SKRIPSI

SOLUSI EKSAK DARI BEBERAPA MODEL MATEMATIS TIPE SIR TANPA DAN DENGAN DEMOGRAFI MENGGUNAKAN LAGRANGE PARSIAL

JEVAN INDRAWINATA

NPM: 2017710049

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

2022

FINAL PROJECT

EXACT SOLUTIONS OF SEVERAL SIR-TYPE MATHEMATICAL MODELS WITHOUT AND WITH DEMOGRAPHICS USING PARTIAL LAGRANGIANS

JEVAN INDRAWINATA

NPM: 2017710049

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022

LEMBAR PENGESAHAN

SOLUSI EKSAK DARI BEBERAPA MODEL MATEMATIS TIPE SIR TANPA DAN DENGAN DEMOGRAFI MENGGUNAKAN LAGRANGE PARSIAL

JEVAN INDRAWINATA

NPM: 2017710049

Bandung, 19 Juli 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1

Iwan Sugiarto, M.Si.

Pembimbing 2

Jonathan Hoseana, Ph.D.

Ketua Tim Penguji

Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono

Anggota Tim Penguji

Dr. Daniel Salim

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

SOLUSI EKSAK DARI BEBERAPA MODEL MATEMATIS TIPE SIR TANPA DAN DENGAN DEMOGRAFI MENGGUNAKAN LAGRANGE PARSIAL

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 19 Juli 2022

JEVAN INDRAWINATA
NPM: 2017710049

ABSTRAK

Salah satu fenomena yang sering dipelajari dengan model matematis adalah penyebaran penyakit. Salah satu tipe model penyebaran penyakit yang sering dipakai adalah tipe SIR, yang membagi populasi menjadi tiga subpopulasi, yaitu *susceptible*, *infected*, dan *recovered*. Dalam skripsi ini dibahas model SIR tanpa demografi (yaitu model tipe SIR paling sederhana yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick) dan model SIR dengan demografi (yaitu suatu modifikasinya yang memperhitungkan kelahiran dan kematian). Kedua model tersebut akan dicari solusi eksaknya dalam suatu kasus khusus dengan menggunakan Lagrange parsial. Selanjutnya, kedua model tersebut dimodifikasi untuk mendeskripsikan penularan HIV. Kedua hasil modifikasi tersebut juga dicari solusi eksaknya dalam suatu kasus khusus, dengan menggunakan Lagrange parsial.

Kata-kata kunci: Model SIR, Lagrange parsial, solusi eksak

ABSTRACT

One of the phenomena often studied using mathematical models is the spread of a disease. One type of disease-spread models that is often used is the SIR-type, which divides the population into three subpopulations, namely *susceptible*, *infected*, and *recovered*. In this final project, we discuss an SIR model without demography (that is, the simplest SIR-type model introduced by Kermack and McKendrick) and an SIR model with demography (a modification which takes into account births and deaths). We determine the exact solutions of both models in a special case, using partial Lagrangians. Subsequently, we modify both models to describe the transmission of HIV. We determine the exact solutions of both modifications in a special case, using partial Lagrangians.

Keywords: SIR model, partial Lagrangian, exact solution

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena dengan rahmat, karunia, dan penyertaan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini yang berjudul "**Solusi Eksak dari Beberapa Model Matematis Tipe SIR Tanpa dan Dengan Demografi Menggunakan Lagrange Parsial**". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk memperoleh gelar sarjana Program Studi Matematika Fakultas Teknologi Informasi dan Sains Universitas Katolik Parahyangan, Bandung. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat dalam menambah wawasan dan pengetahuan bagi para pembaca.

Selama penulisan skripsi berlangsung, penulis memperoleh banyak bantuan dan dukungan dari berbagai pihak sehingga penulis dapat melewati berbagai rintangan dan hambatan yang ada. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih terutama kepada:

