

**SKRIPSI**

**PERBANDINGAN DISTRIBUSI SISA MASA HIDUP DAN  
HAMPIRANNYA**



**Helena Nadine Hapsari**

**NPM: 2017710015**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS  
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN  
2021**



**FINAL PROJECT**

**COMPARISON BETWEEN FUTURE LIFETIME  
DISTRIBUTION AND ITS APPROXIMATIONS**



**Helena Nadine Hapsari**

**NPM: 2017710015**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES  
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY  
2021**



# LEMBAR PENGESAHAN

## PERBANDINGAN DISTRIBUSI SISA MASA HIDUP DAN HAMPIRANNYA

Helena Nadine Hapsari

NPM: 2017710015

Bandung, 18 Februari 2021

Menyetujui,

Pembimbing

Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Benny Yong, Ph.D.

Felivia Kusnadi, M.Act.Sc.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra



## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

### **PERBANDINGAN DISTRIBUSI SISA MASA HIDUP DAN HAMPIRANNYA**

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,  
Tanggal 18 Februari 2021

Helena Nadine Hapsari  
NPM: 2017710015





## ABSTRAK

Perusahaan asuransi menyediakan produk untuk menanggung risiko keuangan ketika pencari nafkah suatu keluarga tidak dapat memperoleh pemasukannya. Produk tersebut berupa kontrak yang memberikan manfaat kepada ahli waris pihak bertanggung setelah pemegang kontrak membayar premi kepada perusahaan asuransi pada setiap periode waktu yang telah disepakati sejak kontrak ditandatangani. Nilai premi maupun manfaat dapat dihitung dengan fungsi-fungsi aktuarial menggunakan tabel mortalita dan pendekatan hukum mortalita terhadap tabel mortalita. Tabel mortalita merupakan tabel yang menunjukkan probabilitas seseorang pada setiap usia akan meninggal sebelum ulang tahun berikutnya. Dalam skripsi ini, dibahas lebih lanjut menggunakan data Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk laki-laki maupun perempuan. Ada beberapa pendekatan hukum mortalita untuk menghasilkan tingkat mortalita, seperti hukum mortalita Gompertz dan Makeham. Hukum mortalita Gompertz hanya memperhitungkan risiko karena faktor usia, sedangkan hukum mortalita Makeham memperhitungkan risiko karena faktor usia dan faktor lain yang tidak dipengaruhi oleh usia yang mungkin dialami oleh pihak bertanggung. Dalam skripsi ini, dibahas lebih lanjut menggunakan hukum mortalita Makeham karena dinilai hampirannya lebih akurat. Dalam perhitungan fungsi-fungsi aktuarial, terdapat tiga asumsi yang umum dipakai, yaitu asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci. Pada kenyataannya, tingkat mortalita dapat meningkat lebih dari keadaan normal, yakni saat terjadi wabah penyakit. Pada saat tingkat mortalita monoton naik, sisa masa hidup seseorang lebih kecil secara stokastik dibandingkan dengan hampiran sisa masa hidup seseorang dengan asumsi kematian seragam. Ketika tingkat mortalita monoton naik, hampiran sisa masa hidup seseorang dengan asumsi laju kematian konstan lebih kecil secara stokastik dibandingkan dengan sisa masa hidup seseorang. Hal ini juga berlaku untuk asumsi Balducci, jika tingkat mortalita monoton naik, maka hampiran sisa masa hidup seseorang dengan asumsi Balducci lebih kecil secara stokastik dibandingkan dengan sisa masa hidup seseorang.

**Kata-kata kunci:** Hukum Mortalita, Asumsi Usia Pecahan, Tingkat Mortalita Monoton Naik, Perbandingan Hampiran Usia Pecahan



