

 PENERBIT ERLANGGA

Wono Setya Budhi
Bana G. Kartasasmita



Berpikir
Matematis

Matematika untuk Semua

4/03/2016

Berpikir
Matematis

Matematika untuk Semua

No. Kelas 510.076 BUD b

No Induk 140737 Tgl 4/03/2016

Penyedia/Beli Erlangga

301

**UNDANG-UNDANG REPUBLIK INDONESIA
NOMOR 19 TAHUN 2002
TENTANG HAK CIPTA**

**PASAL 72
KETENTUAN PIDANA
SANKSI PELANGGARAN**

1. Barangsiapa dengan sengaja dan tanpa hak mengumumkan atau memperbanyak suatu Ciptaan atau memberikan izin untuk itu, dipidana dengan pidana penjara paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).
2. Barangsiapa dengan sengaja menyerahkan, menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu Ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Berpikir
Matematis

Matematika untuk Semua

Wono Setya Budhi
Bana G. Kartasasmita



510.076

BUD

b

140737 - R/FTIS

4/03/2016



PENERBIT ERLANGGA

Jl. H. Baping Raya No. 100

Ciracas, Jakarta 13740

Website: www.erlangga.co.id

(Anggota IKAPI)

Berpikir Matematis **Matematika** untuk Semua

Hak cipta © 2015 pada *Penulis*
Hak terbit pada *Penerbit Erlangga*

Penulis
Wono Setya Budhi
Bana G. Kartasasmita

Editor
Ade M. Drajat

Buku ini diset dan dilayout oleh bagian produksi *Penerbit Erlangga* dengan
Power Macintosh G5 (Times 10 pt.)

Setting & Layout: **Divisi Perti**

Desain Sampul: **Yudi Nur Riyadi**

Percetakan: **PT Gelora Aksara Pratama**

18 17 16 15 5 4 3 2

*Dilarang keras mengutip, menjiplak, memfotokopi, atau memperbanyak dalam bentuk apa pun, baik sebagian atau keseluruhan isi buku ini, serta memperjualbelikannya tanpa izin tertulis dari **Penerbit Erlangga**.*

© HAK CIPTA DILINDUNGI OLEH UNDANG-UNDANG

Riwayat Singkat Para Penulis

Prof. Marcus Wono Setya Budhi, Ph.D. menyelesaikan studi sebagai Sarjana dan Magister Matematika di Institut Teknologi Bandung. Pada tahun 1993 beliau menyelesaikan Program Doktorat di bidang Matematika di University of Illinois at Urbana-Champaign, Amerika Serikat. Sejak lulus sebagai sarjana, beliau berkarir di Departemen Matematika ITB sampai sekarang. Selain menjadi teaching assistant di Urbana-Champaign, beliau juga mengajar di Universitas Pendidikan Indonesia.

Bana G. Kartasasmita, Ph.D. menyelesaikan studi sebagai Sarjana Teknik Penerbangan dari Wichita State University di Kansas, Amerika Serikat. Beliau kemudian meneruskan pendidikan pascasarjana di University of Illinois at Urbana-Champaign dan berhasil mendapatkan gelar Magister Matematika dan Doktor Pendidikan Matematika. Sejak kembali ke Indonesia pada tahun 1975, beliau berkarir di Institut Teknologi Bandung selama 28 tahun. Beliau kini menjadi pengajar pascasarjana pendidikan matematika pada Universitas Pendidikan Indonesia dan Universitas Pasundan di Bandung.



Daftar Isi

Prakata	vi
Bab 1 Setiap Orang Dapat Memulainya	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Latihan.....	5
Bab 2 Melihat Kembali.....	6
2.1 Soal 1.1	6
2.2 Soal 1.2	7
2.3 Soal 1.3	8
2.4 Latihan.....	8
Bab 3 Mencoba dan Memperbaiki	9
3.1 Mereka Mencoba	9
3.2 Melangkah dan Memperbaiki.....	10
3.3 Penyelesaian Numerik	11
3.4 Latihan.....	13
Bab 4 Kuliah Dari Polya.....	14
4.1 Pendahuluan	14
4.2 Soal yang Dibahas	14
4.3 Contoh dalam Aljabar.....	20
4.4 Latihan.....	24
Bab 5 Pola	27
5.1 Pendahuluan	27
5.2 Mencari Data.....	27
5.3 Latihan.....	29
Bab 6 Barisan dengan Selisih Tetap.....	30
6.1 Latihan.....	32
Bab 7 Barisan dengan Selisih Tingkat Kedua Konstan	33
7.1 Teknik Gauss.....	35
7.2 Teknik Lainnya	38
7.3 Latihan.....	40