1. Orang tua, dan seluruh keluarga yang selalu mendukung, mendoakan, dan memberi semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. selaku Dosen pembimbing 1 dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. selaku Dosen pembimbing 2 atas tenaga, waktu, yang telah sabar membimbing, memberi ilmu, didikan, kritik, saran, dan arahan selama penulisan skripsi berlangsung dan masa perkuliahan.
3. Bapak Prof. Dr. Dharma Lesmono dan Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen penguji yang telah membantu penulis dalam memberikan kritik dan saran untuk perbaikan skripsi ini menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen koordinator skripsi yang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada seluruh mahasiswa mata kuliah Skripsi.
5. Ibu Farah Kristiani, Ph.D. selaku dosen wali penulis yang telah memberikan arahan, semangat, dan nasihat selama kuliah dari awal sampai akhir semester.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu, bimbingan serta nasihat kepada penulis selama masa kuliah berlangsung.
7. Laura Florentina yang selalu setia dan sabar mendampingi penulis sejak awal proses penulisan skripsi, memberikan semangat dan nasihat kepada penulis, serta mendengarkan keluh kesah penulis.
8. Kenzo, Ronald, Nico, Ivander, Felix, dan Indira Hafidz Al-Farrel yang sudah melewati masa-masa sulit bersama , hiburan, berbagi ilmu, pengalaman, dan banyak membantu penulis pada masa kuliah berlangsung.
9. Grup **AYCE** sebagai teman-teman terdekat dan telah menemani penulis dari awal perkuliahan. Terima kasih atas segala dukungan, hiburan, dan kebersamaan selama masa perkuliahan.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2017 yang telah berjuang bersama dari awal sampai akhir semester.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2015,2016,2018,2019, dan 2020 yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang secara langsung maupun tidak langsung membantu penulis selama perkuliahan hingga skripsi ini selesai.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna karena adanya keterbatasan ilmu dan pengalaman yang dimiliki, dan tujuan lain dari pemilihan topik skripsi dan penulisan skripsi ini secara umum adalah untuk meneliti bahwa model matematis SIR tidak hanya menganalisis dinamika penyebaran penyakit tetapi dapat dicari solusi eksak nya menggunakan metode Lagrange parsial. Oleh karena itu, penulis dengan terbuka mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi segala pihak yang membacanya.

Bandung, Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematis merupakan suatu teknik untuk merepresentasikan suatu sistem yang kompleks ke dalam model matematis [1]. Model-model matematis digunakan di banyak bidang studi, seperti fisika, ilmu biologi dan kedokteran, ekonomi, teknik, ilmu sosial dan politik, bisnis dan keuangan, dan ilmu komputer. Dengan menggunakan model matematis, dapat dilakukan simulasi dan eksperimen dari data yang ada untuk memprediksi apa yang akan terjadi di waktu yang akan datang.

Berikut merupakan langkah-langkah membuat model matematis dari suatu masalah [2].

1. Identifikasilah masalah yang ingin dibahas dan dicari solusinya.
2. Buatlah asumsi-asumsi dan tentukan variabel-variabel yang akan digunakan dalam model.
3. Konstruksilah model dengan menggunakan asumsi-asumsi dan variabel-variabel yang ada, dan gunakanlah model tersebut untuk menjawab masalah tersebut.
4. Interpretasikanlah jawaban yang diperoleh dari model tersebut.
5. Ujilah jawaban tersebut dengan menggunakan data untuk menilai kerealistisan model. Jika model dinilai kurang realistis, maka model tersebut perlu diperbaiki, misalnya dengan memodifikasi asumsi-asumsi yang digunakan,
6. Setelah diperoleh model yang realistis, ambillah suatu kesimpulan.

Salah satu jenis model matematis yang paling banyak dipelajari adalah model matematis untuk penyebaran penyakit. Salah satu tipe model matematis penyebaran penyakit yang sering digunakan adalah tipe SIR (*susceptible*, *infected*, *recovered/removed*). Model tipe SIR yang paling sederhana pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 [3]. Setelah itu, model SIR Kermack–McKendrick terus dikembangkan dengan mempertimbangkan, misalnya, faktor demografi (kelahiran dan kematian) [4], sehingga menghasilkan model-model tipe SIR yang lebih kompleks. Model tipe SIR membagi populasi ke dalam tiga kelompok yang berbeda, yaitu kelompok individu rentan (*susceptible*), kelompok individu terinfeksi (*infectious*), dan kelompok individu pulih (*recovered*). Model tipe SIR sudah banyak digunakan, selain untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit seperti demam berdarah, HIV, campak, difteri, cacar air, dan COVID-19, juga untuk menganalisis keberhasilan suatu intervensi medis yang dilakukan dalam rangka mengatasi penyebaran penyakit tersebut. Dalam model tipe SIR pada umumnya digunakan asumsi bahwa setiap individu mempunyai kekebalan tubuh permanen setelah pulih dari penyakit.

