teman-teman segiti-gay: Alwy, Novaldi, Yohanes Dimas, Adrian, dan Yohanes Reinhart yang senantiasa menemani dan mendengarkan keluh kesah penulis selama penulisan skripsi.
- Teman-teman uwak-uwak: Soke, Ellisa, dan Devin yang memberikan dukungan dan hiburan kepada penulis.
- Jason, Novaldi, Rhandy, dan Vellina selaku teman-teman anak bimbingan Bapak Benny Yong, Ph.D..
- Ko Felix dan Kak Nanda yang dengan sabar berbagi ilmu dan menjawab pertanyaan-pertanyaan penulis.
- Teman-teman Biro Jodoh Henrico: Henrico, Edwin, Juan, dan Afi yang mendukung dan memberi hiburan kepada penulis.
- Teman-teman Matematika dan Informatika angkatan 2017, 2018, 2019, dan 2020 yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis dengan terbuka menerima segala saran dan kritik membangun dari pembaca yang dapat membuat skripsi ini menjadi lebih baik. Akhir kata semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Bandung, Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	3
2.2 Model Epidemologi SIR	4
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar	4
2.4 Bifurkasi Transkritikal Maju dan Mundur	5
2.5 Ekspansi Kofaktor	6
2.6 Teorema Nilai Antara	7
2.7 Teorema Bifurkasi Castillo-Chavez dan Song	8
2.8 Kestabilan Asimtotik Global dan Fungsi Lyapunov	9
2.9 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	9
3 MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA	11
3.1 Pembentukan Model Penyebaran Penyakit Malaria	11
3.2 Titik Keseimbangan Model Penyebaran Penyakit Malaria	15
3.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	15
3.2.2 Titik Keseimbangan Endemik	16
3.3 Bilangan Reproduksi Dasar	17
3.4 Keberadaan Titik Keseimbangan Endemik dan Bifurkasi Mundur	18
3.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	23
3.5.1 Kestabilan Asimtotik Lokal Titik Keseimbangan	23
3.5.2 Kestabilan Global Titik Keseimbangan E_0	25
4 SIMULASI NUMERIK DAN ANALISIS SENSITIVITAS	27
4.1 Simulasi Numerik Eksistensi Titik Keseimbangan dan Bifurkasi Mundur	27
4.1.1 Simulasi Numerik Eksistensi Titik Keseimbangan	27
4.1.2 Simulasi Numerik Eksistensi Bifurkasi Mundur	28
4.1.3 Simulasi Numerik Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	29
4.2 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	30
4.2.1 Analisis Sensitivitas untuk Kondisi Bebas Penyakit	31

4.2.2 Analisis Sensitivitas untuk Kondisi Endemik	32
5 KESIMPULAN DAN SARAN	35
5.1 Kesimpulan	35
5.2 Saran	35
DAFTAR REFERENSI	37

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram Kompartemen Model Kermack dan McKendrick SIR	4
2.2	Diagram Bifurkasi Mundur Terhadap Bilangan Reproduksi Dasar \mathfrak{R}_0	6
2.3	Grafik Polinomial $p(x) = x^5 - x + 10$ terhadap x	7
3.1	Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Malaria	12
3.2	Bifurkasi Mundur Pada Model Penyebaran Penyakit Malaria	23
4.1	Perubahan Besar Subpopulasi Setiap Kompartemen dari Waktu ke Waktu	28
4.2	Perubahan Besar Subpopulasi Kompartemen Individu Terinfeksi dari Waktu ke Waktu	29
4.3	Perubahan Subpopulasi Kompartemen Individu Terinfeksi dari Waktu ke Waktu	30
4.4	Perubahan Besar Subpopulasi Manusia Terinfeksi Untuk Kenaikan Nilai Parameter r sebesar 0%, 25%, 50%, 100% Dalam Kondisi Bebas Penyakit	32
4.5	Perubahan Besar Subpopulasi Kompartemen Individu Terinfeksi Untuk Penurunan Nilai Parameter μ_v sebesar 0%, 25%, 50%, 100% Dalam Kondisi Bebas Penyakit	32
4.6	Perubahan Besar Subpopulasi Manusia Terinfeksi Untuk Kenaikan Nilai Parameter r sebesar 0%, 25%, 50%, 100% Dalam Kondisi Endemik	33
4.7	Perubahan Besar Subpopulasi Kompartemen Individu Terinfeksi Untuk Penurunan Nilai Parameter μ_v sebesar 0%, 25%, 50% Dalam Kondisi Endemik	34

DAFTAR TABEL

3.1	Variabel-variabel dalam model untuk penyebaran penyakit malaria	11
3.2	Parameter-parameter dalam model pada penyebaran penyakit malaria	12
4.1	Nilai Parameter Simulasi Numerik Eksistensi Titik Kesetimbangan	27
4.2	Nilai Parameter Simulasi Numerik Eksistensi Bifurkasi Mundur	28
4.3	Nilai Parameter Simulasi Numerik Kestabilan Titik Kesetimbangan	29
4.4	Nilai Indeks Sensitivitas untuk Kondisi Bebas Penyakit	31
4.5	Nilai Indeks Sensitivitas untuk Kondisi Endemik	33

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular telah berabad-abad menjadi tantangan utama bagi kemajuan dan kelangsungan hidup manusia. Penelitian menunjukkan bahwa penyakit menular merupakan salah satu penyebab utama kematian dan disabilitas di seluruh dunia [1]. Penularan penyakit terjadi sebagai akibat dari interaksi antara mikroorganisme, manusia, dan lingkungan. Secara umum, dalam suatu populasi manusia yang awalnya sehat, ada dua faktor utama yang menyebabkan penyebaran suatu penyakit, yaitu masuknya suatu agen penular penyakit ke dalam populasi tersebut, dan mudahnya terjadi kontak langsung antarindividu dalam populasi tersebut [2]. Penyebaran penyakit dapat terjadi dengan cepat jika individu-individu dalam populasi tersebut memiliki kekebalan tubuh yang rendah.

