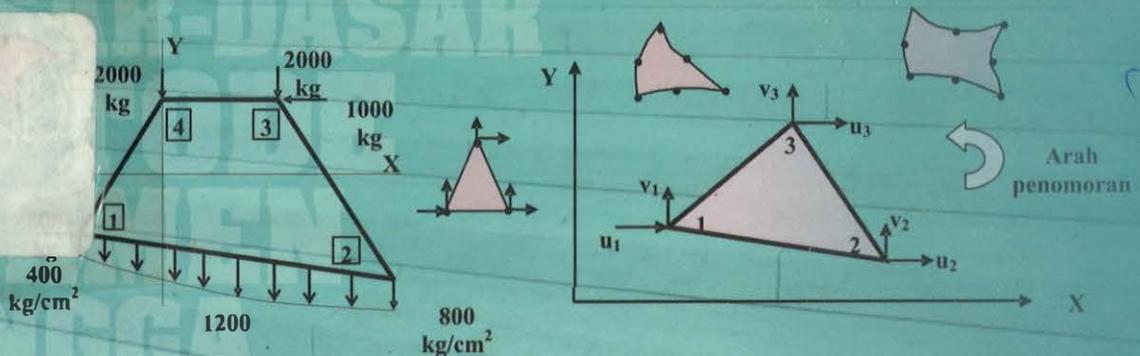


DASAR-DASAR METODE ELEMEN HINGGA

Winarni Hadi pratomo



DASAR-DASAR METODE ELEMEN HINGGA



624.171
HAD
d.

Winarni Hadi pratomo

Lektor Kepala pada Program Studi Teknik Sipil
Fakultas Teknik Universitas Katolik Parahyangan Bandung

R/
124082 SB /PTS
16.3.09

Katalog dalam terbitan (KDT)

Buku dasar-dasar metode elemen hingga

Winarni Hadipratomo. -

vi, 171 hlm. ; 25 x 17,5 cm. (tidak termasuk bibliografi)

ISBN 979-99658-3-7

Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun, termasuk fotokopi, tanpa izin tertulis dari penerbit.

DASAR-DASAR METODE ELEMEN HINGGA

Winarni Hadipratomo

Hak Cipta dilindungi oleh Undang-undang

Perancang Sampul & Isi : CONCEPT Viscom

Cetakan ke-1 : 2005

Dicetak dan diterbitkan oleh:

PT Danamartha Sejahtera Utama (anggota IKAPI)

Jl. Cihampelas 169, Bandung 40131

PRAKATA

Dengan makin banyaknya pengguna sarana komputer, dirasakan adanya kebutuhan untuk dapat mempercepat dan menyederhanakan proses analisis struktur. Memang sebelum beralih ke analisis struktur dengan menggunakan komputer, pengetahuan dasar yang termasuk dalam Mekanika Teknik atau yang belakangan disebut Mekanika Rekayasa, tidak dapat ditinggalkan. Prinsip-prinsip dasar dalam Mekanika Teknik tetap diperlukan sebagai dasar analisis.

Tahap berikutnya adalah Analisis Struktur dengan Metode Kekakuan Langsung. Metode ini menggunakan proses operasi matriks, sehingga sering disebut Analisis Struktur dengan Metode Matriks (ASDM). Dalam buku ini dijelaskan secara singkat metode kekakuan langsung yang menjadi dasar dari Metode Elemen Hingga.

Harapan penulis, dengan adanya penjelasan singkat tentang ASDM akan dapat menjembatani para pembaca yang baru mulai mengenal Metode Elemen Hingga. Karena buku ini ditujukan untuk pemula, maka pembahasan dibatasi mengenai elemen satu dimensi, elemen segitiga, elemen segiempat 4 titik nodal dengan beban sebidang, serta contoh-contoh soal yang berkaitan, baik yang sudah diselesaikan maupun yang belum diselesaikan.

