SKRIPSI

PERBANDINGAN ANTARA METODE SPEKTRAL DAN BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN GELOMBANG KORTEWEG-DE VRIES (KDV) YANG DILINEARKAN

Christopher Malvin Hidayat

NPM: 6161801025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

2022

FINAL PROJECT

COMPARISON BETWEEN SPECTRAL AND FINITE DIFFERENCE METHODS FOR LINEARIZED KORTEWEG-DE VRIES WAVE EQUATION (KDV)

Christopher Malvin Hidayat

NPM: 6161801025

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022

LEMBAR PENGESAHAN

PERBANDINGAN ANTARA METODE SPEKTRAL DAN BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN GELOMBANG KORTEWEG-DE VRIES (KDV) YANG DILINEARKAN

Christopher Malvin Hidayat

NPM: 6161801025

Bandung, 16 Agustus 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1	**Pembimbing 2**
Prof. M. Wono Setya Budhi	**Dr. Daniel Salim**

Ketua Tim Penguji	**Anggota Tim Penguji**
Benny Yong, Ph.D.	**Jonathan Hoseana, Ph.D.**

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

PERBANDINGAN ANTARA METODE SPEKTRAL DAN BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN GELOMBANG KORTEWEG-DE VRIES (KDV) YANG DILINEARKAN

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 16 Agustus 2022

Christopher Malvin Hidayat
NPM: 6161801025

ABSTRAK

Metode numerik merupakan teknik untuk menyelesaikan permasalahan dalam matematika dengan cara operasi penghitungan secara berulang. Metode numerik memiliki kelebihan yaitu dapat menyelesaikan persamaan-persamaan yang rumit dan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Namun, metode numerik juga memiliki kelemahan yaitu solusi yang didapat merupakan solusi yang hanya mendekati solusi analitik, di mana selisih antara solusi numerik dan solusi analitik disebut dengan galat, dan rata-rata dari galat tersebut disebut *Root Mean Square Error* (RMSE). Secara umum, terdapat tiga jenis metode numerik yaitu metode beda hingga, metode elemen hingga, dan metode spektral. Skripsi ini membahas bagian dari metode spektral Chebyshev yaitu matriks penurunan Chebyshev, membahas cara mendapatkan entri-entri dari matriks Chebyshev serta cara penggunaan matriks penurunan Chebyshev pada contoh sederhana, dan menggunakan matriks penurunan Chebyshev untuk menyelesaikan persamaan gelombang Korteweg-de Vries yang sudah dilinearkan dan mencari RMSE. Untuk melihat seberapa bagus akurasi dari metode matriks penurunan Chebyshev, penulis juga akan menggunakan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan gelombang Korteweg-de Vries yang dilinearkan dan membandingkan RMSE dengan metode matriks penurunan Chebyshev. Selain itu, penulis juga menggunakan metode Euler dan Runge-Kutta orde empat untuk diskretisasi waktu pada persamaan gelombang Korteweg-de Vries yang dilinearkan. Dengan bantuan perangkat lunak MATLAB, diperoleh bahwa metode spektral matriks penurunan Chebyshev dengan diskretisasi waktu metode Euler adalah metode terbaik untuk menyelesaikan persamaan gelombang Korteweg-de Vries yang dilinearkan.

Kata-kata kunci: metode numerik, metode beda hingga, metode spektral, matriks penurunan Chebyshev, *Root Mean Square Error* (RMSE), persamaan gelombang Korteweg-de Vries, metode Euler, metode Runge-Kutta orde empat.

ABSTRACT

Numerical methods are techniques to solve mathematical problems by means of repeated computational operations. Numerical methods have the advantage of being able to solve complex equations that cannot be solved analytically. However, numerical methods also have a weakness, namely the solution obtained is a solution that only approximates the analytical solution, where the difference between the numerical solution and the analytical solution is called the error, and the average of the errors is called the Root Mean Square Error (RMSE). In general, there are three types of numerical methods, namely finite difference methods, finite element methods, and spectral methods. This thesis discusses how to obtain the entries of the Chebyshev matrix and how to apply the Chebyshev derivative matrix to a simple example, and uses the Chebyshev derivative matrix to solve the linearized Korteweg-de Vries wave equation and find the RMSE. To see how good the accuracy of the Chebyshev derivative matrix method is, the author will also use the finite difference method to solve the linearized Korteweg-de Vries wave equation and compare the RMSE with the Chebyshev derivative matrix method. In addition, the author also uses the Euler and fourth-order Runge-Kutta methods for time discretization on the linearized Korteweg-de Vries equation. With the help of MATLAB software, the author finds that the spectral method of the Chebyshev derivative matrix with the time discretization of the Euler method is the best method to solve the linearized Korteweg-de Vries wave equation.