Bab 8	Barisan Dengan Pola Perkalian.....	41
8.1	Teknik Lainnya.....	42
8.2	Latihan.....	43
Bab 9	Teknik Membandingkan Lainnya.....	45
9.1	Membandingkan dengan Operasi Penjumlahan.....	45
9.2	Membandingkan dengan Operasi Perkalian.....	46
9.3	Latihan.....	47
9.4	Soal Mencari Pola.....	47
Bab 10	Generalisasi Pola: Rumus Rekursif.....	49
10.1	Barisan Fibonacci.....	49
10.2	Menara Hanoi.....	51
10.3	Teknik Penyelesaian Rumus Rekursif.....	53
10.4	Latihan.....	57
Bab 11	Induksi Matematika.....	61
11.1	Contoh Penggunaan Prinsip Induksi Matematika.....	62
11.2	Catatan Tentang Syarat Induksi.....	64
11.3	Prinsip Induksi Matematika Lainnya.....	65
11.4	Contoh-Contoh Lainnya.....	66
11.5	Latihan.....	71
Bab 12	Analogi.....	73
12.1	Pendahuluan.....	73
12.2	Analogi pada Geometri.....	74
12.3	Latihan.....	76
12.4	Benda dalam Ruang yang Beranalogi dengan Trapesium.....	76
12.5	Latihan.....	77
12.6	Poligon Beraturan dalam Ruang.....	78
12.7	Analogi Volume Benda.....	82
12.8	Latihan.....	84
12.9	Analogi pada Aljabar.....	87
12.10	Analogi dari Dua Dunia.....	98
Bab 13	Penggunaan Analisis Dimensi.....	99
13.1	Pendahuluan.....	99
13.2	Analisis Dimensi, Rumus Pythagoras.....	99
13.3	Latihan.....	101
13.4	Analisis Dimensi, Teorema Buckingham.....	101
13.5	Latihan.....	106
13.6	Bandul dengan Gesekan.....	106
13.7	Pekerjaan Taylor Untuk Ledakan Bom Atom.....	109

Bab 14 Generalisasi	112
14.1 Generalisasi Rumus Pythagoras	112
14.2 Contoh Generalisasi Lainnya	116
14.3 Latihan.....	120
Bab 15 Abstraksi	123
15.1 Pendahuluan	123
15.2 Teori Group.....	124
15.3 Contoh Lainnya.....	128
15.4 Latihan.....	132
Bab 16 Mempertanyakan Lebih Lanjut Tentang Fakta (<i>Problem Posing</i>).....	134
16.1 Pendahuluan	134
16.2 Tripel Pythagoras	135
16.3 Jawaban Tentang tripel Pythagoras.....	137
16.4 Soal yang Berkaitan dengan Tripel Pythagoras	145
16.5 Barisan Fibonacci	146
16.6 Soal Barisan Lainnya.....	152
Bab 17 Teknik Penyelesaian Soal.....	155
17.1 Terka, Uji dan Perbaiki	155
17.2 Bekerja Mundur	160
17.3 Cara Pandang Berbeda	161
17.4 Menyelesaikan Soal yang Lebih Sederhana	164
17.5 Kasus Ekstrim	166
17.6 Membuat Gambar	168
17.7 Dengan Cara Aljabar	171
Bab 18 Melakukan Investigasi Lengkap.....	173
18.1 Pendahuluan	173
18.2 Melakukan Penyelidikan Awal	173
18.3 Menyimpulkan Penyelidikan	176
18.4 Menyelesaikan Hal Yang Lebih Sederhana.....	180
18.5 Rumus Untuk $S(n)$	184
18.6 Latihan.....	184
Bab 19 Soal Eksplorasi.....	185
19.1 Penyelidikan Tentang Bilangan Prima.....	191
Penuntun Jawaban Latihan	194
Daftar Pustaka	260
Kredit Foto	261
Indeks	262

