

SKRIPSI

**KONTROL OPTIMAL PENGOBATAN DARI SUATU MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA YANG
MEMPERTIMBANGKAN MASUKNYA IMIGRAN YANG
TERINFEKSI**



Cory Irene Simatupang

NPM: 2017710036

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2022**

FINAL PROJECT

**OPTIMAL TREATMENT CONTROL FROM A MALARIA
SPREADING MODEL WITH CONSIDERATION OF AN
INFLUX OF INFECTED IMMIGRANTS**



Cory Irene Simatupang

NPM: 2017710036

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2022**

LEMBAR PENGESAHAN

KONTROL OPTIMAL PENGOBATAN DARI SUATU MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA YANG MEMPERTIMBANGKAN MASUKNYA IMIGRAN YANG TERINFEKSI

Cory Irene Simatupang

NPM: 2017710036

Bandung, 28 Januari 2022

Menyetujui,

Pembimbing 1



Iwan Sugiarto, M.Si.

Pembimbing 2



Dr. Daniel Salim

Ketua Tim Penguji



Benny Yong, Ph.D.

Anggota Tim Penguji



Jonathan Hoseana, Ph.D.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Dr. Livia Owen

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

KONTROL OPTIMAL PENGOBATAN DARI SUATU MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA YANG MEMPERTIMBANGKAN MASUKNYA IMIGRAN YANG TERINFEKSI

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Ketapang,
Tanggal 28 Januari 2022



Cory Irene Simatupang
NPM: 2017710036

ABSTRAK

Malaria merupakan penyakit menular yang diakibatkan oleh parasit *Plasmodium*. Penularannya terjadi melalui nyamuk *Anopheles* betina terinfeksi yang menggigit manusia, maupun melalui darah penderita. Pada skripsi ini, dibahas suatu model matematis untuk penyebaran penyakit malaria yang mempertimbangkan masuknya imigran yang terinfeksi. Dari model tersebut, diperoleh satu titik kesetimbangan bebas penyakit dan satu titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan dilakukan untuk masing-masing titik kesetimbangan. Ke dalam model tersebut kemudian ditambahkan suatu variabel kontrol yang mendeskripsikan tingkat pengobatan yang dijalani manusia-manusia terinfeksi, lalu ditentukan kontrol yang optimal dengan menggunakan prinsip Pontryagin. Dalam penentuan kontrol yang optimal tersebut, dilakukan analisis yang melibatkan bobot relatif biaya; hasilnya menyatakan semakin kecil bobot relatif biaya, semakin besar nilai faktor kontrol, sehingga penyebaran penyakit malaria semakin dapat ditekan. Hasil-analitik yang diperoleh dalam skripsi ini diverifikasi dengan simulasi-simulasi numerik.

Kata-kata kunci: Malaria, titik kesetimbangan, kestabilan, sensitivitas, kontrol optimal, pengobatan

ABSTRACT

Malaria is an infectious disease caused by the parasite *Plasmodium*. Its transmission occurs through infected female *Anopheles* mosquitoes which bite humans, or through contact with the blood of a patient. In this thesis, we discuss a mathematical model for the spreading of malaria, which takes into account the entry of infected immigrants. From this model, we obtain one disease-free equilibrium and one endemic equilibrium. We carry out stability analysis for each equilibrium. We then incorporate to the model a control variable which describes the level of treatment undergone by the infected individuals, and determine the optimal control using Pontryagin's principle. In the determination of the optimal control, we carry out an analysis involving the relative weight of cost; the result states that small values of the relative weight result in large values the control factor, and thus in the prevention of the disease's spreading. The analytical results obtained in this thesis are verified by numerical simulations.