Keywords: Numerical methods, finite difference method, spectral method, Chebyshev derivative Matrix, Root Mean Square Error (RMSE), Korteweg-de Vries wave equation, Euler methods, fourth-order Runge-Kutta methods.

Untuk Tuhan, Mami, Koko, dan Ocel

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas berkat karunia-NYA sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan lancar dan tepat waktu. Skripsi ini berjudul **'Perbandingan Antara Metode Spektral dan Beda Hingga pada Persamaan Gelombang Korteweg-de Vries (KdV) yang Dilinearkan'** disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Strata-1 Program Studi Matematika di Universitas Katolik Parahyangan. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi para pembaca.

Selama masa studi dan penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan dukungan, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Mami, koko, dan Ocel yang selalu memberikan doa, dukungan, dan semangat sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan baik dan tepat waktu.
2. Bapak Prof. M. Wono Setya Budhi, Ph.D. dan Dr. Daniel Salim, M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah membimbing penulis dengan penuh kesabaran, memberikan saran, serta meluangkan waktunya agar penulis dapat menyusun skripsi ini dengan baik.
3. Bapak Benny Yong, S.Si., M.Si., Ph.D. dan Jonathan Hoseana, S.Si., M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan arahan sehingga skripsi ini menjadi lebih baik.
4. Seluruh dosen dan staf Tata Usaha FTIS terutama dosen Program Studi Matematika. Terima kasih atas ilmu dan bimbingan selama masa perkuliahan penulis, serta bantuan administrasi sehingga mempermudah penulis untuk memenuhi persyaratan sidang skripsi.
5. Topas sebagai teman bimbingan bersama yang membantu dan memberikan dukungan kepada penulis.
6. Kimberley dan Jeanette sebagai teman dengan dosen pembimbing yang sama yaitu Bapak Prof. M. Wono Setya Budhi, Ph.D. yang memberi dukungan dan semangat kepada penulis.
7. Rhandy yang senantiasa bersedia untuk mendengarkan keluh kesah penulis.
8. Teman-teman "HappyPadoru": Sergio, Topas, Rhandy, JPJ, Jojo, Yohanes Reinhart, Novaldi, dan Adrian yang telah memberikan dukungan dan hiburan.
9. Teman-teman "meatology": Sergio, Topas, JPJ, Jojo, dan Adrian selaku teman AYCE yang menemani, membantu, dan menghibur penulis selama masa perkuliahan, serta mengajak penulis untuk makan bersama.
10. Novaldi, Dimas, Alwy, Adrian, dan Orlin selaku teman mabar Mobile Legends: Bang Bang yang menghibur penulis selama masa perkuliahan.
11. Teman-teman angkatan 2018 yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
12. Teman-teman angkatan 2017 khususnya Kak Felix dan Kak Ivander yang memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.
13. Teman-teman angkatan 2019 khususnya Vania, Felicia, dan Ivan yang telah membantu penulis

memberikan catatan-catatan.

14. Stanley, Ace, Albert, dan NicMon yang menghibur penulis memberikan dukungan secara mental.
15. Untuk semua pihak yang telah berjasa dalam pembuatan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna karena keterbatasan pengetahuan dan pengalaman penulis. Oleh karena itu, penulis terbuka atas kritik dan saran yang membangun dan menjadikan skripsi ini lebih baik lagi. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Bandung, Agustus 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu topik matematika yang banyak digunakan atau diterapkan di bidang sains adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial pada awalnya ditemukan dari kalkulus di mana kalkulus ditemukan oleh Isaac Newton dan Gottfried Leibniz [1, hlm. viii]. Secara umum, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial, dapat dicari solusinya secara analitik atau numerik. Perlu disadari bahwa tidak semua persamaan diferensial dapat dicari solusinya secara analitik, khususnya persamaan diferensial parsial. Oleh karena itu, diperlukan bantuan komputer untuk mencari solusinya secara numerik. Solusi numerik pasti memiliki tingkat kesalahan atau galat, tetapi galat tersebut dapat dikecilkan dengan memilih metode numerik yang tepat.

