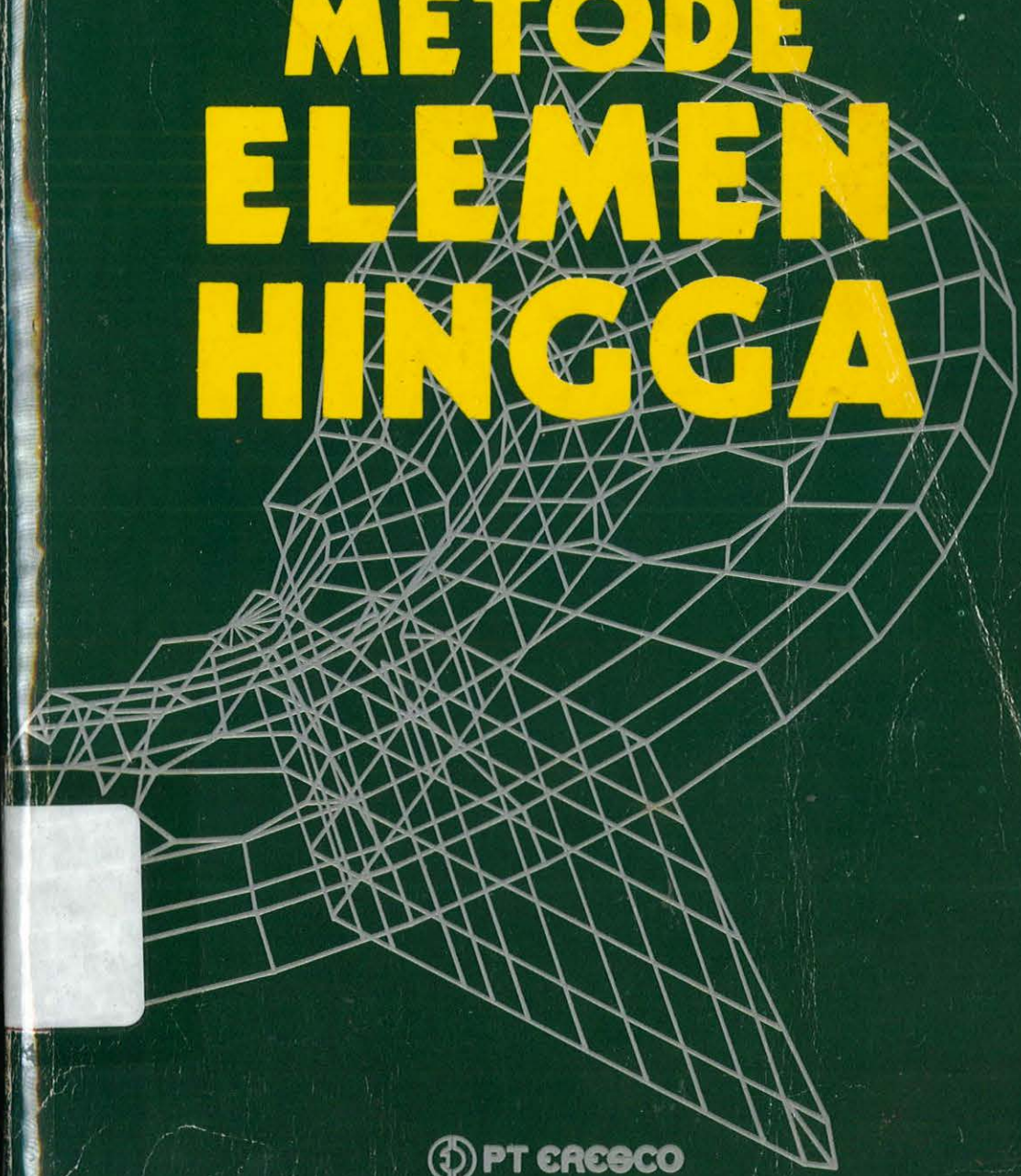


Robert D. Cook

**KONSEP DAN APLIKASI
METODE
ELEMEN
HINGGA**



 PT CRCSCO

2004

KONSEP DAN APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA

No. Kiass	624.171	COO K
No. Induk	87052	Tgl. 8.2.03
Hed. ah/	46	i
Dari		

KONSEP DAN APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA

Robert D. Cook

Departemen of Engineering Mechanics
University of Wisconsin - Madison

PENERJEMAH

Ir. Bambang Suryoatmono, M.Sc
Fakultas Teknik Jurusan Sipil
Universitas Katolik Parahyangan

624.171
COO
K



87052/SB/PTS
8.2.03.



PENERBIT PT ERESKO BANDUNG 1990

Copyright C 1981 by John Wiley & Sons Inc
All Right Reserved
Authorized translation from English
language Edition published by John Wiley
& Sons Inc

TK.03.01.90

Judul Asli : **CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINITE
ELEMENT ANALYSIS**
Second Edition – Robert D. Cook

Hak terjemahan dalam bahasa Indonesia pada
Penerbit PT Eresco

KONSEP DAN APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA

Penerjemah : Ir. Bambang Suryoatmono, M.Sc.
Fakultas Teknik Jurusan Sipil
Universitas Katolik Parahyangan

Editor : Tjun Surjaman
Disain Sampul : Mustaghfirin
Cetakan Pertama 1990

Diterbitkan oleh PT ERESKO. Anggota IKAPI
Hak Cipta dilindungi undang-undang; Tidak diperke-
nankan memperbanyak penerbitan ini dalam bentuk
apa pun tanpa izin tertulis dari penerbit

solus
med
elem
stru
mas
perh
sama

Teor
cuku
sarja
yang
men

dina
teru
perlu
dan
haru
term
Peng
anali
buku
kons

Pada umumnya metode elemen hingga dapat digunakan untuk memperoleh suatu solusi numerik. Banyak masalah dalam analisis tegangan, transfer panas, aliran fluida, medan listrik, dan sebagainya, yang telah diselesaikan dengan menggunakan metode elemen hingga. Buku ini bertitik berat pada masalah analisis tegangan dan mekanika struktur. Analisis tegangan dibahas karena mudah untuk dimengerti, sedangkan masalah-masalah lainnya dapat dipelajari lebih lanjut karena formulasi dan prosedur perhitungan elemen hingga untuk berbagai masalah aplikasi kurang lebih adalah sama.

Buku ini adalah pendahuluan dan lebih condong ke masalah aplikasi praktek. Teori-teori disajikan sebagaimana yang diperlukan. Buku ini mengandung bahan yang cukup untuk disajikan dalam dua semester. Dengan mempelajari buku ini, seorang sarjana teknik akan dapat belajar menggunakan elemen hingga secara efektif. Untuk yang akan bekerja lebih lanjut, di dalam ini juga dapat diperoleh pengertian fisik mengenai elemen hingga.