## ABSTRACT

An insurance company provides products to cover financial risk when a breadwinner of family can't get the income. Those products are a contract that provides benefits to the heirs of the insured party after the contract holder pays the premium to the insurance company in each agreed period of time since the contract was signed. The value of premium or benefit can be considered by actuarial functions using the mortality table and mortality law approach towards the mortality table. A mortality table is a table that shows the probability that someone at each age will pass away before the next birthday. This thesis will be further discussed using the Indonesia Mortality Table of 2011 for men and women. There are many mortality law approaches towards the mortality table used, such as mortality law by Gompertz and Makeham. The mortality law by Gompertz only considers the risk because of age factors, while the mortality law by Makeham considers the age factors and other factors that are not influenced by age, which may be experienced by the insured party. This study will be further discussed using mortality law by Makeham because the assumption is considered more accurate. In the calculation of actuarial functions, there are three assumptions commonly used: the assumption of uniform distribution of death, the assumption of the constant force of mortality, and the Balducci assumption. In fact, the hazard rate can increase more than normal circumstances, for example, when there is a disease outbreak. When the hazard rate increases, the remaining life span of a person is stochastically smaller than the lifetime assumption of a person with the assumption of uniform distribution. When the hazard rate increases, the remaining lifetime assumption of a person with the assumption of the constant force of mortality is stochastically smaller than the remaining lifetime. This also occurs in the Balducci assumption. If the hazard rate increases, the remaining life span assumption of a person with the Balducci assumption is stochastically smaller than the remaining lifetime of a person.

**Keywords:** Mortality Law, Fractional Ages Assumptions, Increasing Hazard Rate, Comparison Fractional Ages Approximations



*Thank you to a great Mom and Dad ...*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus karena kasih dan karuniaNya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Perbandingan Distribusi Sisa Masa Hidup dan Hampirannya**". Adapun penyusunan skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Program Studi Matematika Fakultas Teknologi Informasi dan Sains Universitas Katolik Parahyangan. Penulis mengucapkan rasa syukur dan terima kasih kepada seluruh pihak yang terlibat dan mendukung penulis baik selama masa studi dan penyelesaian skripsi ini. Secara khusus penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Orang tua penulis, Bapak **Hubertus Hapsoro**, Ibu **Franciska Renny Epifani**, dan Eyang **Veronika Suparti**, serta kakak-kakak, **Thomas Arya Aditya** dan **Thomas Arya Adika**, serta kepada seluruh keluarga besar yang selalu memberikan semangat.
2. Bapak **Iwan Sugiarto, M.Si.** selaku Dosen Pembimbing yang telah sabar membimbing penulis, memberikan ilmu, arahan, saran, semangat, dan inspirasi yang bermanfaat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu.
3. Bapak **Benny Yong, Ph.D.** dan Ibu **Felivia Kusnadi, M.Act.Sc.** yang telah menjadi penguji untuk sidang skripsi penulis serta Bapak **Liem Chin, M.Si.** selaku Koordinator Skripsi. Terima kasih atas semua kritik dan saran untuk perbaikan skripsi ini.
4. Dosen-dosen Program Studi Matematika Universitas Katolik Parahyangan yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama masa studi serta kepada seluruh Petugas Tata Usaha dan Pegawai Fakultas Teknologi Informasi dan Sains yang telah membantu penulis selama berkuliah di Fakultas Teknologi Informasi dan Sains Universitas Katolik Parahyangan.
5. **Julius** yang selalu menemani, membantu, dan memberikan semangat kepada penulis.
6. Teman-teman dekat matematika angkatan 2017: **Elizabeth, Nathania, dan Gladys**, tak lupa kepada teman-teman matematika angkatan 2017 yang lain: **Sebastian, Maria, Felisha, Marry, Nico, Jelo, Ronald, Octa, Kenzo, Tiffany, Alvita, Sheila, Felix, Fifi, Sheryl, Gezia, Anthony, Ananda, Ivander, Ata, Billy, Cory, Kevin, Monika, Christo, Anes, Edwin, Gika, Yofrin, Jevan** dan **Enrico**. Terima kasih untuk seluruh pengalaman serta kebersamaan selama berkuliah bersama penulis.
7. Teman-teman matematika angkatan 2016, 2018, 2019, dan 2020 yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
8. Terakhir, kepada seluruh pihak lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang secara langsung maupun tidak langsung telah memberi bantuan dan dukungan kepada penulis dalam masa studi maupun penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak sempurna, baik materi maupun teknik penulisan. Oleh karena itu, penulis sangat terbuka akan kritik dan saran dari pembaca untuk perbaikan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat berguna bagi seluruh pihak yang membacanya.