Winarni Hadipratomo



DAFTAR ISI

Prakata	i
Daftar Isi	iii
Daftar Notasi	vi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Sejarah Perkembangan	1
1.2 Masalah Dalam Metode Elemen Hingga	2
BAB 2 ANALISIS DENGAN MATRIKS	3
2.1 Derajat Kebebasan Dan Syarat Batas	3
2.2 Metode Kekakuan Langsung	5
BAB 3 LANGKAH-LANGKAH MEH	11
3.1 Langkah 1. Deskretisasi dan Pemilihan Konfigurasi Elemen	11
3.2 Langkah 2. Memilih Model atau Persamaan Polinomial	16
3.3 Langkah 3. Menentukan Hubungan Tegangan dan Regangan	17
3.4 Langkah 4. Menurunkan Persamaan Elemen	21
3.5 Langkah 5. Perakitan Persamaan Elemen ke Persamaan Global	21
3.6 Langkah 6. Penyelesaian Persamaan: <i>Primary Unknown</i>	21
3.7 Langkah 7. Penyelesaian Besaran Kedua	22
3.8 Langkah 8. Interpretasi Hasil	22
BAB 4 JENIS-JENIS ELEMEN	23
4.1 Elemen Satu Dimensi	23
4.2 Elemen Dua Dimensi	24
4.3 Elemen Selaput (<i>Shell</i>)	25
4.4 Elemen Tiga Dimensi	25
4.5 Elemen Simetris-Aksial	25
4.6 Ringkasan Jenis Elemen	25

BAB 5	SISTEM KOORDINAT REFERENSI	29
5.1	Jenis Sistem Koordinat	29
5.2	Elemen Satu Dimensi	30
5.3	Elemen Segitiga	32
BAB 6	ELEMEN SATU DIMENSI	35
6.1	Pembentukan Fungsi Peralihan	35
6.2	Penurunan Regangan dari Energi Regangan	37
6.3	Energi Potensial dari Beban Kerja	37
6.4	Prinsip Energi Potensial Minimum	40
6.5	Penyelesaian Soal Elemen Satu Dimensi	41
6.6	Soal Latihan	49
BAB 7	ELEMEN SEGITIGA	51
7.1	Koordinat Global	51
7.1.1	Derajat Kebebasan dan Fungsi Peralihan	51
7.1.2	Regangan dan Energi Regangan	54
7.1.3	Energi Potensial Beban	55
7.1.4	Energi Potensial Total	64
7.1.5	Fungsi Tegangan – Regangan	65
7.2	Koordinat Lokal Elemen	66
7.2.1	Fungsi Peralihan	66
7.2.2	Regangan dan Energi Regangan	68
7.2.3	Energi Potensial Beban	69
7.2.4	Transformasi Koordinat Lokal Menjadi Koordinat Global	70
7.2.5	Penggabungan Elemen	71
7.2.6	Detail Prosedur Penggabungan Elemen	71
7.3	Penyelesaian Soal Elemen Segitiga	73
7.4	Soal Latihan	98
BAB 8	FORMULA INTERPOLASI LAGRANGE	103
8.1	Formula Interpolasi untuk Satu Variabel Bebas	103
8.2	Interpolasi untuk Dua Variabel Bebas	107

BAB 9	INTEGRASI DENGAN GAUSS QUADRATURE	105
BAB 10	DETERMINAN JACOBIAN	111
BAB 11	ELEMEN SEGI-EMPAT 4 TITIK NODAL	119
11.1	Koordinat Alamiah Elemen Segi-empat	120
11.2	Fungsi Bentuk Elemen Segi-empat	121
11.3	Matriks Regangan --- Peralihan Elemen	122
11.4	Matriks Kekakuan Elemen Segi-empat	126
11.5	Pedoman untuk Pemilihan Koordinat	128
11.6	Gaya Nodal Ekuivalen	130
11.7	Penyelesaian Soal Elemen Segi-empat	137
11.8.	Soal Latihan	149
BAB 12	SOLUSI DENGAN PROGRAM SAP2000	151
Soal 1.	Balok Kantilever	144
Soal 2.	Balok Di atas Dua Perletakan Bebas	156
Soal 3.	Dinding Geser	157
Soal 4.	Tangga Bentuk U	158
DAFTAR PUSTAKA		171

