

SKRIPSI

**KONTROL OPTIMAL PADA SEBUAH MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN VAKSINASI DAN PENGOBATAN**



Farel Herianto

NPM: 6161801039

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022**

FINAL PROJECT

**OPTIMAL CONTROL OF VACCINATION AND TREATMENT
FOR AN SIR EPIDEMIC MODEL**



Farel Herianto

NPM: 6161801039

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMAL PADA SEBUAH MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN VAKSINASI DAN PENGOBATAN

Farel Herianto

NPM: 6161801039

Bandung, 18 Agustus 2022

Menyetujui,

Pembimbing



Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Tim Penguji



Dr. Livia Owen

Anggota Tim Penguji



Benny Yong, Ph.D.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

KONTROL OPTIMAL PADA SEBUAH MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN VAKSINASI DAN PENGOBATAN

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 18 Agustus 2022



Farel Herianto
NPM: 6161801039

ABSTRAK

Penyakit adalah keadaan organ atau bagian tubuh tertentu yang terserang oleh virus, bakteri, dan racun. Dengan adanya penyakit maka dibutuhkan pengobatan karena mempercepat penyembuhan. Selain pengobatan ada juga cara lain agar tubuh dapat meningkatkan perlawanan terhadap beberapa penyakit khusus yaitu dengan vaksinasi. Dalam skripsi ini akan dibahas model matematis *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR) dengan kontrol pengobatan dan vaksinasi. Dari model akan ditentukan titik kesetimbangan bebas penyakit maupun endemik dan bilangan reproduksi dasar, serta kestabilan titik kesetimbangan. Simulasi numerik dilakukan pada model penyebaran penyakit dengan faktor kontrol pengobatan dan vaksinasi, juga tanpa faktor kontrol. Hasil simulasi numerik dengan faktor kontrol menunjukkan bahwa proporsi subpopulasi individu yang terinfeksi mengalami penurunan. Prinsip Minimum Pontryagin digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan terlebih dahulu membentuk fungsi Hamiltonnya, disertai dengan simulasi numeriknya. Hasil simulasi menunjukkan bahwa bobot biaya yang relatif lebih rendah dan dengan kontrol optimal yang diperoleh, dapat menekan proporsi subpopulasi individu yang terinfeksi.

Kata-kata kunci: Kontrol Optimal, Fungsi Hamilton, Prinsip Minimum Pontryagin, Model SIR, Kontrol Pengobatan, Kontrol Vaksinasi

ABSTRACT

A disease is a state where body organs or body parts are infected by viruses, bacteria, and poisons. Treatment is needed to accelerate the time needed on recovery. Furthermore, vaccination is also needed to prevent a certain type of disease from spreading further. The *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR) mathematical model with treatment and vaccination control is discussed in this research. The disease-free equilibrium point, endemic equilibrium point, basic reproduction number, and stability of equilibrium point will be determined from the model. Numerical simulation of the model is conducted with treatment and vaccination as control factors, and without control factors. The numerical simulation of the model with control factors shows that the proportion of the infected subpopulation is decreasing. The Hamiltonian function and Pontryagin's minimum principal is used to solve the optimum control problem. The numerical results show that a decrease in the cost relative weight with optimum control substantially decreases the proportion of the infected subpopulation.

Keywords: Optimum Control, Hamilton function, Pontryagin Minimum Principal, Model SIR, Treatment Control, Vaccination Control

KATA PENGANTAR

Puji syukur sebesar-besarnya kepada Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia-Nya yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk menyelesaikan studi Strata-I di Universitas Katolik Parahyangan, Program Studi Matematika. Penulis berharap skripsi ini dapat berguna bagi para pembacanya.

Penulis menyadari dalam menyusun skripsi ini banyak mendapat dukungan dan bimbingan dari berbagai pihak sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Dengan ketulusan hati, penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih kepada:

- Kedua orangtua penulis yang selalu memberi semangat, serta membiayai pendidikan penulis.
- Bapak Iwan Sugiarto, selaku Dosen Pembimbing dan Dosen Wali yang selalu mengingatkan penulis untuk terus semangat, memberikan saran dan arahan.
- Ibu Livia Owen dan Bapak Benny Yong, selaku Dosen Penguji Skripsi yang telah memberi masukan.
- Bapak dan Ibu dosen Program Studi Matematika yang telah mengajar dan masukan kepada penulis selama meniti pendidikan di Universitas Katolik Parahyangan.
- Jason yang telah menjadi teman untuk bertukar pikiran.
- Satrio, Jovan, dan Jevil yang telah membantu penulis dalam belajar.
- Asen yang telah membantu penulis beradaptasi di lingkungan baru.
- Teman-teman Matematika 2018 yang telah berjuang bersama.
- Teman-teman yang telah mendukung dan menyemangati penulis.

