MODEL MATEMATIKA SISTEM PERSEDIAAN EOQ UNTUK BARANG YANG HARGANYA MENURUN SECARA EKSPONENSIAL

DINA SUNDARI & AGUS SUKMANA

Published in :
MAJALAH ILMIAH MARANATHA
VOL. 31-1, ISSN 0854-8145
JANUARY, 2007

Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Parahyangan Catholic University
2007

Model Matematika Sistem Persediaan *EOQ* untuk Barang yang Harganya Menurun Secara Eksponensial

Dina Sundari[1] dan ***Agus Sukmana***[2]
KBI Matematika Industri, Jurusan Matematika,
Universitas Katolik Parahyangan, Bandung

Abstract

This paper deals with the development of Economic Order Quantity (EOQ) model when the price decreases exponentially and the total cost depends on the price. Khouja [2003] has investigated the model and found the optimal exact solution that involves an implicit equation. The approximation of the optimal solution was obtained by two terms Taylor series. We have found the explicit form of the exact solution using one and three terms of Taylor series.

Keywords: *Continuous price change, EOQ, Inventory Model.*

I. Pendahuluan

Model persediaan EOQ (*Economic Order Quantity)* adalah model persediaan jenis deterministik, yang besar permintaannya konstan dari waktu ke waktu. Model EOQ klasik telah banyak dibahas pada berbagai literatur salah satu diantaranya [Hopp, 1996]. Salah satu pengembangan dari model ini adalah dengan mengasumsikan harga barang turun secara eksponensial mengikuti pertambahan waktu, dan komponen-komponen biaya untuk mengelola persediaan berrgantung pada harga barang. Contoh penggunaan model ini, antara lain untuk persediaan barang-barang elektronik, yang harganya makin lama makin menurun. Khouja (2003) telah membahas model jenis ini, solusi optimal yang diperoleh memenuhi suatu persamaan berbentuk implisit. Dengan menggunakan pendekatan deret Taylor dua suku, diperoleh rumus eksplisitnya yang merupakan hampiran untuk solusi eksaknya. Dalam tulisan ini, dibahas penurunan persamaan bentuk implisit yang berbeda dengan yang diperoleh (Khouja, 2003), disertai penurunan rumus eksplisit dengan bantuan uraian Taylor satu dan tiga suku. Contoh numerik dibahas untuk memudahkan pembahasan.

[1] Mahasiswi Program Studi Matematika Unpar.
[2] Dosen tetap Jurusan Matematika, Jl Ciumbuleuit 94 Bandung 40141,
e-mail : asukmana@home.unpar.ac.id

II. Formulasi Model

Notasi yang digunakan:

D = Banyaknya permintaan selama selang waktu perencanaan.
S = Biaya pemesanan persatu kali pemesanan.
r = Prosentase biaya penyimpanan terhadap harga barang.
T = Panjang selang waktu perencanaan.
n = Banyaknya siklus selama selang waktu perencanaan.
τ = Panjang selang waktu untuk satu siklus.
u = Prosentase penurunan harga per unit barang per unit waktu.
C(t) = Harga barang per unit pada saat t
C_0 = Harga barang per unit pada saat t = 0
TC = Biaya untuk mengelola persediaan selama selang perencanaan..

Diasumsikan harga barang menurun secara eksponensial dan pada saat t memenuhi persamaan :

$$C(t) = C_0 e^{-bt} \qquad (1)$$

dengan

$$b = -\ln\left(1 - \frac{u}{100}\right) \qquad (2)$$

Biaya keseluruhan untuk mengelola persediaan tersebut terdiri atas komponen biaya : Pemesanan, Pembelian, dan Penyimpanan barang.

Biaya Pemesanan Barang : merupakan hasil kali dari biaya tiap kali melakukan pemesanan dengan frekuensi pemesanan selama selang perencanaan, ditulis :

$$\text{Biaya Pemesanan} = nS \qquad (3)$$

Biaya Pembelian Barang : bergantung pada harga barang perunit pada saat t, pada tulisan ini diasumsikan harga barang menurun secara eksponensial, ditulis:

$$\text{Biaya Pembelian} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_0 e^{-biT/n} DT}{n} \qquad (4)$$