DAFTAR NOTASI

A	=	Luas Penampang Elemen Satu Dimensi
$[A]$	=	Matriks Transformasi Elemen Segitiga
A_{123}	=	Luas Elemen Segitiga 1-2-3
$[B]$	=	Matriks Fungsi Peralihan Regangan
$[D]$	=	Matriks Bahan
E	=	Modulus Elastisitas
F_i, F_j	=	Gaya Nodal pada titik nodal i, j
$ J $	=	Determinan Jacobian
K	=	Matriks Kekakuan
$[N]$	=	Matriks Fungsi Bentuk
Q_{BF}	=	Beban Gaya Tubuh elemen
Q_T	=	Beban Traksi elemen
Q_{TEMP}	=	Beban Suhu elemen
R_{BF}	=	Beban Gaya Tubuh global
R_{NF}	=	Beban Titik Nodal global
R_T	=	Beban Traksi global
R_{TEMP}	=	Beban Suhu global
r	=	Peralihan Titik Nodal global
U	=	Energi Regangan
u_i, u_j	=	Peralihan pada titik nodal i, j .
V_{BF}	=	Energi Potensial Gaya Tubuh
V_{NF}	=	Energi Potensial Gaya Nodal
V_T	=	Energi Potensial Gaya Traksi
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	=	Koefisien Muai Panjang dalam $1/^\circ\text{C}$ pada arah X-Y-Z
Δt	=	Perubahan Suhu dalam $^\circ\text{C}$.
ε	=	Regangan
ε_0	=	Regangan Awal (<i>initial strain</i>)
σ	=	Tegangan
σ_0	=	Tegangan Awal (<i>initial stress</i>)

PENDAHULUAN



1.1 SEJARAH PERKEMBANGAN

Metode Elemen Hingga (MEH) mulai dipelajari oleh ahli rangka pesawat terbang yang mengubahnya menjadi teknik solusi numerik yang dapat diterapkan pada masalah fisika yang lebih luas. Hal ini dimulai pada tahun 1940 yang kemudian dikembangkan dengan baik sampai tahun 1965.

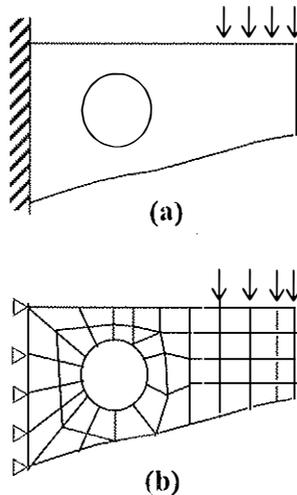
Pada saat yang bersamaan, S. Levy (th 1953) dari USA, serta J. Argyris dan S. Kelsey (th 1960) dari Inggris, telah mengembangkan **Metode Analisis Struktur dengan Matriks** serta **Teknik Solusi Persamaan Linier Simultan** yang baru berarti bila dikerjakan dengan komputer.

Tahun 1965 OC. Zienkiewicz dan YK. Cheung mengatakan, bila **Masalah Elastisitas** dapat dipecahkan berdasarkan **Energi Potensial Minimum**, maka masalah lain dengan fungsi yang sama harus dapat dipecahkan dengan cara yang sama pula.

Teknik solusi numerik pada metode elemen hingga yang dapat diterapkan pada masalah fisika yang luas, berhubungan dengan variabel dari aljabar, diferensial, atau persamaan integrasi. Mencari solusi yang memenuhi persamaan diferensial suatu daerah, serta harus memenuhi syarat-syarat batasnya adalah tidak mudah, biarpun untuk masalah yang sederhana.