Latar belakang buku ini adalah sebagai berikut. Kuliah-kuliah mengenai statika, dinamika, dan mekanika bahan harus telah dikuasai. Matematika juga diperlukan terutama diferensiasi dan integrasi sinus, cosinus, dan polinomial. Penulis menekankan perlunya dikuasai juga pengetahuan mengenai operasi matriks, transposisi, diferensiasi, dan arti inversi (prosedur perhitungan inversi tidak begitu diperlukan). Mahasiswa harus terbiasa dengan pemrograman komputer, khususnya dengan bahasa Fortran, termasuk juga penggunaan subrutin, blok *COMMON*, dan penyimpanan *file* ke disket. Pengetahuan lain – seperti teori elastisitas, pelat dan cangkang, metoda-metoda energi, analisis numerik – tidak harus, tetapi sebaiknya dikuasai. Kadang-kadang di dalam buku ini disinggung juga mengenai pengetahuan tersebut, akan tetapi biasanya hanya konsep dasarnya.

Berikut ini dicantumkan penjelasan mengenai isi dan orientasi buku ini.

- Pembahasannya meliputi analisis kontinum, bukan metode khusus untuk struktur rangka. Akan tetapi untuk memberikan penjelasan yang sederhana tetapi berguna, dibahas juga elemen rangka batang (*truss*) dan balok.
- Ditekankan pada analisis statik linier.
- Elemen yang dibahas secara rinci didasarkan pada medan perpindahan yang diasumsikan (*assumed displacement fields*). Elemen ini tidak dibatasi pada bentuk yang khusus, juga tidak mempunyai kontinuitas nodal yang berlebihan. Dari berbagai elemen yang ada, hanya beberapa yang dibahas secara rinci, yaitu terutama yang berjenis isoparametrik.
- Untuk memperlihatkan langkah-langkah proses tertentu, diberikan pengkodean dengan bahasa Fortran, apabila dirasakan mudah, berguna, dan tidak terlalu panjang. Pengkodean ini bisa saja bukan merupakan yang paling mutakhir atau paling efisien. Program dalam bentuk lengkap dapat diperoleh dari berbagai sumber lain.
- Topik-topiknya ditekankan pada masalah yang benar-benar berguna, dan telah terpecahkan dengan baik pada saat ini. Topik-topik yang cepat berubah terhadap

waktu, seperti pembahasan mengenai program komputer yang sedang terkenal, tidak ada dalam buku ini.

Ada beberapa perubahan dari edisi pertama ke edisi kedua ini. Sebagian topik edisi pertama yang tidak sesuai dengan maksud dan orientasi buku ini sudah ditiadakan. Beberapa topik baru ditambahkan apabila memang sesuai (lihat Bab 14, 17, dan 18). Pada buku ini juga ditambahkan contoh-contoh numerik. Yang tidak banyak berubah adalah susunan bab juga paragraf/kalimat-kalimatnya. Beberapa tambahan lain adalah yang diperoleh penulis dari berbagai literatur terakhir, dan dari komentar para mahasiswa, dan sesama pengajar yang pernah menggunakan buku ini. Ditambahkan pula beberapa pekerjaan rumah, yang jawabannya diberikan pada bagian belakang buku ini. Soal-soalnya dipilih yang dapat memberikan prinsip dan prosedur yang telah dijelaskan pada bab yang bersangkutan. Sebagian besar dari soal-soal tersebut tidak memerlukan perhitungan dengan komputer maupun perhitungan numerik yang rumit.

Keberhasilan dalam pemanfaatan metode elemen hingga akan sangat tergantung pada program komputer yang dibuat. Para mahasiswa pada kuliah semester pertama akan mengatakan bahwa tugas pemrograman merupakan alat belajar yang sangat baik. Mahasiswa tersebut lebih senang menulis dan mencoba program sederhana tetapi lengkap, bukan membuat subrutin-subrutin saja. Elemen-elemen contoh dan kondisinya masing-masing yang merupakan dasar pemrograman dicantumkan di sini. Sebagai contoh, kuadratur Gauss untuk pembentukan kekakuan elemen diberikan di dalam buku ini. Untuk mahasiswa yang bukan dari bidang mekanika struktur, di sini dibahas juga beberapa masalah nonstruktural.

1. Elemen balok standar, dua derajat bebas (*degree of freedom, d.o.f.*) tiap titik.
2. Seperti ad (1) tetapi dengan tambahan derajat bebas internal.
3. Balok geser yang terletak di atas fundasi elastis, satu derajat bebas tiap titik. (Lihat Gambar 9.5.2. Untuk balok, tinjau saja w dan energi yang disimpan oleh γ_{xy}).
4. Balok yang terbentuk oleh elemen pelat isoparametrik (Gambar 9.5.1 atau 9.5.2).
5. Elemen batang tak prismatis (*tapered bar element*), dua derajat bebas pada titik dan satu tak bertitik.
6. Disk datar yang tebalnya konstan atau pun berubah, dengan elemen lingkaran dan beban torsional saja.
7. Sama dengan ad 6 tetapi ditambah dengan derajat bebas tak bertitik (*nodeless d.o.f.*).
8. Sama dengan ad 6, tetapi dengan beban radial saja.
9. Sama dengan ad 6, tetapi ada fundasi elastis, dan hanya dapat mempunyai kekakuan geser melintang, dan beban lateral.
10. Sama dengan ad 5 tetapi dengan meninjau aksi torsional saja.
11. Rangka bidang (*plane frame*), tiga derajat bebas per titik.
12. Sama dengan ad 11, tetapi menggunakan elemen dari ad 4.
13. Elemen segi empat, satu derajat bebas pada tiap ujung, untuk persamaan harmonis (lapis sabun, aliran fluida, dan sebagainya).
14. Aplikasi Persamaan 4.10.4 untuk balok tak prismatis yang dibebani gaya aksial.

Tugas
dapat
superp
masala
dan be
sederha
dapat
serba
dalam
Pe
bertan
baik, c
dari b
karena
hal bal
which.
penjela
yang c
penget
cepat c

Tugas pemrograman juga dapat diberikan pada kuliah semester ke dua. Tugas yang dapat saja diberikan misalnya komponen deret Fourier dari suatu pembebanan, dan superposisi masing-masing solusinya. Contoh-contoh yang diberikan di sini meliputi masalah tegangan bidang, termasuk untuk daerah lingkaran, dengan elemen melingkar dan beban asimetris, juga analisis jalur hingga (*finite strip*) pada pelat yang ditumpu sederhana. Tugas lain seperti masalah frekuensi alami getaran atau respons dinamis juga dapat diberikan. Kemungkinan lainnya, adalah tugas pembuatan program komputer serba guna, yang disertai penggambaran interaktif, yang diperlukan oleh mahasiswa dalam memecahkan masalah elemen hingga.