Biaya Penyimpanan : juga bergantung pada harga barang per unit pada saat t, untuk sepanjang selang perencanaan ditulis:

$$\text{Biaya Penyimpanan} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{rC_0 e^{-biT/n} TD}{2n}\left(\frac{T}{n}\right) \qquad (5)$$

Sehingga seluruh biaya yang harus dikeluarkan untuk mengelola persediaan selama selang perencanaan adalah persamaan (3)+(4)+(5) :

$$TC = nS + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{DTC_0 e^{-biT/n}}{n} + \frac{DTC_0 e^{-biT/n}}{2n} r \frac{T}{n}$$

atau

$$TC = nS + \frac{DTC_0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-biT/n} + \frac{DrT^2C_0}{2n^2}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-biT/n} \qquad (6)$$

Bentuk $\sum_{i=0}^{n-1} e^{biT/n}$ merupakan deret geometri berhingga dengan rasio $e^{-bT/n}$ sehingga dapat dituliskan menjadi:

$$\sum_{i=0}^{n-1} e^{-biT/n} = \frac{(1-e^{-bT})}{(1-e^{-bT/n})} \qquad (7)$$

dan bila disubstitusikan ke dalam persamaan (6) akan diperoleh bentuk yang lebih sederhana, yaitu :

$$TC = nS + \frac{C_0DTe^{-bT}e^{bT/n}(2n+rT)(e^{bT}-1)}{2n^2(e^{bT/n}-1)} \qquad (8)$$

III. Optimisasi

Tujuan optimisasi adalah mencari ukuran lot Q^* yang meminimumkan biaya total untuk mengelola persediaan. Persamaan (8) tidak memuat bentuk Q sehingga optimasi dilakukan terhadap variabel n dengan menggunakan teknik kalkulus sederhana. Ukuran lot optimal dapat dicari melalui rumus $Q = \frac{DT}{n}$, di mana n memenuhi persamaan bentuk implisit:

$$\frac{dTC}{dn} = S + C_0DTe^{-bT}(e^{bT}-1)e^{bT/n}\left(\frac{-2nbT - brT^2 - 2n^2 - 2nrT}{2n^4(e^{bT/n}-1)} + \frac{(2n+rT)(e^{bT/n})bT}{2n^4(e^{bT/n}-1)^2}\right) = 0 \qquad (9)$$

selanjutnya Q^* disebut solusi optimal yang eksak.

Persamaan (9) berbeda dengan yang diperoleh [Khouja, 2003] yaitu:

$$\frac{dTC}{dn} = S + C_0DTe^{-bT}e^{bT/n}\frac{[2n^2+2bnT+2nrT+brT^2]}{2n^4(e^{bT/n}-1)} - \frac{2ne^{bT/n}(n+rT)}{2n^4(e^{bT/n}-1)} = 0 \qquad (10)$$

Perhitung n yang optimal dilakukan secara iteratif dengan menggunakan metode numerik sederhana. Untuk menghindari penyelesaian secara iteratif, digunakan uraian Taylor sehingga diperoleh hampiran untuk solusi optimalnya.

Khouja (2003) dengan menggunakan deret Taylor 2 suku memperoleh rumus eksplisit:

$$
\begin{aligned}
n &= \sqrt{\frac{C_0 DT(b+r)(e^{bt}-1)}{2e^{bT}bS}} - \frac{bT}{2} \\
\tau &= \frac{2e^{bT/2}\sqrt{bST}}{\sqrt{2C_0 D(b+r)(e^{bt}-1)} - be^{bT/2}\sqrt{bST}} \\
Q &= \frac{2e^{bT/2}D\sqrt{bST}}{\sqrt{2C_0 D(b+r)(e^{bt}-1)} - be^{bT/2}\sqrt{bST}}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Bila digunakan hampiran satu suku, kami peroleh :

$$
\begin{aligned}
n &= \sqrt{\frac{C_0 DrT(e^{bT}-1)}{e^{bT}2Sb}} \\
\tau &= \sqrt{\frac{Te^{bT}2Sb}{C_0 Dr(e^{bT}-1)}} \\
Q &= D\sqrt{\frac{Te^{bT}2Sb}{C_0 Dr(e^{bT}-1)}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Berikut akan dibahas penurunan rumus untuk 3 suku. Perhatikan uraian Taylor :

$$
e^{\frac{bT}{n}} = 1 + \frac{bT}{n} + \frac{b^2T^2}{2n^2} + \frac{b^3T^3}{6n^3} \tag{13}
$$