Setiap Orang Dapat Memulainya

1.1 Pendahuluan

1.2 Latihan

1.1 Pendahuluan

Seringkali orang memandang bahwa mempelajari matematika adalah mempelajari rumus yang ada, kemudian memberikan contoh soal bagaimana rumus tersebut dipakai. Tahap awal dari proses ini adalah memberikan soal yang menggunakan rumus sejenis dengan kombinasi antara variabel yang diketahui nilainya dan variabel yang dicari nilainya. Dengan cara demikian, siswa terlihat dengan cepat dapat menyelesaikan soal-soal yang berkaitan, dan tentu siswa akan dapat menyelesaikan soal serupa pada saat ujian yang dilakukan dalam waktu relatif dekat. Tetapi kemudian, setelah beberapa waktu, siswa akan melupakan rumus-rumus tersebut. Jika diberikan soal yang sama, tetapi setelah waktu yang cukup lama, pada umumnya siswa tidak dapat mengerjakan soal tersebut. Yang menyedihkan, siswa tidak dapat melakukan apapun atau mempunyai suatu gagasan untuk dapat menyelesaikan soal yang sama itu. Keuntungan siswa yang telah mempelajari matematika menjadi tidak tampak. Yang mampu dilakukan siswa hanya sekedar melakukan perhitungan, yang juga dipelajari di mata pelajaran yang lain.

Situasi serupa juga terjadi pada pengajaran yang menekankan matematika sebagai pelajaran melatih cara berpikir dalam pandangan formal: Setiap rumus yang diberikan harus dibuktikan dan dijelaskan oleh guru. Tetapi apa yang terjadi? Kita semua sudah mengalami pengajaran seperti ini. Siswa tetap tidak mengerti apa yang diuraikan di dalam bukti tersebut. Pada akhirnya, siswa hanya menghafal rumus akhir dan mengingat-ingat bukti. Situasi akhirnya tidak berbeda banyak dengan keadaan yang digambarkan pada paragraf di atas. Setelah beberapa lama, semua pelajaran tersebut dilupakan. Sebagai bukti bahwa siswa telah mempelajari matematika di SMP hanyalah sekedar ijazah atau surat keterangan lulus. Kepandaian matematika yang dipelajari di SMP sudah dilupakan semua.

Tujuan utama mempelajari matematika adalah dapat menemukan cara menyelesaikan soal. Yang dimaksud dengan soal

adalah suatu hal yang hasil akhirnya, atau cara menyelesaikannya, belum diketahui. Buku ini membahas cara-cara untuk meningkatkan kemampuan menyelesaikan soal, yang dimulai dengan sangat awal dan sederhana. Pada buku ini menyelesaikan soal artinya tidak harus dalam bentuk penyelesaian yang canggih atau sangat cepat, tetapi lebih diutamakan bahwa masalah dapat diselesaikan dengan penyelesaian yang dapat dilakukan oleh kebanyakan siswa, dan jika mungkin berasal dari siswa sendiri. Penyelesaian tersebut dipandang sangat baik jika dapat dimengerti oleh siswa dengan pengetahuan yang dimilikinya. Ini merupakan tahap awal dari kemampuan menyelesaikan soal.

Tahap selanjutnya adalah mencoba memperbaiki cara menjawab soal yang ada. Sangatlah menarik untuk berusaha mengeneralisasikan soal dan mencoba memperoleh jawaban yang mungkin. Untuk siswa dengan tingkat yang lebih lanjut dapat menggunakan teknik matematika yang lebih tinggi.

Tujuan utama dari pembicaraan ini adalah membangun suatu inisiatif penyelesaian soal yang berasal dari murid. Jika siswa telah terbiasa dengan cara ini, maka siswa yang lulus adalah siswa yang mempunyai inisiatif dan kepercayaan diri dalam menghadapi berbagai soal yang diberikan. Teknik yang diberikan seringkali memerlukan waktu cukup panjang. Hal ini juga akan berdampak positif pada siswa, khususnya untuk melatih ketekunan.