Model-model SIR yang sederhana, termasuk model SIR Kermack–McKendrick, dapat ditemukan solusi eksaknya dalam bentuk parametrik dengan memisalkan sebuah fungsi sebagai parameter baru yang membuat variabel bebas dan tak bebas berubah tergantung pada parameter tersebut

[5]. Namun, tidak demikian halnya dengan model-model SIR yang lebih kompleks. Pada skripsi ini akan dibahas solusi eksak untuk model SIR yang lebih kompleks dengan menggunakan Lagrange parsial [6].

Teorema Noether memberikan formula-formula eksplisit untuk mengonstruksi hukum-hukum konservasi dari suatu sistem persamaan diferensial Euler-Lagrange. Dalam menggunakan Teorema Noether, dibutuhkan suatu fungsi yang disebut Lagrangian, yang dapat ditentukan dengan kalkulus variasi. Penentuan Lagrangian tersebut tidak selalu mudah [7, 8]. Sebagai alternatifnya, dapat digunakan Lagrange parsial, beserta operator Noether parsial dan persamaan Euler-Lagrange parsial. Lagrange parsial dapat diterapkan pada model-model penyebaran penyakit, khususnya model-model tipe SIR, sebagai suatu metode untuk menentukan solusi eksaknya [6]. Lagrange parsial digunakan untuk menjawab solusi untuk model yang lebih kompleks seperti model HIV.

Pada skripsi ini, akan dipelajari dua model tipe SIR untuk penyebaran penyakit, yaitu model SIR Kermack-McKendrick (yang selanjutnya kita sebut sebagai *model SIR tanpa demografi*) dan suatu modifikasinya yang memperhitungkan demografi (yang selanjutnya kita sebut sebagai *model SIR dengan demografi*), serta dua aplikasi model tipe SIR untuk *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) yaitu *model HIV tanpa demografi* dan *model HIV dengan demografi*. Solusi-solusi eksak dari keempat model tersebut akan ditentukan dengan menggunakan metode Lagrange parsial.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut masalah-masalah yang akan dibahas pada skripsi ini.

1. Bagaimana cara menentukan solusi eksak dari model matematis SIR tanpa dan dengan demografi dengan metode Lagrange parsial?
2. Bagaimana cara menentukan solusi eksak dari model matematis HIV tanpa dan dengan demografi dengan metode Lagrange parsial?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. menentukan solusi eksak dari model matematis SIR tanpa dan dengan demografi, dengan metode Lagrange parsial;
2. menentukan solusi eksak dari model matematis HIV tanpa dan dengan demografi, dengan metode Lagrange parsial.

1.4 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari lima bab berikut.

1. **Bab 1: Pendahuluan**
   Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.
2. **Bab 2: Landasan Teori**
   Bab ini membahas teori-teori yang akan digunakan dalam pengerjaan skripsi, seperti persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial orde satu, dan metode Lagrange parsial.

3. **Bab 3: Model Matematis SIR Tanpa dan Dengan Demografi**
   Bab ini membahas solusi eksak dari model matematis SIR tanpa dan dengan demografi.
4. **Bab 4: Model Matematis HIV Tanpa dan Dengan Demografi**
   Bab ini membahas solusi eksak dari model matematis HIV tanpa dan dengan demografi.
5. **Bab 5: Kesimpulan dan Saran**
   Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya dan saran untuk pengembangan lebih lanjut.

DAFTAR REFERENSI

[1] Ndii, M. Z. (2022) *Pemodelan Matematika*. Penerbit NEM.

[2] Albright, B. dan Fox, W. P. (2019) *Mathematical Modeling with Excel*. CRC Press.

[3] Kermack, W. O. dan McKendrick, A. G. (1927) A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115**, 700–721.

[4] Castillo-Chavez, C., Blower, S., Van den Driessche, P., Kirschner, D., dan Yakubu, A.-A. (2002) *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases: Models, Methods, and Theory*. Springer Science & Business Media.

[5] Harko, T., Lobo, F. S., dan Mak, M. (2014) Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (sir) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation*, **236**, 184–194.

[6] Naz, R., Naeem, I., dan Mahomed, F. M. (2015) A partial Lagrangian approach to mathematical models of epidemiology. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**.

[7] Kara, A. H. dan Mahomed, F. M. (2006) Noether-type symmetries and conservation laws via partial Lagrangians. *Nonlinear Dynamics*, **45**, 367–383.

[8] Kara, A. H., Mahomed, F. M., Naeem, I., dan Wafo Soh, C. (2007) Partial Noether operators and first integrals via partial Lagrangians. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, 2079–2089.