Penulis sangat berterima kasih kepada mahasiswa-mahasiswa yang telah banyak bertanya sehingga penulis menjadi terbiasa untuk menjelaskan dengan cara yang lebih baik, dan dapat memberikan pekerjaan rumah yang lebih sempurna. Sebagian besar dari buku ini berasal dari makalah-makalah (*paper*) yang telah pernah diterbitkan, karena itu penulis juga sangat menghargai kerja para penulis makalah tersebut. Dalam hal bahasa, penulis pernah mengalami kebingungan dalam penggunaan kata *that* dan *which*. Kepada editor dari penerbit *Wiley* penulis mengucapkan terima kasih atas penjelasan mengenai perbedaan kedua kata tersebut. Buku *The Elements of Style* yang ditulis oleh Strunk dan White telah banyak membantu penulis. Kepada keenam pengetik, terutama Pat Klitzke, penulis mengucapkan terima kasih atas kerja yang cepat dan berkualitas.

Robert D. Cook

DAFTAR ISI



	Halaman
PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	ix
NOTASI	1
BAB 1 PENDAHULUAN	4
1.1 Metode Elemen Hingga	4
1.2 Beberapa Matriks dan Persamaan yang Penting	10
1.3 Teori Elastisitas ✓	12
1.4 Hubungan Regangan–Peralihan ✓	15
(1.5) Hubungan Tegangan–Regangan ✓	16
1.6 Pengaruh Temperatur, Tegangan, dan Regangan Awal	19
1.7 Mencari Informasi Tambahan	20
1.8 Kemajuan Komputer	21
Soal-soal	22
BAB 2 METODE KEKAKUAN DAN RANGKA BATANG BIDANG	25
2.1 Pendahuluan	25
2.2 Persamaan Kekakuan Struktur	25
2.3 Sifat-sifat [k]. Solusi Anu	28
2.4 Persamaan Kekakuan Elemen ✓	29
2.5 Penyusunan Matriks Kekakuan Struktur ✓	31
2.6 Pembentukan Persamaan Keseimbangan ✓	34
2.7 Penomoran Titik yang dapat Menghasilkan Matriks Jalur	37
2.8 Penomoran Kembali Titik-titik secara otomatis	40
2.9 Kondisi Batas Peralihan	41
2.10 Reaksi Tumpuan dan Perhitungan Tegangan	45
2.11 Solusi Persamaan dengan Eliminasi Gauss	46
2.12 Algoritma Solusi Gauss dan Choleski	49
2.13 Catatan Mengenai Berbagai Cara Pemecahan dan Persamaan	53
2.14 Pemecahan Persamaan Tidak Langsung	54
2.15 Rangkuman	56
2.16 Beberapa Masalah Nonstruktural yang Berkaitan	58
Soal-soal	60
BAB 3 ENERGI POTENSIAL DAN METODE RAYLEIGH–RITZ	65
3.1 Pendahuluan	65
(3.2) Energi Potensial Total ✓	65
(3.3) Beberapa Derajat Bebas, Manipulasi Matriks ✓	67

3.4	Persamaan-persamaan untuk Energi Potensial Total	70	6.4
3.5	Metode Rayleight–Ritz	74	6.5
3.6	Komentar pada Metode Rayleigh–Ritz	77	6.6
3.7	Bentuk Elemen Hingga pada Metode Rayleigh–Ritz	78	6.7
3.8	Rangkuman Kesimpulan	83	6.8
	Soal-soal	84	6.9

BAB 4 ELEMEN–ELEMEN YANG DIDASARKAN ATAS MEDAN PERALIHAN TERASUMSI 88

4.1	Pendahuluan	88	6.10
4.2	Interpolasi	88	6.11
4.3	Rumus untuk Matriks Elemen	92	6.12
4.4	Matriks untuk Elemen Rangka Batang (<i>Truss</i>) dan Rangka (<i>Frame</i>)	98	6.13
4.5	Segitiga Regangan Konstan	100	Soal-soal
4.6	Elemen Segitiga Linier	103	
4.7	Keseimbangan dan Keserasian pada Solusi	105	BAB 7
4.8	Persyaratan Konvergensi. Uji <i>Patch</i>	106	7.1
4.9	Persyaratan lain untuk Konvergensi dan Kekekalan	108	7.2
4.10	Perhitungan Tegangan	112	7.3
4.11	Titik Simpul Pojok, Titik Tepi, Biaya dan Pendimensian	116	7.4
4.12	Elemen Hingga versus Beda Hingga	117	7.5
4.13	Metode Solusi Batas	118	7.6
	Soal-soal	121	7.7

BAB 5 FORMULASI ISOPARAMETRIK 128

5.1	Elemen Isoparametrik	128	7.10
5.2	Contoh-contoh pada 1 Dimensi	129	7.11
5.3	Elemen Isoparametrik Linier Bidang	131	7.12
5.4	Ringkasan Gauss <i>Quadrature</i>	134	7.13
5.5	Subrutin Komputer untuk Elemen Linier	137	7.14
5.6	Elemen Bidang Lagrange	140	7.15
5.7	Isoparametrik Padat (masif)	142	Soal-soal
5.8	Beban Titik Simpul dari Traksi Permukaan dan Gaya Benda	144	BAB 8
5.9	Kesahihan Elemen Isoparametrik	147	8.1
5.10	Orde <i>Quadrature</i> yang layak	150	8.2
5.11	Catatan Mengenai Perhitungan Tegangan	153	8.3
5.12	Catatan Kesimpulan. Contoh-contoh. Berbagai <i>error</i>	155	8.4
	Soal-soal	159	8.5

BAB 6 TRANSFORMASI KOORDINAT 165

6.1	Pendahuluan	165	8.6
6.2	Transformasi Tegangan, Regangan, dan Besaran Material	165	8.7
6.3	Transformasi Kekakuan dalam 2 Dimensi	168	Soal-soal

BAB 9

9.1	
9.2	
9.3	

70	6.4	Transformasi untuk Tumpuan yang miring	170
74	6.5	Transformasi pada Ruang. Matriks [T] yang tidak Persegi Panjang	171
77	6.6	Penggabungan Antara Elemen yang tidak sama	172
78	6.7	Penghubung Kaku. Elemen Kaku. Sendi Ekstra	175
83	6.8	Kendala (<i>Constraints</i>) dan Persamaan Transformasi	177
84	6.9	Kendala dan Pengali Lagrange	180
	6.10	Kendala dan Fungsi Penalti	181
HAN	6.11	Penggunaan Simetri Suktur	183
88	6.12	Simetri Siklik	185
88	6.13	Pelaksanaan Substruktur	187
88		Soal-soal	189
92		BAB 7 TOPIK MENGENAI FORMULASI ELEMEN DAN PENGGUNAANNYA	199
98	7.1	Kernel Elastis dan Elemen Umum	199
100	7.2	Titik Simpul di dalam Elemen. Kondensasi	201
103	7.3	Derajat Bebas tak Bertitik Simpul. Formulasi Global-Lokal	203
105	7.4	Algoritma Kondensasi dan Persamaan Kendala	206
106	7.5	Turunan Lebih Tinggi sebagai Derajat Bebas Titik Simpul	208
108	7.6	Geser Parasitik pada Elemen Linier	210
112	7.7	Elemen QM6. Elemen tak Serasi	211
116	7.8	Elemen Membran Terpilin (<i>Warped Membrane Element</i>)	216
117	7.9	Elemen Segitiga dan Koordinat Luas	217
118	7.10	Segitiga Kuadratik. Integrasi Numerik	221
121	7.11	Pilihan Lain dalam Formulasi Elemen	226
128	7.12	Penurunan Derajat Elemen	227
128	7.13	Pemodelan. Pola Jaring dan Pembagian Derajat	230
129	7.14	Elemen-elemen yang Berbentuk Khusus atau yang Tak Hingga	233
131	7.15	Mekanika <i>Fracture</i> . Singularitas Elemen	235
134		Soal-soal	240
137		BAB 8 BENDA PUTAR	249
140	8.1	Pendahuluan	249
142	8.2	Formulasi Pembebanan Simetris Aksial	249
144	8.3	Catatan Mengenai Deret Fourier	252
147	8.4	Beban Umum. Pendahuluan	255
150	8.5	Pembebanan Umum. Matriks Elemen	258
153	8.6	Pembebanan Umum dan Besaran Umum	260
155	8.7	Catatan Kesimpulan	262
159		Soal-soal	263
165		BAB 9 LENTUR PELAT DATAR	267
165	9.1	Perilaku Pelat dan Cangkang	267
165	9.2	Elemen Hingga dan Jalur Hingga	271
168	9.3	Elemen Pelat Isoparametrik	277

