

SKRIPSI

STRUKTUR JORDAN PERTURBASI MATRIKS



Topas Sagara

NPM: 6161801042

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022

FINAL PROJECT

JORDAN STRUCTURE OF MATRIX PERTURBATION



Topas Sagara

NPM: 6161801042

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

STRUKTUR JORDAN PERTURBASI MATRIKS

Topas Sagara

NPM: 6161801042

Bandung, 12 Agustus 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1



Prof. M. Wono Setya Budhi

Pembimbing 2



Dr. Daniel Salim

Ketua Tim Penguji



Taufik Limansyah, M.T.

Anggota Tim Penguji



Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

STRUKTUR JORDAN PERTURBASI MATRIKS

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 12 Agustus 2022



Topas Sagara
NPM: 6161801042

ABSTRAK

Matriks merupakan salah satu objek matematis yang paling sering ditemui dalam berbagai bidang keilmuan yang melibatkan matematika. Khususnya ketika pembahasan terkait melibatkan suatu sistem persamaan, baik sistem persamaan linear, sistem persamaan integral, maupun sistem persamaan diferensial. Dalam penyelesaian suatu sistem persamaan, umumnya dilakukan diagonalisasi. Akan tetapi, dalam kasus matriks tidak dapat didiagonalkan, dapat digunakan bentuk normal Jordan. Adapun dalam numerik, matriks tidak dapat disimpan secara eksak. Dalam hal ini, matriks yang disimpan secara numerik dapat dipandang sebagai perturbasi matriks dan sensitivitas struktur Jordan terhadap perturbasi perlu dipertimbangkan. Atau dengan kata lain, perlu diperiksa kestabilan struktur Jordan. Pada skripsi ini, digunakan pendekatan Analisis Kompleks dalam mengenalkan bentuk normal Jordan, yaitu dengan menggunakan *resolvent*. Lalu, dilakukan analisis perturbasi guna mengetahui kestabilan dan sensitivitas dari struktur Jordan suatu matriks.

Kata-kata kunci: Matriks, *Resolvent*, Struktur Jordan, Bentuk normal Jordan, Perturbasi matriks, Nilai eigen

ABSTRACT

Matrix is one of the most common mathematical objects in various scientific fields involving mathematics. Especially if the discussion concerns systems of equations, such as systems of linear equations, systems of integral equations, and systems of differential equations. In solving systems of equations, normally we diagonalize the matrix. However, in case the matrix is not diagonalizable, we can use Jordan normal form instead. In numeric, we cannot store a matrix in its exact form. In this case, we can view the numerically saved matrix as a matrix perturbation and sensitivity of the Jordan structure must be considered. Particularly, we need to check the stability of the Jordan structure. In this undergraduate thesis, Complex Analysis approach is used to introduce Jordan normal form, by using resolvent. Then, we use perturbation analysis to check the stability and sensitivity of Jordan structure of a matrix.

Keywords: Matrix, Resolvent, Jordan structure, Jordan normal Form, Matrix perturbation, Eigenvalue

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Adapun skripsi yang berjudul “Struktur Jordan Perturbasi Matriks” ini disusun untuk memenuhi syarat menyelesaikan studi sarjana di Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung.

Keberhasilan penulis dalam penyelesaian penyusunan skripsi ini disebabkan oleh adanya dukungan atau bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

- Keluarga, terutama kedua orang tua dan kakak, yang selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis.
- Bapak Prof. M. Wono Setya Budhi dan Dr. Daniel Salim selaku dosen pembimbing yang dengan penuh kesabaran memberikan ilmu dan saran kepada penulis .
- Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen koordinator skripsi yang telah memberikan arahan dan informasi dengan baik.
- Bapak Taufik Limansyah, M.T. dan Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran agar skripsi ini menjadi lebih baik.
- Seluruh dosen Fakultas Teknologi Informasi dan Sains (FTIS) yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama masa perkuliahan.
- Seluruh Staf FTIS yang telah memberikan informasi, arahan, dan bantuan administratif selama masa perkuliahan.
- Kucing-kucing penulis, yaitu Corry, Belang, Keling, Kitty, dan Shifu, serta anjing penulis Lora yang telah menghibur penulis di kala merasa lelah.
- Rekan-rekan HappyPadoru: Rhandy Ghetly Wirawan, Steven Sergio, Christopher Malvin Hidayat, Novaldi Dwi Putra, Ambrosius Adrian, Jonathan Prasetyo Johan (JPJ), Jonathan Dinbara (Jojo), dan Yohanes Reinhart yang telah berbagi informasi dan hiburan kepada penulis selama masa perkuliahan.
- Rekan-rekan meatology: Adrian, Malvin, Jojo, JPJ, dan Sergio yang telah mengajak penulis berwisata kuliner selama masa perkuliahan.
- Semua orang yang telah memberikan bantuan, doa, atau dukungan kepada penulis selama masa penyusunan skripsi yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam skripsi ini. Oleh karena itu, penulis menerima secara terbuka saran dan kritik guna menyempurnakan skripsi ini. Namun demikian, penulis berharap skripsi ini dapat memberi manfaat dan inspirasi bagi pembaca.