kemudian disubstitusikan kedalam persamaan (9) sehingga menjadi:

$$
S + C_0 DTe^{-bT}(e^{bT}-1)\left(1+\frac{bT}{n}+\frac{b^2T^2}{2n^2}+\frac{b^3T^3}{6n^3}\right)\left[\frac{-2nbT - brT^2 - 2n^2 - 2nrT}{2n^4\left(1+\frac{bT}{n}+\frac{b^2T^2}{2n^2}+\frac{b^3T^3}{6n^3}\right)} + \frac{(2n+rT)\left(1+\frac{bT}{n}+\frac{b^2T^2}{2n^2}+\frac{b^3T^3}{6n^3}\right)bT}{2n^4\left(1+\frac{bT}{n}+\frac{b^2T^2}{2n^2}+\frac{b^3T^3}{6n^3}\right)^2}\right] = 0 \tag{14}
$$

dan disederhanakan menjadi:

$$n^7 + n^6 bT + \frac{n^5\left(21Sb^3T^2 - 18C_0DTb - 18C_0DTr + 18C_0DTe^{-bT}b + 18C_0DTe^{-bT}r\right)}{36Sb}$$
$$+\frac{n^4\left(Sb^3T^3 - 4C_0DT^2b - 6C_0DT^2r + 4C_0DT^2e^{-bT}b + 6C_0DT^2e^{-bT}r\right)}{6S}$$
$$+\frac{n^3\left(Sb^4T^4 - 15C_0DT^3b^2 - 33C_0DT^3br + 4C_0DT^3e^{-bT}b^2 + 33C_0DT^3e^{-bT}br\right)}{36S}$$
$$+\frac{n^2\left(-3C_0DT^4b^2r - C_0DT^4b^3 + 3C_0DT^4e^{-bT}b^2r + C_0DT^4e^{-bT}b^3\right)}{6S}$$
$$+\frac{n\left(-6C_0DT^5b^3r - C_0DT^5b^4 + 6C_0DT^5e^{-bT}b^3r + C_0DT^5e^{-bT}b^4\right)}{36S}$$
$$+\frac{\left(-C_0DT^6b^4r + C_0DT^6e^{-bT}b^4r\right)}{36S} = 0 \qquad (15)$$

Dengan mengasumsikan nilai n cukup besar, kedua ruas dibagi n^5 dengan tujuan mengabaikan 5 suku terakhir dari persamaan (15) karena nilainya mendekati nol, akhirnya diperoleh bentuk yang lebih sederhana dari persamaan (15) :

$$n^2 + nbT + \frac{\left(21Sb^3T^2 - 18C_0DTb - 18C_0DTr + 18C_0DTe^{-bT}b + 18C_0DTe^{-bT}r\right)}{36Sb} = 0$$

yang menghasilkan solusi optimal:

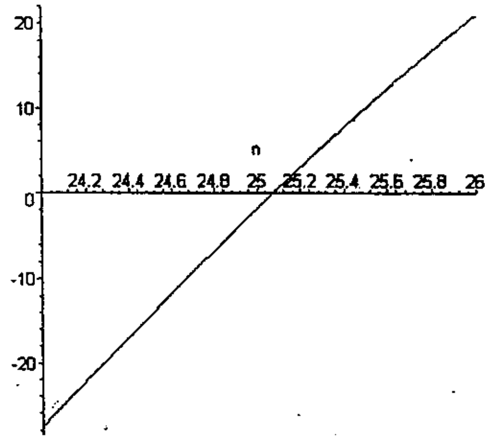
$$n = \sqrt{\frac{3TC_0D(b+r)(e^{bT}-1) - 2b^3T^2Se^{bT}}{6Sbe^{bT}}} - \frac{bT}{2}$$
$$\tau = \frac{2e^{bT/2}\sqrt{bST}}{\sqrt{2C_0D(b+r)(e^{bT}-1) - 2b^3TSe^{bT}} - be^{bT/2}\sqrt{SbT}} \qquad (16)$$
$$Q = \frac{2De^{bT/2}\sqrt{bST}}{\sqrt{2C_0D(b+r)(e^{bT}-1) - 2b^3TSe^{bT}} - be^{bT/2}\sqrt{SbT}}$$

IV. Contoh Numerik

Pada bagian ini akan dibahas 2 contoh numerik untuk memberikan gambaran perhitungan dan kinerja model-model tersebut, serta membandingkan keakuratan dari rumus-rumus hampirannya.