9.4	Elemen Pelat Isoparametrik (lanjutan)	280	
9.5	Elemen Isoparametrik untuk Pelat Tipis dan Pelat Tebal	284	13.3
9.6	Kasus Uji untuk Pelat Terlentur	288	13.4
	Soal-soal	290	13.5
			13.6
BAB 10 CANGKANG		296	13.7
10.1	Pendahuluan	296	13.8
10.2	Elemen Datar	297	13.9
10.3	Gerak Benda Tegar	199	13.10
10.4	Pilihan Teori Cangkang dan Medan Peralihan	301	13.11
10.5	Elemen Cangkang Isoparametrik	303	13.12
10.6	Elemen Cangkang Isoparametrik (lanjutan)	307	13.13
10.7	Uji Kasus Elemen Cangkang	309	13.14
10.8	Cangkang Tipis Putar	312	Soal-soal
10.9	Cangkang Tipis Putar (Lanjutan)	315	
10.10	Kesimpulan Tentang Cangkang Tipis Putar	316	BAB 1
10.11	Elemen Cangkang Putar Isoparametrik	317	14.1
	Soal-soal	320	14.2
			14.3
BAB 11 ELEMEN HINGGA PADA DINAMIKA DAN GETARAN		327	14.4
11.1	Pendahuluan	327	14.5
11.2	Matriks Massa dan Redaman. Persamaan Dinamika	327	14.6
11.3	Matriks Massa, Konsisten dan Diagonal	329	14.7
11.4	Frekuensi Alami. Masalah Nilai Eigen	333	14.8
11.5	Kondensasi untuk Mereduksi Jumlah Derajat Bebas	336	14.9
11.6	Teknik-teknik Solusi untuk Masalah Eigen	340	
11.7	Respons Dinamik. Metode Ragam	343	BAB 1
11.8	Respons Dinamik. Integrasi Langsung	345	15.1
11.9	Respons Dinamik. Catatan Tentang Metode-metode	348	15.2
10.10	Berbagai-macam Persoalan Dinamik	350	15.3
	Soal-soal	351	15.4
			15.5
BAB 12 TEKUK DAN PENGARUH LAIN. GAYA MEMBRAN		357	15.6
12.1	Pendahuluan	357	15.7
12.2	Matriks Kekakuan Tegangan untuk Batang, Balok, dan Pelat	359	15.8
12.3	Perumusan Lebih Umum	363	15.9
12.4	Beban Kritis (masalah Nilai Eigen)	367	15.10
12.5	Bifurkasi, Ketaksempurnaan, Titik Batas, dan Nonlinieritas	371	Soal-soal
	Soal-soal	373	
BAB 13 PENGENALAN PADA PERSOALAN NONLINIER		378	BAB 1
13.1	Pendahuluan. Nonlinieritas Geometri	378	16.1
13.2	Formulasi <i>Updated Lagrangian</i>	380	16.2
			16.3
			16.4
			16.5

280			
284	13.3	Algoritma Solusi. Newton–Raphson	382
288	13.4	Interpretasi Algoritma Solusi	384
290	13.5	Formulasi Lagrangian Total	387
	13.6	Algoritma Solusi Lain. Iterasi Langsung	389
296	13.7	Persoalan <i>joint, gap</i> , dan kontak	391
	13.8	Kabel, Membran, dan Cangkang	394
296	13.9	Nonlinieritas Material. Teori Inkremental	395
297	13.10	Teori Deformasi. Solusi Iterasi Langsung	399
199	13.11	Algoritma untuk Plastisitas Inkremental	402
301	13.12	Aksi Lentur dengan Nonlinieritas Material	406
303	13.13	Hal-hal lain tentang Nonlinieritas Material	408
307	13.14	Memilih Metode Solusi	410
309		Soal-soal	411
312			
315		BAB 14 PENGUASAAN PADA DATA, PROGRAM, DAN PEMROGRAMAN	421
316	14.1	Pendahuluan	421
317	14.2	Dokumentasi	421
320	14.3	Pembentukan Jaring	422
	14.4	Grafik Komputer	425
327	14.5	Kesalahan Fatal dan Perangkat Kesalahan	425
327	14.6	Catatan Tentang Program Besar dan Kecil	427
327	14.7	Rekomendasi Pemrograman	427
329	14.8	Alokasi Tempat Penyimpanan Dinamik	430
333	14.9	Biaya-biaya	432
336			
340		BAB 15 MENDETEKSI DAN MENGHINDARI KESULITAN NUMERIK	434
343	15.1	Pendahuluan	434
345	15.2	Uji Nilai Eigen pada Elemen-elemen	435
348	15.3	Uji Kualitas Elemen	436
350	15.4	Kesalahan Idealisasi. Laju Konvergensi	437
351	15.5	Kondisi Buruk. Kesalahan Pemotongan dan Pembulatan	441
	15.6	Bilangan Kondisi	443
357	15.7	Pengurutan Persamaan	446
357	15.8	Kerusakan pada Koefisien Diagonal	447
359	15.9	Persamaan Residu dan Iteratif	448
363	15.10	Kesimpulan	450
367		Soal-soal	451
371			
373		BAB 16 BERMACAM TOPIK DALAM MEKANIKA STRUKTUR	454
	16.1	Metode Keseimbangan, Campuran, dan Hibrid	454
378	16.2	Balok Lurus dan Balok Lengkung	456
378	16.3	Fondasi Elastis	457
380	16.4	Konstruksi Inkremental	459
	16.5	Reanalisis Setelah Modifikasi Struktur	459