Bandung, Agustus 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan Penulisan	2
1.4 Sistematika Penulisan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Fungsi Bernilai Matriks	3
2.2 <i>Resolvent</i> dari Matriks	4
2.2.1 Sifat-sifat Dasar <i>Resolvent</i>	5
2.2.2 Keanalitikan <i>Resolvent</i>	6
2.2.3 Singularitas <i>Resolvent</i>	8
2.3 Ekspansi Laurent di Satu Nilai Eigen	9
3 DEKOMPOSISI JORDAN PERTURBASI MATRIKS	17
3.1 Dekomposisi Jordan	17
3.2 Perturbasi Matriks	20
3.3 <i>Resolvent</i> Perturbasi Matriks	21
4 STRUKTUR JORDAN PERTURBASI MATRIKS	25
5 KESIMPULAN DAN SARAN	31
5.1 Kesimpulan	31
5.2 Saran	31
DAFTAR REFERENSI	33

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks merupakan salah satu objek matematis yang paling sering ditemui dalam berbagai bidang keilmuan yang melibatkan matematika. Khususnya ketika pembahasan terkait melibatkan suatu sistem persamaan, baik sistem persamaan linear, sistem persamaan integral, maupun sistem persamaan diferensial. Dalam hal menyelesaikan sistem persamaan tersebut, umumnya dilakukan diagonalisasi. Akan tetapi, diagonalisasi tidak selalu berhasil, yaitu dalam kasus matriks tidak memiliki banyak vektor eigen saling bebas yang cukup. Dalam hal ini, dapat digunakan cara lain, yaitu dengan bentuk normal Jordan. Bentuk normal Jordan mengatasi masalah banyak vektor eigen saling bebas dengan konsep vektor eigen diperumum.

Dalam skripsi ini, digunakan pendekatan Analisis Kompleks dalam memperkenalkan dekomposisi Jordan dan bentuk normal Jordan. Pendekatan ini telah dibahas dalam [1, 2] di mana prosesnya dilakukan melalui suatu fungsi bernilai matriks yang disebut *resolvent*. Adapun dalam skripsi ini digunakan juga sifat-sifat fungsi rasional dalam membantu penurunan karena entri-entri dari *resolvent* suatu matriks adalah fungsi rasional.

Dari suatu matriks, dapat dibuat suatu matriks lain dengan cara mengganggu matriks tersebut dengan matriks lain yang entri-entrinya kecil. Adapun dari matriks baru tersebut dapat dilakukan analisis perubahan nilai eigen dan *resolvent*. Permasalahan tersebut dikenal dengan “perturbasi matriks”. Pada dasarnya, permasalahan tersebut ekuivalen dengan mencari solusi aproksimasi untuk suatu matriks yang sedikit berbeda dengan suatu matriks lain yang lebih sederhana. Contoh penerapan perturbasi matriks adalah analisis untuk analisis numerik matriks [1, hlm. 62]. Dalam numerik, matriks tidak dapat disimpan secara eksak. Matriks yang disimpan secara numerik tersebut dapat dipandang sebagai perturbasi matriks. Dalam hal ini, timbul pertanyaan mengenai bentuk normal Jordan, seperti “apakah struktur Jordan matriks awal tidak berubah apabila angkanya diganti?”. Pertanyaan tersebut sama artinya dengan memeriksa kestabilan struktur Jordan. Adapun yang dilakukan adalah mencari struktur Jordan dari suatu perturbasi matriks dan membandingkannya dengan struktur Jordan matriks awal.

Dalam skripsi ini, akan dibahas terlebih dahulu teori-teori dasar yang digunakan, yaitu fungsi bernilai matriks dan *resolvent* dari matriks. Setelah itu, dibahas mengenai penurunan dekomposisi Jordan menggunakan *resolvent*. Setelah menurunkan dekomposisi Jordan, dibahas konsep dasar perturbasi pada matriks, kemudian diterapkan *resolvent* pada perturbasi matriks untuk memperoleh dekomposisi Jordan dari perturbasi matriks. Untuk menutup pembahasan pada skripsi ini, akan dibahas mengenai struktur Jordan perturbasi matriks, meliputi kestabilan dan sensitivitas dari struktur Jordan.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut beberapa masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Apa itu perturbasi matriks dan *resolvent* dari perturbasi matriks?

2. Bagaimana pengaruh perturbasi terhadap nilai eigen, dekomposisi Jordan, dan struktur Jordan dari matriks?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. mempelajari dasar-dasar perturbasi matriks dan *resolvent* matriks,
2. mengetahui pengaruh perturbasi terhadap nilai eigen, dekomposisi Jordan, dan struktur Jordan dari matriks.

1.4 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari 4 bab, yang masing-masing akan membahas:

Bab 1: Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab 2: Landasan teori

Bab ini berisikan teori dasar yang digunakan, yaitu fungsi bernilai matriks dan *resolvent* dari matriks.

Bab 3: Dekomposisi Jordan Perturbasi Matriks

Bab ini berisikan penurunan dekomposisi Jordan, konsep dasar perturbasi matriks, dan *resolvent* dari perturbasi matriks.

Bab 4: Struktur Jordan Perturbasi Matriks

Bab ini berisikan penyelesaian salah satu masalah dalam perturbasi matriks, yaitu perturbasi struktur Jordan matriks.

Bab 5: Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisikan kesimpulan hasil pembahasan dan saran untuk penulis selanjutnya yang akan melanjutkan pembahasan topik ini.