Pada **MEH** kesulitan ini diatasi dengan membagi sebuah kontinum menjadi bagian-bagian kecil yang disebut **elemen**, sehingga solusi dalam tiap bagian kecil dapat dinyatakan dalam fungsi yang jauh lebih sederhana daripada fungsi untuk keseluruhannya. Bagian-bagian kecil tadi secara matematis dihubungkan satu sama lain dengan kondisi sedemikian sehingga kompatibel dan kontinu antar bagian kecil atau elemen. Disamping itu syarat batasnya juga terpenuhi.

Gambar 1.1 memperlihatkan pembagian (**deskretisasi**) sebuah kontinum. Bentuk dan ukuran elemen tidak harus sama, tetapi harus kontinu dan kompatibel.



Gambar 1.1 Deskretisasi sebuah kontinum
 (a) kontinum (b) deskretisasi menjadi elemen

1.2 MASALAH DALAM METODE ELEMEN HINGGA

3 bidang utama yang dapat dipecahkan dengan MEH adalah:

1. Masalah Keseimbangan
 Meliputi masalah yang tidak tergantung waktu, misalnya analisis tegangan dari sistim linier elastis, elektrostatik, magnetostatik, konduksi thermal, dan aliran fluidal.
2. Masalah *Eigenvalue*
 Merupakan lanjutan dari masalah keseimbangan. Nilai spesifik atau nilai kritis tertentu harus ditentukan, misalnya masalah stabilitas struktur dan penentuan frekuensi alamiah suatu sistim linier elastis dan masalah vibrasi.
3. Masalah Penyebaran (*Propagation Problems*).
 Meliputi masalah yang tergantung waktu, misalnya hidro-dinamika, analisis dinamis.

Penerapan dapat mengenai masalah linier dan non-linier.

Solusi dengan menggunakan Metode Elemen Hingga meliputi prosedur atau langkah berikut:

- Langkah 1. Deskretisasi dan Pemilihan Konfigurasi Elemen.
- Langkah 2. Memilih Model atau Fungsi Pendekatan.
- Langkah 3. Menentukan hubungan tegangan σ – regangan ϵ .
- Langkah 4. Menurunkan Persamaan Elemen.
- Langkah 5. Merakit Persamaan Elemen menjadi Persamaan Global.
- Langkah 6. Menyelesaikan *Primary Unknowns*
- Langkah 7. Menyelesaikan Besaran Kedua.
- Langkah 8. Interpretasi Hasil.

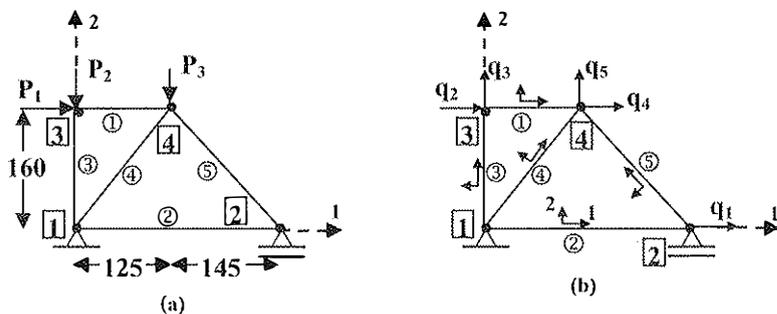
ANALISIS DENGAN MATRIKS

Metode Elemen Hingga (MEH) akan meliputi suatu operasi perhitungan yang berdasarkan Metode Kekakuan Langsung yang memanfaatkan perkalian dan pembagian dengan matriks. Metode Kekakuan Langsung ini merupakan metode dalam analisis struktur yang mudah digunakan, baik untuk struktur yang sederhana maupun struktur yang kompleks. Karena metode ini merupakan metode yang dipakai pada solusi dengan Elemen Hingga, maka perlu dipahami dan dikuasai dulu sebelum membahas lebih jauh Metode Elemen Hingga.

2.1 DERAJAT KEBEBASAN DAN SYARAT BATAS

Suatu struktur yang akan dianalisis perlu ditentukan dulu syarat-syarat batasnya, atau yang dalam Mekanika Teknik dikenal sebagai Jenis Perletakan dan Reaksi Perletakan. Dengan sudah ditentukannya perletakan suatu struktur, maka dapat diketahui pergerakan yang mungkin pada sesuatu lokasi dari struktur tersebut.