16.6	Media Inkompresibel	461
16.7	Interaksi Struktur-Fluida	462
	Soal-soal	464
BAB 17 PENGENALAN PADA PERPINDAHAN PANAS DAN PERSOALAN NONSTRUKTURAL LAINNYA		470
17.1	Formulasi untuk Perpindahan Panas dan Persoalan Lainnya	470
17.2	Persamaan-persamaan untuk Konduksi Panas dalam Bidang	471
17.3	Formulasi Elemen Hingga	473
17.4	Benda Pejal Umum dan Benda Putar	475
17.5	Persoalan Termal Transien	476
17.6	Beberapa Soal Penting Pada Perpindahan Panas	478
17.7	Persamaan Kuasi-Harmonik	479
17.8	Aplikasi pada Aliran Fluida dua Dimensi	481
17.9	Persamaan Gelombang. Ragam Akustik dalam Rongga	483
	Soal-soal	485
BAB 18 PENGANTAR METODE RESIDU BERBOBOT		489
18.1	Alasan-alasan Menggunakan Metode Residu Berbobot	489
18.2	Beberapa Metode Residu Berbobot	489
18.3	Contoh Numerik	491
18.4	Metode Elemen Hingga Galerkin	495
18.5	Aplikasi Metode Gauss pada Dua Dimensi	497
18.6	Integrasi Sebagian	499
18.7	Metode Kolokasi Kuadrat Terkecil	501
18.8	Metode Elemen Hingga Galerkin. Formulasi Campuran	503
18.9	Penerapan Galerkin pada Persamaan Kuasi Harmonik	505
	Soal-soal	506
Apendiks A Matriks kekakuan Kolom – Balok Bidang		511
Apendiks B Contoh Jaring Elemen Hingga		513
Daftar Pustaka		519
Jawaban Soal-soal		550
Indeks		571

NOTA

Berikut pada b definisi punyai digunal

SIMBO

[]

[]

[]

{ }

[]⁻¹

[]^T

[]^{-T}

$\frac{\partial \Pi_P}{\partial a}$

SIMBO

A

[A]

{a^f}

B

[B], [B]

C_n

C(K)

[C]

D

d.o.f.

{D}

{d}

NOTASI

Berikut ini dicantumkan daftar simbol-simbol utama. Notasi yang digunakan hanya pada bagian tertentu dan modifikasinya (seperti dengan penambahan subskrip) didefinisikan pada bagian di mana digunakan. Begitu pola simbol-simbol yang mempunyai arti yang berbeda untuk konteks tertentu didefinisikan di mana simbol tersebut digunakan. Matriks dicantumkan dengan cetak tebal.

SIMBOL-SIMBOL MATEMATIKA

461	[]	Matriks segi empat atau bujur sangkar
462	[]	Matriks diagonal
464	[]	Vektor baris
470	{ }	Vektor kolom. <i>Catatan:</i> $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \equiv \{u \ v\}$
471	[] ⁻¹	Invers matriks
473	[] ^T	Transpos matriks (berlaku juga untuk matriks baris dan matriks kolom)
475	[] ^{-T}	Transpos invers; $[]^{-T} \equiv ([]^{-1})^{-T} \equiv ([]^T)^{-1}$. <i>Catatan.</i> Tanda kurung biasa maupun kurung siku dapat diabaikan dari suatu submatriks dan dari matriks bagian dari perkalian matriks yang dikurung.
476		turunan waktu; sebagai contoh, $\dot{u} = du/dt$, $\ddot{u} = d^2u/dt^2$.
478		turunan parsial terhadap variabel di sebelah tanda ini; sebagai contoh $w_{,x} = \partial w / \partial x$, $w_{,xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$
479		Amplitudo; sebagai contoh, $u = \bar{u} \sin \omega t$. (Banyak lagi arti-arti lainnya).
481	$\frac{\partial \Pi_P}{\partial a}$	Menunjukkan $\frac{\partial \Pi_P}{\partial a_1} \frac{\partial \Pi_P}{\partial a_2} \dots \frac{\partial \Pi_P}{\partial a_n}$ yang mana Π_P merupakan
483		fungsi skalar dengan parameter $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.
485		

SIMBOL-SIMBOL LATIN

489	A	Luas
489	[A]	Penghubung antara {d} dengan {a}; $\{d\} = [A] \{a\}$
491	{a}	Koordinat yang diperumum (<i>generalized coordinates</i>).
495	B	semi-lebar-jalur dari suatu matriks.
497	[B], [B _a]	Matriks "regangan-peralihan" (Bab 4.3)
499	C_n	Kontinuitas derajat n (Bab 4.2)
501	$C(K)$	Jumlah kondisi untuk [K] (Bab 15.6)
503	[C]	Matriks redaman atau matriks kendala (<i>constrain</i>).
505	D	Peralihan
506	d.o.f.	Derajat bebas (<i>degree of freedom</i>)
511	{D}	d.o.f. nodal untuk struktur (d.o.f. global)
513	{d}	d.o.f. nodal untuk elemen.

{D}	Matriks kekakuan lentur untuk pelat	
E, E_s	Modulus elastis (E), modulus sekan (E_s) (Gambar 13.10.1)	
[E]	Matriks kekakuan elastis (Bab 1.5)	
{F}	Gaya benda (<i>body forces</i>) per satuan volume.	
{f}	Medan peralihan; {f} = {u v w} dalam ruang tiga dimensi.	
G	modulus geser.	
[H]	digunakan apabila [Q] dipakai	
I	momen inersia balok	
[I]	Matriks satuan (disebut juga matriks identitas)	
J	Determinan dari [J], disebut juga Jacobian	
[J]	matriks Jacobian	
k	kekakuan pegas. Konduktivitas termal (Bab 17)	
[K]	Matriks kekakuan struktur (global)	
[k]	Matriks kekakuan elemen (matriks konduktivitas pada Bab 17).	
[K _{σ}]	Matriks kekakuan tegangan struktur (global).	
[k _{σ}]	Matriks kekakuan tegangan elemen.	
L, l	Panjang	
l, m, n	cosinus arah	
[M]	Matriks massa struktur (global)	
[m]	Matriks massa elemen	
M, N	Momen lentur (M), gaya membran (N)	
MBAND	Sama dengan B	
N, NEQ	Banyaknya persamaan	} pertama kali digunakan pada Bab 2
NDOF	Banyaknya derajat bebas	
NUMEL	Banyaknya elemen pada struktur	
NUMNP	Banyaknya titik pada struktur	
[N]	Matriks fungsi bentuk; {f} = [N] {d}	
O	Orde; sebagai contoh $O(h^2)$ = suku dengan orde h^2 .	
[O], {O}	Matriks kosong, vektor kosong	
p_i, q_i	Gaya terpusat pada titik i (Bab 1 dan 2)	
P	Gaya	
{P}	Vektor gaya yang bekerja pada titik-titik struktur.	
[Q], {Q}	Matriks yang digunakan untuk berbagai hal. Didefinisikan setiap kali digunakan.	
q	Beban lateral (permukaan atau garis)	
R	Residual (sisa) (Bab 15.9; Bab 18).	
{R}	Beban total pada titik-titik struktur; {R} = {P} + Σ {r}	
{r}	Gaya-gaya yang bekerja dari elemen terhadap titik-titik (Persamaan 4.3.5).	
{ \bar{r} }	{ \bar{r} } = - {r} (Bab 2.4)	
S	Permukaan (<i>surface</i>)	
s, t	Arah-arah koordinat, biasanya Cartesian.	
T	Temperatur	
t	Tebal. Waktu	
[T]	Matriks transformasi	