Tiga soal berikut tentu dapat diselesaikan dengan menggunakan variabel. Tetapi, penggunaan variabel seperti itu hanya berlaku untuk tingkat SMP atau SMA. Untuk tingkat sekolah dasar harus dicari cara penyelesaian yang lebih sederhana.

Soal 1.1

Beberapa minggu lalu Tuti mempunyai tabungan sejumlah tertentu. Selanjutnya, ia menabung dengan jumlah tetap. Pada hari Sabtu yang lalu jumlah uang di tabungannya adalah Rp185.000,-, sedangkan hari Sabtu ini jumlah uang di tabungannya adalah Rp241.000,-. Berapa jumlah uang di tabungan Tuti mula-mula dan berapa jumlah uang yang ditabung setiap hari jika pada saat permulaan jumlah uang di tabungan Tuti lebih banyak daripada jumlah uang yang ditabung per hari tetapi masih kurang dari dua kalinya.

Jawab:

Soal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan barisan. Tetapi, jika siswa belum mengetahui tentang barisan maka tidak berarti bahwa mereka tidak bisa menyelesaikan soal ini. Cara yang ampuh untuk menyelesaikan hal ini adalah cara menebak dan memperbaiki kembali hasil yang diperoleh. Untuk mudahnya, buatlah tabel berikut:

Sabtu	Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
1	2	3	4	5	6	7	8
185							241

Selanjutnya, kita coba dengan beberapa bilangan.

Sabtu	Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
1	2	3	4	5	6	7	8
185	186	187	188	189	190	191	192 < 241

Jika dianggap bahwa setiap hari Tuti hanya menabung Rp1.000,- maka hasilnya kurang dari Rp241.000,-, yaitu hanya menghasilkan sebesar Rp192.000,-. Dengan demikian kita mencoba bilangan yang lebih besar, misalnya Rp10.000,-.

Sabtu	Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
1	2	3	4	5	6	7	8
185	195	205	215	225	235	245	255 > 241

Kali ini hasilnya terlalu besar, yaitu Rp255.000,-, dibandingkan dengan hasil yang diketahui. Kita dapat mencoba sebarang bilangan lain, tetapi tebakan yang paling sederhana adalah

$$\frac{10 + 1}{2} \approx 5$$

yaitu bilangan yang berada di tengah dari bilangan-bilangan yang memberikan hasil yang terlalu kecil dan terlalu besar. Di sini dilakukan pembulatan agar mudah menghitungnya. Kita melakukan perhitungan sekali lagi, yaitu:

Sabtu	Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
1	2	3	4	5	6	7	8
185	190	195	200	205	210	215	220 < 241

Hasilkali ini terlalu kecil, jadi nilai yang dicari tentu lebih besar dari 5 dan kurang dari 10. Tebakan berikutnya adalah

$$\frac{10 + 5}{2} \approx 8$$

Seperti sebelumnya, kita melakukan pembulatan untuk memudahkan perhitungan.

Sabtu	Minggu	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu
1	2	3	4	5	6	7	8
185	193	201	209	217	225	233	241

Akhirnya kita memperoleh jawab yang diinginkan. Jadi, Tuti setiap hari menabung Rp8.000,-. Sekarang, kita akan mencari jumlah uang Tuti pertama-tama. Dengan melakukan pengurangan berkali-kali atau penjumlahan berkali-kali,

185, 177, 169, 161, ... , 33, 25, 17, 9, 1

Berdasarkan keterangan soal maka kita mengetahui bahwa jumlah uang Tuti pertama-tama adalah Rp9.000,-, yaitu lebih banyak daripada yang ditabung per hari tetapi kurang dari dua kalinya.

Soal 1.2

Dalam penilaian buku *Matematika SMP dan SMA*, peserta yang masuk sebanyak 136 seri. Satu seri buku *Matematika SMP* terdiri dari 3 buku, dan satu seri buku *Matematika SMA* terdiri dari 5 buku. Jumlah buku yang masuk sebanyak 506 buku. Berapa jumlah masing-masing seri buku *Matematika SMP* dan buku *Matematika SMA* yang ikut penilaian ini?