Bandung, Agustus 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	3
2.3 Titik Keseimbangan dan Kestabilannya	4
2.4 Model SIR	5
2.5 Bilangan Reproduksi Dasar	6
2.6 Analisis Sensitivitas	6
2.7 Kontrol Optimal dengan Maksimum Minimum Pontryagin	7
3 MODEL MATEMATIS PENYEBARAN PENYAKIT DENGAN PENGobatan dan VAKSINASI	11
3.1 Model Matematika	11
3.2 Titik Keseimbangan	13
3.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	14
3.2.2 Bilangan Reproduksi Dasar	14
3.2.3 Titik Keseimbangan Endemik	15
3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan	15
3.3.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	15
3.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik	16
3.4 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	16
3.5 Kontrol Optimal dengan Pengobatan dan Vaksinasi	17
4 SIMULASI NUMERIK	19
4.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	19
4.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik	20
4.3 Simulasi Numerik untuk berbagai Kontrol Pengobatan dan Vaksinasi	22
4.4 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar	23
4.5 Simulasi Numerik Kontrol Optimal	24
4.5.1 Simulasi Numerik dengan Satu Kontrol untuk Beragam Bobot Relatif Biaya	24
4.5.2 Simulasi Numerik dengan Dua Kontrol untuk Beragam Bobot Relatif Biaya	26

5 PENUTUP	29
5.1 Kesimpulan	29
5.2 Saran	29
DAFTAR REFERENSI	31

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram kompartemen model SIR	5
3.1	Diagram kompartemen model SIR dengan pengobatan dan vaksinasi	11
4.1	Grafik Proporsi Banyaknya Individu pada Subpopulasi Rentan untuk $\mathfrak{R}_0 = 0,225$.	20
4.2	Grafik Proporsi Banyaknya Individu pada Subpopulasi Terinfeksi untuk $\mathfrak{R}_0 = 0,225$	20
4.3	Grafik Proporsi Banyaknya Individu pada Subpopulasi Rentan untuk $\mathfrak{R}_0 = 2,5$. .	21
4.4	Grafik Proporsi Banyaknya Individu pada Subpopulasi Terinfeksi untuk $\mathfrak{R}_0 = 2,5$.	22
4.5	Grafik Proporsi Banyaknya Individu pada Subpopulasi Terinfeksi untuk Berbagai Nilai u_1	22
4.6	Grafik Proporsi Banyaknya Individu pada Subpopulasi Terinfeksi untuk Berbagai Nilai u_2	23
4.7	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_2 = 100$	25
4.8	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_2 = 500$	25
4.9	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_2 = 1000$	25
4.10	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_1 = 100$ dan $C_2 = 100$	27
4.11	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_1 = 100$ dan $C_2 = 500$	27
4.12	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_1 = 500$ dan $C_2 = 100$	28
4.13	Nilai Faktor Kontrol dengan Bobot Relatif Biaya $C_1 = 500$ dan $C_2 = 500$	28

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit adalah keadaan organ atau bagian tubuh tertentu yang terserang oleh virus, bakteri, dan racun¹. Penyakit terbagi menjadi dua yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Cara penularan penyakit terbagi menjadi dua yaitu penularan secara langsung dan tidak langsung. Penularan secara langsung biasanya terjadi jika terjadi kontak fisik sedangkan penularan secara tidak langsung melewati perantara seperti udara, air, ataupun binatang.

Penyakit menular disebabkan oleh agen biologi seperti mikroorganisme (virus, bakteri, dan jamur) serta parasit dan lingkungan [1, hlm. 43]. Malaria adalah salah satu penyakit menular yang melewati inang lain terlebih dahulu². Parasit dapat berpindah ke tubuh manusia setelah terkena gigitan nyamuk yang lebih dahulu terinfeksi parasit tersebut. Flu adalah infeksi virus influenza pada saluran pernapasan³. Virus influenza merupakan salah satu penyakit yang menular secara langsung ataupun tidak langsung. Selain virus influenza ada juga virus yang menyerang saluran pernapasan dan saat ini virus tersebut sedang menggemparkan satu dunia karena menyebabkan kematian, yaitu COVID-19. *Coronavirus* menyerang sistem pernapasan dan menyebar melalui udara⁴. *Coronavirus* juga bukan hanya menyerang manusia tetapi menyerang binatang. Individu yang sudah pulih atau sembuh dari penyakit COVID-19 dapat terinfeksi kembali. Pada umumnya penyakit dapat disembuhkan melalui proses pengobatan. Pengobatan biasa dilakukan oleh dokter dengan mendiagnosa penyakitnya terlebih dahulu. Beberapa penyakit juga dapat dicegah dengan vaksinasi. Vaksinasi adalah proses pemasukan vaksin kedalam tubuh agar tubuh dapat imunitas terhadap penyakit dengan menstimulasi sistem imun⁵.