U, U_o
u, v, w
V
x, y, z
x, y, z

SIMBO

α
 α, β, γ
 β
[Γ]
 δ
{ ϵ }, { ϵ },
{ κ }

ν
 ξ, η, ζ
 Π
 π
 ρ
{ σ }, { σ },
 ϕ
{ Φ },
 ω

SIMBO



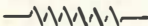

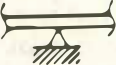
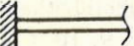


U, U_0	Energi regangan, energi regangan per satuan volume
u, v, w	Komponen-komponen peralihan
V	Volume
x, y, z	Koordinat Cartesian
x, y, z	Koordinat Cartesian lokal

SIMBOL-SIMBOL YUNANI

α	Koefisien ekspansi termal
α, β, γ	Koordinat luas (Bab 7.9).
β	Sudut, faktor relaksasi, modulus fundasi, dan sebagainya.
$[\Gamma]$	Invers Jacobian, $[\] = [J]^{-1}$.
δ	Operator perubahan kecil; sebagai contoh t adalah inkremen waktu.
δ	Operator virtuil (maya); sebagai contoh δu adalah peralihan virtuil.
$\{\epsilon\}, \{\epsilon_0\}$	Regangan, regangan awal (Bab 1.6)
$\{\kappa\}$	Vektor kelengkungan (pada lentur pelat).
	Nilai eigen. Pengali Lagrange.
ν	Angka Poisson.
ξ, η, ζ	Koordinat isoparametrik (Bab 5).
Π	Fungsional ($\Pi_p =$ energi potensial total).
π	3,1415926536 . . .
ρ	Rapat massa
$\{\sigma\}, \{\sigma_0\}$	Tegangan, tegangan awal (Bab 1.6)
ϕ	Variabel yang bergantung. Sudut meridian pada cangkang (Bab 10).
$\{\Phi\}$	Vektor gesekan permukaan (Bab 1.3)
ω	Frekuensi sudut dalam radian per detik.

SIMBOL-SIMBOL GRAFIS

	Vektor gaya atau peralihan
	Vektor rotasi atau momen (dengan aturan tangan kanan).
	Pegas atau tumpuan elastis.
	Tumpuan rol (menahan gaya-gaya normal positif maupun negatif).
	Tumpuan sendi (menahan semua gaya, tetapi tidak menahan momen).
	Tumpuan jepit (menahan semua gaya dan momen).

1

PENDAHULUAN

1.1 METODE ELEMEN HINGGA

Metode elemen hingga adalah prosedur numerik untuk memecahkan masalah mekanika kontinum dengan ketelitian yang dapat diterima oleh rekayasawan.

Bayangkanlah bahwa tegangan dan peralihan pada suatu struktur dalam Gambar 1.1 harus dicari. Jawaban numeriknya tidak akan ada pada buku manapun. Metode-metode klasik menunjukkan bahwa masalah ini berupa persamaan diferensial parsial, akan tetapi jawabannya tidak ada karena geometri dan pembebanannya terlalu kompleks. Secara praktis, *banyak sekali* masalah yang terlalu kompleks untuk diperoleh jawaban tertutupnya (*closed form solution*). Untuk itu, diperlukan solusi numerik, dan salah satu yang cukup memadai adalah metode elemen hingga.

Pada Gambar 1.1.b diperlihatkan model elemen hingga. Daerah yang berupa segitiga dan kuadrilateral adalah elemen-elemen hingga. Titik-titik hitam adalah titik simpul (*node*) dimana elemen yang satu berhubungan dengan lainnya. Suatu jaring (*mesh*) adalah susunan titik simpul dan elemen. Bentuk jaring pada gambar tersebut terdiri atas elcmen segitiga dan kuadrilateral, ada yang mempunyai titik simpul pada sisinya, dan ada pula yang hanya pada ujungnya. (Informasi mengenai tata letak elemen pada jaring diberikan pada Bab 7.13 dan Apendiks B).

Pada dasarnya, elemen hingga merupakan bagian-bagian kecil dari struktur aktual. Akan tetapi, kita tidak dapat mengubah Gambar 1.1.a menjadi Gambar 1.1.b hanya dengan membuat potongan sembarang seperti potongan-potongan material yang terikat pada titik-titik kumpul. Apabila terpotong demikian, struktur tersebut akan sangat melemah. Selain itu, potongan-potongan tersebut akan mempunyai konsentrasi regangan pada titik-titik kumpulnya dan akan cenderung menjadi tumpang tindih atau terpisahkan di sepanjang potongan. Jelasnya, pada struktur aktual tidak akan terjadi demikian, jadi elemen hingga harus dapat berdeformasi dengan cara yang terbatas. Sebagai contoh, apabila ujung-ujung elemen dikendalikan untuk tetap lurus, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.1.c, maka elemen yang bersebelahan dengannya tidak akan bertumpang tindih maupun terpisahkan.

Untuk memformulasikan suatu elemen, kita harus mencari gaya-gaya titik simpul (*nodal forces*) yang menghasilkan berbagai ragam deformasi elemen. Kita dapat mencari gaya-gaya ini dengan teori dasar untuk elemen hingga "alami" seperti balok (*beam*) atau batang (*bar*). Akan tetapi, untuk elemen-elemen yang didefinisikan dengan menggambarkan garis-garis pada suatu kontinum, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.1.b dan 1.1.c, diperlukan prosedur baru (Bab 3, 4, 5, 8, 9, 10, 17, dan 18).

Metode elemen hingga tidak dibatasi pada masalah-masalah mekanika struktural (Gambar 1.1.2). Pada Gambar 1.1.2 juga diperlihatkan bagaimana permukaan ϕ yang