Jawab:

Sekali lagi, dengan cara mencoba dan mengulangi, kita dapat membuat tabel berikut:

Seri buku Matematika SMP	Seri buku Matematika SMA	Jumlah Seri	Jumlah Buku
136	0	136	$136 \times 3 = 408$

Pertama, kita menerka bahwa semua buku adalah seri buku *SMP*. Ternyata jumlah buku 408 buah, kurang dari 506. Selanjutnya, dengan menambah seri buku *SMA*, diperoleh:

Seri buku Matematika SMP	Seri buku Matematika SMA	Jumlah Seri	Jumlah Buku
136	0	136	$136 \times 3 = 408$
135	1	136	$135 \times 3 + 5 = 410$
134	2	136	$134 \times 3 + 2 \times 5 = 412$
⋮	⋮	⋮	⋮
88	48	136	$88 \times 3 + 48 \times 5 = 504$
87	49	136	$87 \times 3 + 49 \times 5 = 412$

Kita ulangi perhitungan ini terus-menerus sampai diperoleh jawaban yang benar.

Soal 1.3

Pak Tani ingin membuat kandang dengan bentuk persegi panjang. Luas kandang adalah 483 m^2 , kelilingnya adalah 88 m. Berapa meter ukuran lebar dan panjang dari persegi panjang itu?

Jawab:

Pertama-tama, dengan cara dicoba dan diperbaiki kembali, jika panjang mempunyai ukuran 0 m maka agar memperoleh keliling 88 m diperlukan ukuran lebar sebesar 44 m. Tetapi ukuran ini menghasilkan luas sama dengan nol. Selanjutnya dengan menambah ukuran panjang menjadi 1 m, ukuran lebar harus berukuran. Perhitungan lebih lengkap dapat dilihat pada tabel berikut:

Lebar	Panjang	$\frac{1}{2}$ Keliling	Keliling	Luas
0	44	44	88	0
1	43	44	88	43
2	42	44	88	84
3	41	44	88	123

Lebar	Panjang	$\frac{1}{2}$ Keliling	Keliling	Luas
4	40	44	88	160
5	39	44	88	195
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	24	44	88	480
21	23	44	88	483

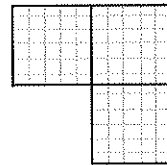
Kita lanjutkan perhitungan ini sampai diperoleh jawaban yang benar.

1.2 Latihan

1. Suatu pesta sekolah dihadiri oleh anak sendiri, anak dengan satu orang tuanya, atau orang tua sendiri. Setelah didaftar, $\frac{4}{9}$ dari anak yang hadir ditemani (satu) orang tuanya. Orang tua yang hadir dengan anaknya berjumlah $\frac{1}{5}$ dari orang tua yang hadir. Jika jumlah yang hadir (anak dan orang tua) ada 609 orang, berapa jumlah masing-masing anak dan orang tua?
2. Misalkan kita mempunyai kertas yang panjang dengan lebar secukupnya. Pertama, peganglah kedua ujung kertas itu, dan lipatlah salah satu ujung ke ujung yang lain sehingga panjang kertas menjadi setengahnya. Kemudian, tekanlah lipatan kertas itu. Lakukan hal yang sama beberapa kali. Berapakah lipatan yang ada setelah operasi di atas dilakukan sepuluh kali?
3. Bilangan seperti 12321 disebut *palindrom*, sebab memberikan urutan angka yang sama jika dibaca dari kiri maupun jika dibaca dari kanan. Ada

dugaan bahwa bilangan-bilangan palindrom yang terdiri dari empat angka selalu habis dibagi 11. Ujilah!

4. Selidiki apakah papan-papan catur berukuran 2×2 persegi, 4×4 persegi, atau 8×8 persegi yang diambil satu perseginya dapat ditutup oleh ubin yang terdiri dari 3 persegi yang berbentuk *L* dengan bentuk seperti pada Gbr. 1.1.



Gambar 1.1 Soal No. 4 dan 5.

5. Perhatikan bahwa papan catur 5×5 yang satu kotak ujungnya dibuang dapat ditutup dengan ubin tiga persegi berbentuk *L* seperti pada Gbr. 1.1.