Contoh 1 :
Diketahui: D = 100.000 unit pertahun, S = $ 300 tiap pemesanan, r = 8 % , C_0= $ 8 perunit barang, u = 1 (1 % per minggu), T= 1 tahun (52 minggu).

Solusi optimal eksak yang diproleh dari persamaan (9) dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1 Nilai optimal untuk n contoh 1

Dari gambar tersebut terlihat bahwa solusi optimalnya dicapai pada nilai n antara 25 dengan 25,2 (titik potong dengan absis). Sedangkan untuk solusi hampiran dapat dilihat pada tabel berikut:

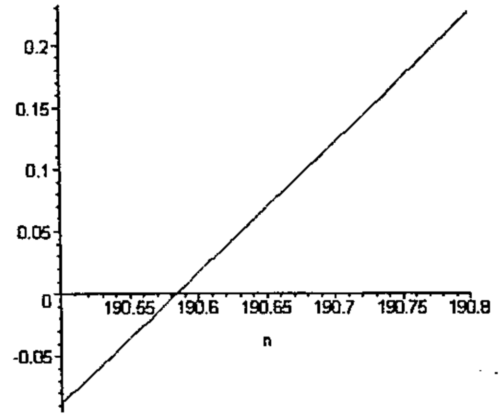
Tabel 1

	Model eksak	Model hampiran 1 suku	Model hampiran 2 suku	Model hampiran 3 suku
Q	4000	10971	4040	4049
n	25	9	$24.75 \approx 25$	$24.73 \approx 25$
TC	\$639.765,7	\$646.857,2993	\$639.757,42	\$639.757,63

Ternyata hampiran dengan 1 suku, nilainya jauh dari solusi optimal eksak yang kita inginkan, sedangkan untuk hampiran 2 dan 3 suku sudah cukup dekat dengan nilai eksaknya.

Contoh 2 :
Contoh ini menggunakan selang perencanaan yang lebih panjang dari pada contoh sebelumnya.
Diketahui: $D = 250.000$ per tahun, $S = \$\ 100$ tiap pemesanan, $r = 12\ \%$,
$C_0 = \$\ 10$ per unit barang, $u = 1$ (1 % per minggu), T=3 tahun (156 minggu).

Solusi eksak dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2 Nilai optimal untuk n untuk contoh 2

Perbandingan solusi hampiran dengan solusi eksak dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2

	Model Eksak	Model Hampiran 1 suku	Model Hampiran 2 suku	Model Hampiran 3 suku
Q	3926	9085	3931	3942
n	191	83	190,257	190,255
TC	3.824.509,48	3.838.728,442	3.824.510,102	3.824.510,104

Tampak bahwa hampiran satu suku pada kasus ini juga memberikan solusi yang berbeda cukup jauh dari solusi eksaknya, sedangkan hampiran dua dan tiga suku memberikan solusi yang dekat ke nilai optimal eksaknya.

V. Simpulan

Dari hasil pembahasan diatas, dapat disimpulkan sebagai berikut:

- Solusi eksak dapat dicari secara iteratif dari persamaan (9) yang berbentuk implisit.
- Hampiran solusi dapat diperoleh dari persamaan bentuk eksplisit (11), (12), dan (16) yang diturunkan dengan bantuan uraian Taylor.
- Hampiran solusi dengan menggunakan pendekatan satu suku nilainya jauh berbeda dengan solusi optimalnya.
- Hampiran solusi dengan menggunakan pendekatan dua dan tiga suku hasilnya hampir sama dengan solusi optimal yang eksak.

- Penambahan banyaknya suku untuk menghampiri solusi optimal tidak selalu meningkatkan keakuratan hampiran, tetapi malah menambah kompleks rumus eksplisitnya. Hampiran dengan dua suku sudah menghasilkan hasil yang baik.

Daftar Pustaka

Hopp, W.J. dan Spearman, M.L. 1996, *Factor Physics:Foundations of Manufacturing Management*, Richard D. Irwin.

Khouja, M., dan Park, S. 2003, Optimal lot sizing under continuous price decrease, *Omega The International Journal of Management Science*, 31, hlm 539-545.