berubah
simpul
terpilih
dekatan



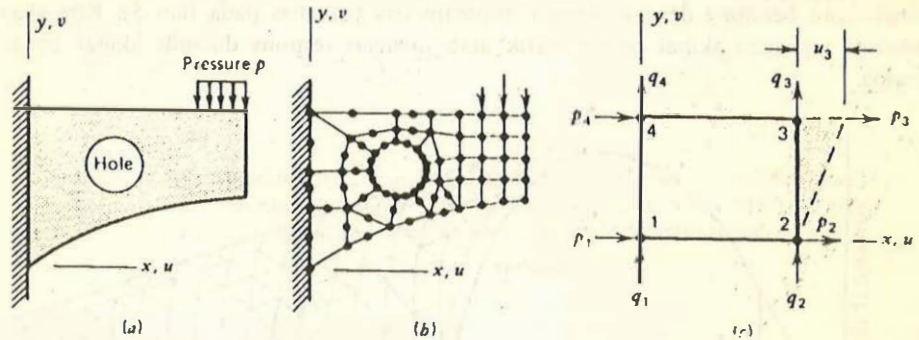
Gambar
hingga
gaya-gaya

Di
x dan
dari ϕ .
ini me
bagian
terdefi
simpul



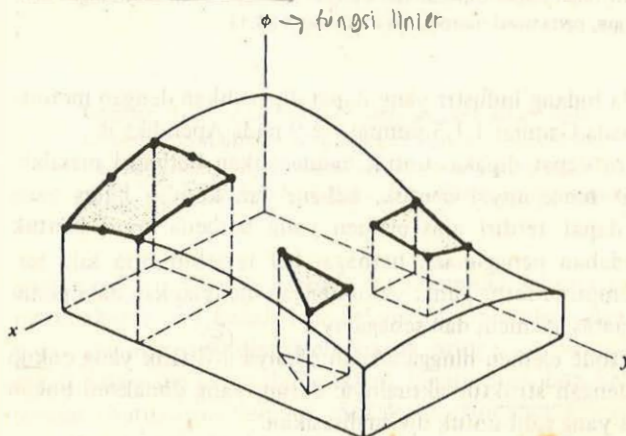
Gambar

berubah secara halus dapat didekati dengan permukaan yang datar. Elemen bertitik simpul empat dan delapan, yang masing-masing diperlihatkan dengan permukaan terpilin dan lengkung, merupakan pendekatan yang baik ke fungsi situasinya. Pendekatan ini akan semakin baik apabila elemen yang digunakan semakin banyak.



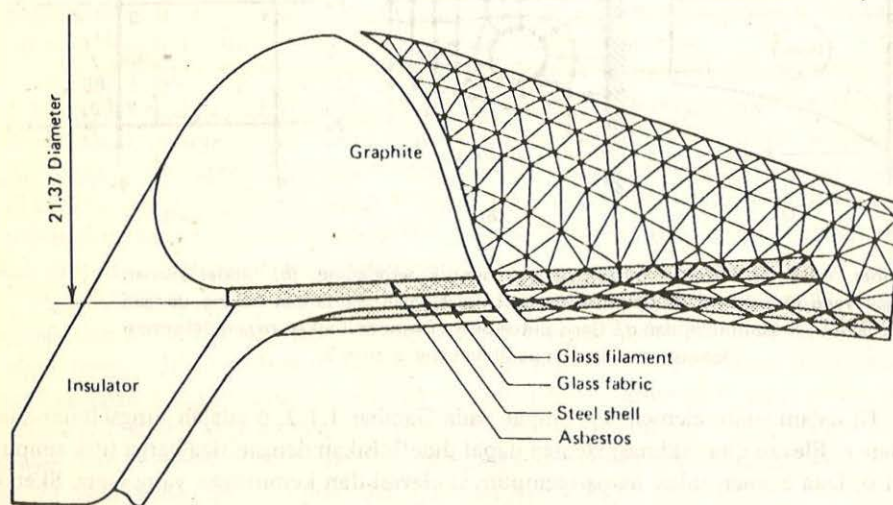
Gambar 1.1.1 (a) Struktur bidang dengan bentuk sembarang. (b) Model elemen hingga yang mungkin pada struktur tersebut. (c) elemen segi empat bidang, dengan gaya-gaya titik kumpul p_i dan q_i . Garis putus-putus memperlihatkan ragam deformasi sehubungan dengan peralihan arah x titik 3.

Di dalam suatu elemen segi empat pada Gambar 1.1.2, ϕ adalah fungsi linier dari x dan y . Elevasi dan inklinasi elemen dapat didefinisikan dengan tiga harga titik simpul dari ϕ . Dua elemen tidak harus mempunyai elevasi dan kemiringan yang sama. Sketsa ini memperlihatkan esensi metode elemen hingga, yaitu pendekatan bagian demi bagian untuk fungsi ϕ dengan menggunakan polinomial, yang mana masing-masing terdefinisi pada daerah (elemen) yang kecil dan dinyatakan dalam harga-harga titik simpul dari fungsi tersebut.



Gambar 1.1.2 Fungsi kombinasi $\phi = \phi(x, y)$ dan elemen tipikal yang dapat digunakan untuk mendekatinya.

Dua masalah struktural berikut ini dapat membantu menjelaskan metode elemen hingga. Kepala roket pada Gambar 1.1.3 merupakan benda putaran (*solid of revolution*). Masing-masing elemen merupakan cincin torsional yang berpenampang segi tiga. Kita akan mencari tegangan yang diakibatkan oleh gradien temperatur dan tekanan internal. Pada Gambar 1.1.4 diperlihatkan tiga cara untuk memodelkan lengkungan bendung dengan elemen isoparametrik (dibahas pada Bab 5). Kita akan mencari tegangan akibat beban statik atau mencari respons dinamis akibat beban gempa.



Gambar 1.1.3 Penampang melintang kepala roket yang terbuat dari banyak material, memperlihatkan konstruksi (bagian kiri) dan jaring elemen hingga yang mungkin (bagian kanan). Masalah ini telah dapat dipecahkan dengan menggunakan teknologi elemen hingga, pada awal metode ini digunakan [8.1].

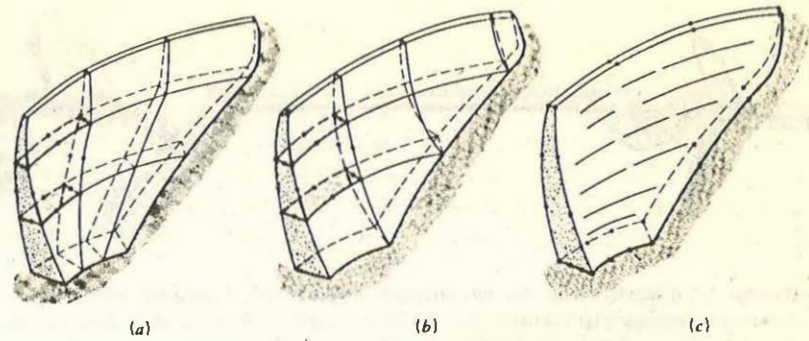
Masalah-masalah lain pada bidang industri yang dapat dipecahkan dengan metode elemen hingga diperlihatkan pada Gambar 1.1.5 sampai 1.1.9 pada Apendiks B.

Metode elemen hingga ini dapat dipakai untuk memecahkan berbagai masalah. Daerah yang dianalisis dapat mempunyai bentuk, beban, dan kondisi batas yang sembarang. Jaring-jaringnya dapat terdiri atas elemen yang berbeda jenis, bentuk dan besaran fisiknya. Kemudahan penggunaan berbagai hal tersebut bisa saja tergabung pada satu program komputer serba guna: yaitu dengan menyiapkan data pemilihan jenis, geometri, kondisi batas, elemen, dan sebagainya.