Gambar 2.1 (a) memperlihatkan struktur rangka batang bidang yang terdiri atas 5 elemen dan 4 titik nodal, perletakan sendi pada titik nodal 1 dan perletakan rol pada titik nodal 2. Struktur menerima beban terpusat P_1 , P_2 , dan P_3 . Sumbu struktur dinyatakan sebagai sumbu 1-2 (garis terputus-putus).



Gambar 2.1 Struktur Rangka Batang Bidang
(a) Elemen, Perletakan, dan Beban
(b) Sumbu Global-Lokal, Derajat kebebasan

Pada gambar 2.1 (b) terlihat sumbu struktur yang adalah sumbu global 1-2 dan sumbu lokal 1-2 untuk tiap elemen. Arah kedua sumbu itu menurut hukum tangan kanan, yaitu ibu jari tangan kanan adalah sumbu 1, telunjuk adalah sumbu 2, dan jari tengah adalah sumbu 3. Sumbu lokal 1 selalu pada elemen yang berawal dari titik nodal nomor rendah ke titik nodal nomor lebih tinggi. Derajat kebebasan atau *Degree of Freedom* (DOF) dimulai dari titik nodal 1 secara berurutan dan tidak ada nomor ganda. Dalam contoh di atas, tidak ada DOF di titik nodal 1, karena merupakan perletakan sendi. Sedangkan pada perletakan rol di titik nodal 2, ada satu DOF yaitu q_1 , karena pada rol hanya ada satu arah pergerakan yang mungkin, yaitu translasi mendatar.

Berikutnya DOF disusun menjadi Matriks Kode Batang [M] sebagai berikut: Jumlah baris menyatakan jumlah DOF satu elemen, dan jumlah kolom menyatakan jumlah elemen. Dalam hal elemen rangka batang bidang, terdapat 2 buah translasi (mendatar dan vertikal) sebagai DOF pada satu titik nodal menurut sumbu global, sehingga terdapat 4 DOF pada sebuah elemen. Jumlah elemen ada 5 buah, jadi jumlah kolom = 5. Matriks Kode Batang [M] berisi nomor DOF, sehingga menjadi:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

2.2 METODE KEKAKUAN LANGSUNG

Tahap pertama yang harus dihitung adalah peralihan titik nodal yang dinyatakan oleh q_k dengan $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Model Sistem dari struktur rangka batang bidang adalah:

$$[K]\{q\} = \{Q\} \quad (2.2)$$

Rumus Matriks Kekakuan $[K]$ dari rangka batang bidang menurut sumbu global:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & -c_1^2 & -c_1c_2 \\ c_1c_2 & c_2^2 & -c_1c_2 & -c_2^2 \\ -c_1^2 & -c_1c_2 & c_1^2 & c_1c_2 \\ -c_1c_2 & -c_2^2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$c_1 = \cos \alpha$ dan $c_2 = \sin \alpha$ dengan α adalah sudut antara sumbu 1 global dan sumbu 1 lokal dengan arah berlawanan jarum jam di titik nodal awal/rendah dari elemen.

Menurut sumbu lokal, rumus matriks kekakuan rangka batang bidang adalah:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Untuk menghemat pekerjaan, bagian dari matriks kekakuan yang diisi hanyalah yang ada DOF-nya, berarti harus melihat $[M]$ dari persamaan (2.1) di atas.

Secara berurut akan dihitung **Matriks Kekakuan $[K]$** semua elemen dengan $A = 30 \text{ cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Panjang elemen dalam cm seperti gambar.

$$L_1 = 125 \text{ cm}, \quad L_2 = 270 \text{ cm}, \quad L_3 = 160 \text{ cm}.$$

$$\text{Dan } L_4 = \sqrt{(125^2 + 160^2)} = 203 \text{ cm}$$

$$L_5 = \sqrt{(145^2 + 160^2)} = 216 \text{ cm}$$