Secara umum, terdapat beberapa metode penyelesaian secara numerik untuk persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial, yaitu

- metode beda hingga yang ditemukan sekitar tahun 1950-an;
- metode elemen hingga yang ditemukan sekitar tahun 1960-an;
- metode spektral yang ditemukan sekitar tahun 1970-an [2].

Metode spektral merupakan metode yang memiliki tingkat akurasi yang paling tinggi atau memiliki galat yang paling kecil dibandingkan dengan metode beda hingga dan metode elemen hingga [2, hlm. x]. Selain itu, metode spektral dapat disederhanakan menjadi bentuk lain, seperti polinom Chebyshev yaitu matriks penurunan Chebyshev untuk masalah turunan ketiga. Metode spektral matriks penurunan Chebyshev juga memiliki kelemahan, yaitu persamaan-persamaan diferensial yang dapat diselesaikan hanyalah persamaan-persamaan diferensial yang linear seperti persamaan gelombang KdV yang dilinearkan, persamaan gelombang Klein-Gordon satu dimensi, persamaan panas, dan lain-lain. Untuk persamaan diferensial tidak linear diperlukan metode lain dalam matriks penurunan Chebyshev [2, hlm. 63].

Pada skripsi ini, akan dibahas persamaan gelombang Korteweg-de Vries (KdV) yang sudah dilinearkan. Persamaan gelombang KdV ditemukan oleh Boussinesq pada tahun 1877, lalu dikembangkan oleh Korteweg dan de Vries pada tahun 1895 [3]. Persamaan KdV merupakan persamaan untuk gelombang panjang dengan amplitudo sedang, menyebar dalam satu arah di permukaan air yang dangkal. Dalam ilmu sains zaman sekarang, persamaan KdV sering digunakan dalam fisika seperti dalam gelombang kejut, gelombang berjalan, dan gelombang soliter.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut masalah-masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana cara pemakaian matriks penurunan Chebyshev untuk mencari turunan pertama dan menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan nilai batas?

2. Bagaimana akurasi dari metode matriks penurunan Chebyshev untuk mencari turunan pertama?
3. Bagaimana akurasi dari metode matriks penurunan Chebyshev untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial parsial?
4. Bagaimana hasil perbandingan antara metode spektral dan metode beda hingga dengan diskretisasi waktu metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat pada persamaan KdV yang dilinearkan?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah memperlihatkan penggunaan metode spektral, khususnya matriks penurunan Chebyshev, pada masalah turunan biasa dan persamaan diferensial parsial dengan masalah nilai batas, serta melihat akurasi dari metode spektral untuk suatu fungsi turunan pertama. Selain itu, skripsi ini juga melihat perbandingan antara metode spektral matriks penurunan Chebyshev dan metode beda hingga dengan diskretisasi waktu menggunakan metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat pada persamaan KdV yang sudah dilinearkan.

1.4 Ruang Lingkup Pembahasan

Pada skripsi ini, pembahasan yang dilakukan mengenai metode spektral yang digunakan hanya mencakup matriks penurunan Chebyshev. Perbandingan dari metode spektral dengan metode beda hingga hanya diperlihatkan melalui hasil simulasi menggunakan persamaan Korteweg-de Vries yang sudah dilinearkan. Metode-metode diskretisasi waktu yang digunakan untuk persamaan KdV adalah metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari lima bab berikut.

Bab 1: Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, ruang lingkup pembahasan, dan sistematika penulisan.

Bab 2: Landasan teori

Bab ini membahas teori dasar dari metode beda hingga, skema diskretisasi waktu sederhana, dan persamaan gelombang Korteweg-de Vries.

Bab 3: Metode Spektral

Bab ini membahas teori dasar metode spektral. Metode spektral yang dibahas adalah metode spektral matriks penurunan Chebyshev.

Bab 4: Perbandingan Metode Spektral dan Metode Beda Hingga pada Persamaan Gelombang Korteweg-De Vries (KdV) yang Dilinearkan

Bab ini membahas perbandingan metode spektral dan metode beda hingga pada persamaan gelombang KdV dengan diskretisasi waktu metode Euler dan metode Runge-Kutta orde empat.

Bab 5: Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan dari isi skripsi dan saran untuk pengembangan dari skripsi ini.