Keywords: Malaria, equilibrium point, stability, sensitivity, optimal control, treatment

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas berkat dan kasih karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Kontrol Optimal Pengobatan Dari Suatu Model Penyebaran Penyakit Malaria Yang Mempertimbangkan Masuknya Imigran Yang Terinfeksi**", sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Strata-1 Matematika, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung. Selama masa perkuliahan serta penyusunan skripsi, penulis telah mendapat banyak pelajaran, pengalaman, serta bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak, Mama, dan Bernad yang selalu mendukung, menghibur dan memberi kasih sayang, doa, semangat sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dengan baik dan tepat waktu.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. dan Bapak Dr. Daniel Salim selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan ilmu, bantuan, nasihat, dan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Benny Yong, Ph.D. dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. selaku dosen penguji atas kritik, saran, dan nasihat yang telah diberikan untuk menyempurnakan skripsi menjadi lebih baik.
4. Ibu Farah Kristiani, Ph.D. selaku dosen wali yang selalu memberikan bantuan, informasi, dan arahan hingga penulis menyelesaikan masa perkuliahan.
5. Bapak Liem Chin, M.Si. selaku koordinator skripsi yang memberikan informasi terkait penyusunan skripsi.
6. Seluruh dosen, staf Tata Usaha, serta pekerya FTIS, khususnya Program Studi Matematika. Terima kasih atas bantuan dan bimbingan selama masa perkuliahan.
7. Teman-teman "BGDMM" (Gika, Sheilla, Monika, dan Edwin) atas segala bantuan, dukungan, cinta, canda tawa, sukacita, dan pengalaman yang diberikan.
8. Teman-teman "Sayap Kiri" (Monika, Gika, Sheilla, Yofrin, Bastian, Kevin, Anes, Sheryl, Nanda, Christo, Marry, Marry, Nanda, dan Sheryl) atas bantuan, canda tawa, dan kebersamaan selama perkuliahan.
9. Tiffany sebagai teman seperjuangan skripsi anak bimbingan Pak Iwan, atas canda tawa dan bantuannya.
10. Fifi, Anes, Octa, dan lainnya, sebagai temen seperjuangan skripsi yang membantu dalam menyelesaikan skripsi.
11. Teman-teman GP GPIB Ebenhaezer Ketapang atas hiburan, semangat, doa, kebersamaan yang diberikan.
12. Bangtan Sonyeondan yang menghibur, membantu, dan memberi semangat dari awal menyusun skripsi dan seterusnya.
13. Teman-teman Matematika 2017.
14. Seluruh pihak yang telah membantu dan berjasa namun belum dapat disebutkan satu per satu.

Ketapang, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	5
2.3 Titik Keseimbangan	5
2.4 Model Epidemik <i>SIR</i> Sederhana	6
2.5 Model Epidemik <i>SI</i> Sederhana	6
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar dengan Matriks Generasi	7
2.7 Kestabilan Titik Keseimbangan	8
2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	8
2.9 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar terhadap Parameter-Parameter	9
2.10 Prinsip Maksimum/Minimum Pontryagin	9
3 MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA YANG MEMPERTIM- BANGKAN MASUKNYA IMIGRAN YANG TERINFEKSI	11
3.1 Kompartemen-Kompartemen Model	11
3.2 Konstruksi Model	12
3.3 Titik Keseimbangan	13
3.4 Bilangan Reproduksi Dasar	16
3.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	17
3.6 Simulasi Numerik Kasus $\mathcal{R}_0 < 1$	20
3.7 Simulasi Numerik Kasus $\mathcal{R}_0 > 1$	22
3.8 Analisis Sensitivitas Pada \mathcal{R}_0	24
4 KONTROL OPTIMAL PENGOBATAN DARI MODEL PENYEBAR- AN PENYAKIT MALARIA YANG MEMPERTIMBANGKAN MASUK- NYA IMIGRAN YANG TERINFEKSI	27
4.1 Model dengan Faktor Kontrol	27
4.2 Simulasi Numerik Kontrol Optimal	28

4.3 Simulasi Numerik Faktor Kontrol dengan Pengaruh Bobot Relatif	29
5 KESIMPULAN DAN SARAN	33
5.1 Kesimpulan	33
5.2 Saran	33
DAFTAR REFERENSI	35