Malaria adalah salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh parasit protozoa dari genus *Plasmodium*. Penyebaran penyakit malaria terjadi melalui gigitan nyamuk betina *Anopheles* yang telah terinfeksi; nyamuk tersebut menggigit terutama di waktu antara senja dan fajar. Nyamuk *Anopheles* pada umumnya berkembang biak pada genangan air. Oleh karena itu, penularan penyakit malaria dipengaruhi oleh kondisi-kondisi cuaca seperti curah hujan, suhu, dan kelembapan, yang menentukan kelangsungan hidup nyamuk [3].

Secara global, diperkirakan terdapat 241 juta kasus malaria dan 627.000 kematian akibat malaria pada tahun 2020 (meningkat dari tahun 2019, dengan peningkatan terbesar berasal dari negara-negara wilayah Afrika) [4]. Malaria dapat menyerang siapa pun, namun yang terutama adalah anak-anak, ibu-ibu hamil, wisatawan-wisatawan dari daerah non-endemik, dan imigran-imigran. Bahkan, walaupun sangat jarang terjadi, malaria dapat menular dari seorang ibu hamil ke janin yang dikandungnya, jika terdapat ketidaksehatan pada plasenta yang memungkinkan parasit untuk masuk dan menginfeksi janin; malaria yang seperti ini disebut malaria kongenital [5].

Dalam skripsi ini, penyebaran penyakit malaria akan dideskripsikan dengan suatu model matematis tipe SIR-SI [6]. Model ini membagi populasi manusia menjadi tiga subpopulasi, yaitu *susceptible* (S), *infective* (I), dan *recovered* (R), serta populasi nyamuk menjadi dua subpopulasi, yaitu *susceptible* (S) dan *infective* (I). Dari model ini dapat diperoleh bilangan reproduksi dasar, yaitu rata-rata banyaknya infeksi sekunder yang akan terjadi dalam suatu populasi yang semua individunya rentan jika salah satu individunya terinfeksi. Pada umumnya, nilai bilangan reproduksi dasar yang lebih dari satu menandakan bahwa penyakit mewabah, sedangkan nilai bilangan reproduksi dasar yang kurang dari satu menandakan bahwa penyakit lama-kelamaan akan hilang. Namun, dalam model ini, bisa terjadi bahwa nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu tetapi penyakit tetap mewabah. Hal ini terjadi jika model tersebut mengalami bifurkasi mundur. Kondisi-kondisi di mana bifurkasi mundur terjadi akan dipelajari dalam skripsi ini [7], sehingga dapat diperoleh informasi tentang strategi penanganan penyakit yang tepat. Penanganan penyakit juga dapat dilakukan dengan menurunkan atau meningkatkan parameter yang paling signifikan, yang akan ditentukan dalam skripsi ini melalui analisis sensitivitas.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut adalah masalah-masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini.

1. Bagaimana pembentukan suatu model matematis tipe SIR-SI untuk penyebaran penyakit malaria?
2. Bagaimana keberadaan dan kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model tersebut bergantung pada parameter-parameternya?
3. Bagaimana bifurkasi mundur terjadi pada model tersebut?
4. Parameter-parameter apa saja yang paling berpengaruh secara eksplisit untuk penyebaran penyakit malaria?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. membentuk suatu model matematis tipe SIR-SI untuk penyebaran penyakit malaria,
2. menentukan dan menganalisis kestabilan titik-titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model tersebut,
3. mendeskripsikan bifurkasi mundur yang terjadi pada model tersebut,
4. menentukan parameter-parameter yang paling berpengaruh secara eksplisit untuk penyebaran penyakit malaria.

1.4 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari lima bab berikut.

BAB 1: PENDAHULUAN

Bab 1 membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika pembahasan.

BAB 2: LANDASAN TEORI

Bab 2 membahas teori-teori yang mendukung penulisan skripsi ini, yaitu sistem persamaan diferensial, model epidemi SIR, titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, bifurkasi mundur, ekspansi kofaktor, teorema nilai antara, teorema bifurkasi Castillo-Chavez dan Song, kestabilan global fungsi Lyapunov, dan analisis sensitivitas.

BAB 3: METODE PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA

Bab 3 membahas pembentukan model, titik-titik kesetimbangan dari model tersebut, bilangan reproduksi dasar dari model tersebut, bifurkasi mundur yang terjadi pada model tersebut, dan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan tersebut.

BAB 4: SIMULASI NUMERIK

Bab 4 membahas simulasi numerik dan analisis sensitivitas.

BAB 5: PENUTUP

Bab 5 membahas kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.