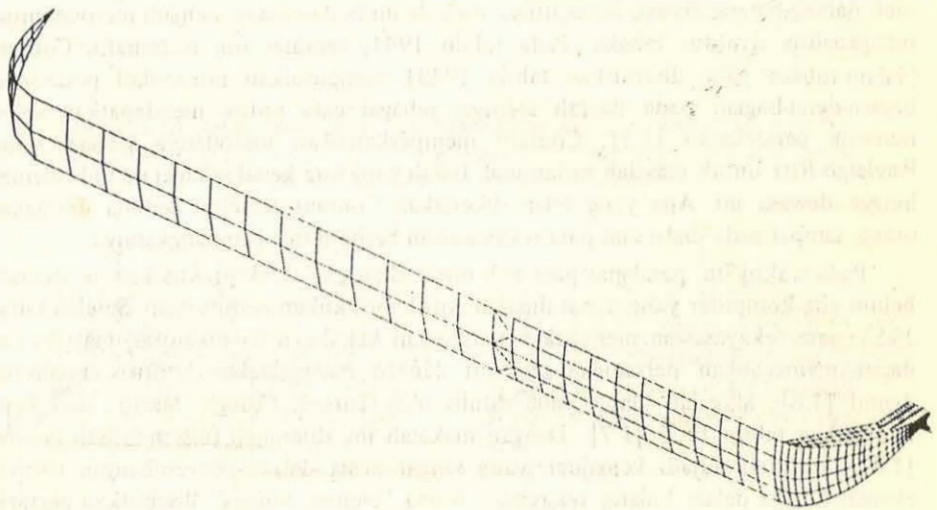
Keunggulan lain dari metode elemen hingga adalah adanya arti fisik yang cukup dekat antara jaring elemen dengan struktur aktualnya. Jaring yang dimaksud bukan merupakan abstrak matematis yang sulit untuk divisualisasikan.

Metode elemen hingga juga mempunyai kekurangan. Hasil yang diperoleh dengan metode ini untuk suatu masalah tertentu adalah berupa hasil numerik: tidak ada persamaan bentuk tertutup yang dapat dipakai untuk kasus serupa yang hanya berbeda

elemen
revolu-
ng segi
ur dan
delkan
a akan
beban

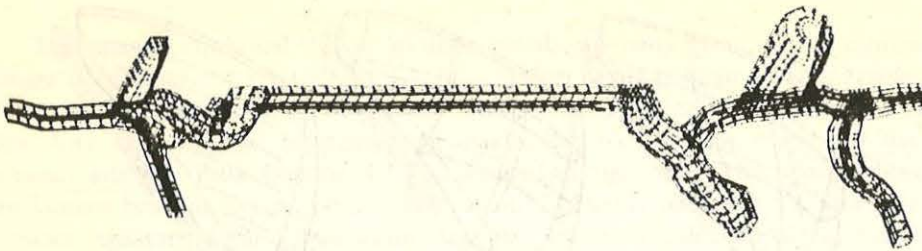


Gambar 1.1.4 Setengah lengkungan bendung, dimodelkan sebagai (a) elemen kua-drilateral dan (b) segitiga "kuadratik", dan (c) elemen tunggal "kubik" [1.1]. Titik-titik simpul elemen diperlihatkan sebagai titik hitam pada gambar.



Gambar 1.1.5 Alat tekanan dengan perkuatan pada satu kepalanya, untuk tujuan khusus. Kesimetrisan ditunjukkan dengan memodelkan segmen simetris dan menerapkan kondisi batas yang sesuai pada permukaan terpotongnya. (Atas izin A.O. Smith Corp. Data System Division, Milwaukee, Wisconsin.)

parameternya. Dengan metode ini komputer beserta program yang dapat dipercaya merupakan suatu keharusan. Selain itu diperlukan juga pengalaman dan intuisi rekayasa yang baik, agar diperoleh bentuk jaring yang memadai untuk setiap kasus. Banyak sekali data yang harus dimasukkan, begitu pula data keluaran yang telah disortir oleh program harus dicek kembali. Sekalipun demikian, kekurangan seperti ini bukan hanya terjadi pada metode elemen hingga.



Gambar 1.1.6 Model terperinci dari setengah rangka mobil, digunakan untuk mencari deformasi, tegangan, frekuensi alami, dan bentuk ragam. (Atas izin A.O. Smith Corp., Data System Division, Milwaukee, Wisconsin.)

Ringkasan sejarah elemen hingga. Pada tahun 1906 dan tahun-tahun berikutnya, para ahli riset mengusulkan metode "analogi *lattice*" untuk memecahkan masalah kontinum [1.2-1.4]¹. Disini suatu Kontinum didekati dengan jaring yang teratur yang terbentuk oleh batang-batang elastis. Selanjutnya metode ini berkembang menjadi metode untuk menganalisis struktur rangka. Pada tahun 1941, seorang ahli matematik Courant (dalam tulisan yang diterbitkan tahun 1943), mengusulkan interpolasi polinomial bagian-demi-bagian pada daerah segitiga, sebagai cara untuk mendapatkan solusi numerik pendekatan [1.5]. Courant memperkenalkan metodenya sebagai solusi Rayleigh-Ritz untuk masalah variasional. Inilah yang kita kenal sebagai metode elemen hingga dewasa ini. Apa yang telah dikerjakan Courant tersebut semula dilupakan orang, sampai pada suatu saat para rekayasawan berhasil mengembangkannya.

Pada waktu itu, pendapat para ahli masih dianggap tidak praktis karena memang belum ada komputer yang dapat dipakai untuk melakukan perhitungan. Setelah tahun 1953, para rekayasawan menuliskan persamaan kekakuan dalam notasi matriks dan dapat memecahkan persamaan tersebut dengan menggunakan bantuan komputer digital [1.6]. Makalah klasik yang ditulis oleh Turner, Clough, Martin, dan Topp diterbitkan tahun 1956 [1.7]. Dengan makalah ini, ditambah tulisan-tulisan lainnya [1.8], mulailah terjadi kemajuan yang sangat pesat dalam pengembangan metode elemen hingga dalam bidang rekayasa. Nama "elemen hingga" disebutkan pertama kali pada tahun 1960 [1.9]. Sejak tahun 1963 metode ini mulai dikenal sebagai sesuatu yang sangat menarik dipelajari oleh cendekiawan. Pada tahun 1967, banyak rekayasawan dan matematikawan yang bekerja dengan metode elemen hingga, tetapi tidak saling memperhatikan [1.10]. (Pada dewasa ini kedua kelompok tersebut sudah saling memperhatikan, akan tetapi sangat jarang matematikawan yang tertarik dengan rekayasa, begitu pula rekayasawan sering sulit mengerti pendapat matematikawan). Pada tahun 1961 telah diterbitkan sepuluh makalah mengenai elemen hingga, 134 makalah pada tahun 1966, dan 844 pada tahun 1971 [5.10]. Pada tahun 1979, dua dekade setelah aplikasi rekayasa dimulai, jumlah komulatif publikasi mengenai elemen hingga telah melampaui 7000 [1.19].

1. Nomor di dalam kurung siku menunjukkan referensi yang dicantumkan di bagian belakang buku ini.