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram Kompartemen Model <i>SIR</i>	6
2.2	Diagram Kompartemen Model <i>SI</i>	7
3.1	Diagram Kompartemen Model Matematis Penyebaran Penyakit Malaria yang Mempertimbangkan Masuknya Imigran Terinfeksi	12
3.2	Grafik Penyebaran Penyakit Malaria pada Suatu Kasus di Mana $\mathcal{R}_0 < 1$	21
3.3	Grafik Penyebaran Penyakit Malaria pada Suatu Kasus di Mana $\mathcal{R}_0 > 1$	23
4.1	Grafik Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kontrol Optimal.	29
4.2	Kasus 2 dengan $C = 25$	30
4.3	Kasus 3 dengan $C = 45$	31

DAFTAR TABEL

3.1	Deskripsi dan Nilai Estimasi Parameter untuk Simulasi Kasus $\mathcal{R}_0 < 1$ [1]	21
3.2	Deskripsi dan Nilai Estimasi Parameter untuk Simulasi Kasus $\mathcal{R}_0 > 1$ [1]	22
3.3	Indeks Sensitivitas terhadap Parameter untuk Kasus Endemik	25
4.1	Pengaruh Bobot Relatif Biaya pada Faktor Kontrol	31

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Lingkungan tempat tinggal merupakan faktor penting dalam keberlangsungan kehidupan suatu makhluk hidup. Makhluk-makhluk hidup dapat tinggal di tempat yang berbeda-beda, baik tempat yang bersih maupun kotor, untuk dapat tumbuh dan berkembang biak. Namun, biasanya jika lingkungan tempat tinggal menjadi kotor, maka penyakit akan muncul dan menyebar. Manusia merupakan salah satu makhluk hidup yang harusnya tinggal dan menetap di lingkungan yang bersih, agar jauh dari penyakit terutama penyakit menular. Penyakit menular adalah penyakit yang dapat berpindah dari satu orang penderita ke orang sehat, yang bisa disebabkan oleh virus, bakteri, maupun parasit. Beberapa contoh penyakit menular adalah diare, hepatitis, serta malaria.

Malaria merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh parasit *Plasmodium* melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina yang terinfeksi. Proses penularannya terjadi ketika individu yang rentan tergigit oleh nyamuk *Anopheles* betina yang terinfeksi, sehingga individu tersebut menjadi terinfeksi. Infeksi tersebut merusak proses kerja organ hati manusia, kemudian merusak sel darah merah, sehingga menyebabkan gejala anemia. Selain gigitan nyamuk *Anopheles* betina yang terinfeksi, kontak pada darah penderita malaria juga dapat menyebabkan seseorang terkena penyakit malaria. Pada individu yang tidak kebal, biasanya gejala muncul selama 10 sampai 15 hari setelah individu tersebut tergigit nyamuk terinfeksi. Beberapa gejala yang dialami penderita adalah demam, sakit kepala, menggigil, berkeringat banyak, muntah, dan hilang nafsu makan. Jika penderita tidak segera melakukan pengobatan, penyakit dapat bertambah parah dan menyebabkan kematian. Beberapa kelompok populasi yang berada pada risiko tinggi tertular malaria dan meningkatkan penyebaran penyakit adalah bayi, anak-anak di bawah usia 5 tahun, wanita hamil, pasien dengan HIV/AIDS, serta penduduk yang berpindah-pindah (imigrasi).