Model matematis penyebaran penyakit banyak dipakai untuk analisa penyebaran penyakit dan keberhasilannya dalam intervensi kesehatan [2]. Pada skripsi ini akan dibahas dua model matematis penyebaran penyakit menular menggunakan model epidemi *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR). Model pertama dibangun dengan menambahkan kontrol pengobatan dan model kedua dibangun dengan menambahkan dua kontrol, yaitu kontrol pengobatan dan kontrol vaksinasi. Model epidemi SIR membagi populasi menjadi 3 kelas yaitu kelas *Susceptible* (jumlah individu rentan), kelas *Infected* (jumlah individu terinfeksi), dan kelas *Recovered* (jumlah individu sembuh). Pertama-tama, akan dicari titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan titik kesetimbangan, dan kontrol optimal untuk masing-masing model. Berikutnya, akan dilengkapi simulasi numerik untuk

¹alodokter, dr. Pittara. (2021) Penyakit Infeksi. <https://www.alodokter.com/penyakit-infeksi>, diakses pada 11 Agustus 2022

²kompas health, Afifah,M.N. (2021) 5 Penyebab Penyakit Malaria dan Penularannya. <https://health.kompas.com/read/2021/04/28/080100768/5-penyebab-penyakit-malaria-dan-penularannya?page=all>, diakses pada 11 Agustus 2022

³biofarma. (2021) Apa itu Influenza? <https://www.biofarma.co.id/id/berita-terbaru/detail/apa-itu-influenza: :text=Influenza>, diakses pada 8 Agustus 2022

⁴Kemntrian Kesehatan Republik Indonesia. (2020) Pertanyaan dan Jawaban Terkait COVID-19. <https://www.kemkes.go.id/article/view/20031600011/pertanyaan-dan-jawaban-terkait-covid-19.html>, diakses pada 11 Agustus 2022

⁵rumah sakit pelabuhan. PERBEDAAN VAKSIN, VAKSINASI, IMUN DAN IMUNITAS. <https://rspelabuhan.com/id/info/info-sehat/318-perbedaan-vaksin-vaksinasi-imun-dan-imunitas>

kestabilan titik kesetimbangan sistem dan simulasi kontrol optimal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah :

1. Bagaimana pembentukan model matematis dari model epidemi SIR dengan pengobatan dan vaksinasi?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, dan bilangan reproduksi dasar dari model?
3. Bagaimana analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar?
4. Bagaimana kontrol optimal dan hasil simulasi numerik kontrol optimal untuk model?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Membentuk model matematis dari model epidemi SIR dengan pengobatan dan vaksinasi.
2. Menentukan titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, dan bilangan reproduksi dasar dari model.
3. Menentukan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar.
4. Menentukan kontrol optimal dan melakukan simulasi numeriknya untuk model.

1.4 Sistematika Pembahasan

Pada skripsi ini terdiri dari lima bab yang akan dibahas, berikut adalah sistematikanya :

- **Bab 1 : Pendahuluan**

Pada bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika pembahasan.

- **Bab 2 : Landasan Teori**

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori-teori yang mendukung pengerjaan skripsi ini, seperti persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, kestabilan titik kesetimbangan, model SIR, bilangan reproduksi dasar, analisis sensitivitas, dan kontrol optimal dengan maksimum minimum pontryagin.

- **Bab 3 : Model Matematis Penyebaran Penyakit dengan Pengobatan dan Vaksinasi**

Pada bab ini akan dibahas mengenai pembentukan model epidemi SIR dengan kontrol pengobatan dan vaksinasi, menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, kestabilan titik kesetimbangan, analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, dan kontrol optimal dari model.

- **Bab 4 : Simulasi Numerik**

Pada bab ini akan dibahas mengenai simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan, analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik kontrol optimal.

- **Bab 5 : Kesimpulan dan Saran**

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan model dan saran untuk pengembangan lebih lanjut.