Berdasarkan survei WHO [2], hampir setengah dari populasi manusia di dunia terkena malaria: diperkirakan terdapat 299 juta kasus malaria dan 409.000 total kematian akibat malaria. Sebagian besar kasus dan kematian tersebut terjadi di Afrika sub-Sahara. Akan tetapi, wilayah-wilayah WHO di Asia Tenggara, Mediterania Timur, Pasifik Barat, dan Amerika juga melaporkan sejumlah besar kasus dan kematian yang terjadi. Anak-anak di bawah usia 5 tahun adalah kelompok yang paling rentan terkena malaria, dan kelompok tersebut menyumbang sekitar dua pertiga dari total kematian akibat malaria di seluruh dunia. Namun, terdapat cara untuk mengobati penyakit malaria karena gigitan nyamuk *Anopheles* betina yang terinfeksi, yaitu melakukan terapi *Artemisinin Combination Therapy (ACT)* bersamaan dengan mengonsumsi obat malaria.

Pada skripsi ini, dibahas suatu model matematis penyebaran penyakit malaria yang mempertimbangkan masuknya imigran yang terinfeksi [1]. Tipe model matematis yang digunakan untuk populasi manusia adalah model *SIR*, sedangkan untuk populasi nyamuk digunakan tipe *SI*. Selanjutnya, dari model matematis tersebut ditentukan titik-titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasarnya, serta dilakukan simulasi numerik terkait kestabilan titik-titik kesetimbangan tersebut. Analisis sensitivitas dilakukan juga, untuk mengukur besarnya pengaruh dari setiap parameter pada model matematis tersebut. Kemudian, pada model ditambahkan faktor kontrol sebagai upaya pengendalian dalam menekan banyaknya manusia terinfeksi, dengan meminimumkan

biaya pengobatan manusia-manusia terinfeksi. Selanjutnya, ditentukan kontrol yang optimal dengan menggunakan prinsip Pontryagin, dan melibatkan bobot relatif biaya, agar dapat menekan penyebaran penyakit malaria.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, berikut rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini

1. Bagaimana perumusan model penyebaran penyakit malaria yang mempertimbangkan masuknya imigran yang terinfeksi?
2. Bagaimana menentukan titik-titik kesetimbangan dan kestabilannya dari model tersebut?
3. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan matriks generasi dari model tersebut?
4. Bagaimana hasil mengenai kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model tersebut dapat diverifikasi dengan simulasi numerik?
5. Parameter-parameter apa dalam model tersebut yang terhadapnya bilangan reproduksi dasar dari model tersebut bergantung secara paling sensitif?
6. Bagaimana pengaruh faktor kontrol yang ditambahkan ke dalam model tersebut dalam pencegahan penyebaran penyakit?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. merumuskan model penyebaran penyakit malaria yang mempertimbangkan masuknya imigran yang terinfeksi,
2. menentukan titik-titik kesetimbangan dan kestabilannya dari model tersebut,
3. menentukan bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan matriks generasi dari model tersebut,
4. melakukan simulasi numerik terkait kestabilan titik kesetimbangan dari model tersebut,
5. melakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter-parameter yang terhadapnya bilangan reproduksi dasar dari model tersebut bergantung secara paling sensitif,
6. menganalisis pengaruh faktor kontrol yang ditambahkan ke dalam model tersebut.

1.4 Sistematika Pembahasan

Skripsi ini terdiri dari 5 bab berikut.

Bab 1: Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan skripsi.

Bab 2: Landasan Teori

Bab ini membahas teori-teori yang digunakan dalam konstruksi dan analisis suatu model penyebaran penyakit malaria yang mempertimbangkan masuknya imigran yang terinfeksi. Teori-teori yang dibahas meliputi persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan, model epidemik *SIR* sederhana, model epidemik *SI* sederhana, bilangan reproduksi dasar dengan matriks generasi, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, serta prinsip maksimum/minimum Pontryagin.

Bab 3: Model Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Masuknya Imigran Yang Terinfeksi

Bab ini membahas konstruksi model, penentuan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, simulasi numerik, serta analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar.

Bab 4: Kontrol Optimal

Bab ini membahas perumusan model dengan faktor kontrol beserta simulasi numerik.

Bab 5: Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan yang didapatkan dari pengerjaan skripsi dan saran untuk pengembangan selanjutnya.