Bandung, Februari 2021

Penulis





# DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xxi</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 Batasan Masalah . . . . .	2
1.5 Metodologi . . . . .	2
1.6 Sistematika Pembahasan . . . . .	2
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>5</b>
2.1 Fungsi Konveks dan Konkaf . . . . .	5
2.2 Peubah Acak dan Ekspektasi . . . . .	6
2.3 Fungsi Distribusi dan Fungsi <i>Survival</i> . . . . .	7
2.4 Peluang Kehidupan pada Tabel Mortalita . . . . .	7
2.5 Tingkat Mortalita . . . . .	8
2.6 Stokastik Terurut . . . . .	8
<b>3 DISTRIBUSI SISA MASA HIDUP DAN HAMPIRANNYA</b>	<b>11</b>
3.1 Hampiran Asumsi Kematian Seragam ( <i>Uniform approximations</i> ) . . . . .	11
3.2 Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan ( <i>Exponential approximations</i> ) . . . . .	12
3.3 Hampiran Asumsi Balducci ( <i>Balducci approximations</i> ) . . . . .	14
<b>4 SIMULASI DATA</b>	<b>17</b>
4.1 Perbandingan Distribusi Makeham dengan Hampiran Asumsi Kematian Seragam . . . . .	17
4.2 Perbandingan Distribusi Makeham dengan Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	18
4.3 Perbandingan Distribusi Makeham dengan Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	19
4.4 Perbandingan Distribusi Makeham dengan Ketiga Hampirannya . . . . .	20
4.5 Perbandingan ' <i>Real</i> ' <i>Distribution</i> dari Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 dengan Hampiran Asumsi Kematian Seragam . . . . .	21
4.6 Perbandingan ' <i>Real</i> ' <i>Distribution</i> dari Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 dengan Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	23
4.7 Perbandingan ' <i>Real</i> ' <i>Distribution</i> dari Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 dengan Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	25
4.8 Perbandingan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 dengan Ketiga Hampirannya . . . . .	27
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>31</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	31

5.2 Saran . . . . .	33
<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>35</b>
<b>A DATA DISTRIBUSI MAKEHAM</b>	<b>37</b>
<b>B TINGKAT MORTALITA DISTRIBUSI MAKEHAM</b>	<b>39</b>
<b>C DISTRIBUSI MAKEHAM DENGAN KETIGA HAMPIRANNYA</b>	<b>41</b>
<b>D TINGKAT MORTALITA TABEL MORTALITA INDONESIA TAHUN 2011 UNTUK LAKI-LAKI DENGAN ASUMSI LAJU KEMATIAN KONSTAN DAN ASUMSI BALDUCCI</b>	<b>45</b>
<b>E TABEL MORTALITA INDONESIA TAHUN 2011 UNTUK LAKI-LAKI DENGAN KETIGA HAMPIRANNYA</b>	<b>47</b>
<b>F TINGKAT MORTALITA TABEL MORTALITA INDONESIA TAHUN 2011 UNTUK PEREMPUAN DENGAN ASUMSI LAJU KEMATIAN KONSTAN DAN ASUMSI BALDUCCI</b>	<b>51</b>
<b>G TABEL MORTALITA INDONESIA TAHUN 2011 UNTUK PEREMPUAN DENGAN KETIGA HAMPIRANNYA</b>	<b>53</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Fungsi Konveks (Kiri) dan Fungsi Konkaf (Kanan) [4] . . . . .	5
4.1	Distribusi Makeham dan Hampiran Asumsi Kematian Seragam . . . . .	17
4.2	Tingkat Mortalita Distribusi Makeham . . . . .	18
4.3	Distribusi Makeham dan Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	19
4.4	Distribusi Makeham dan Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	19
4.5	Distribusi Makeham dan Ketiga Hampirannya . . . . .	20
4.6	Distribusi dari $T_{50}$ berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Laki-laki dan Hampiran Asumsi Kematian Seragam . . . . .	22
4.7	Distribusi dari $T_{50}$ berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Perempuan dan Hampiran Asumsi Kematian Seragam . . . . .	23
4.8	Tingkat Mortalita Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan dari $T_{50}$ untuk Laki-Laki . . . . .	23
4.9	Distribusi dari $T_{50}$ berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Laki-laki dan Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	24
4.10	Tingkat Mortalita Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan dari $T_{50}$ untuk Perempuan . . . . .	24
4.11	Distribusi dari $T_{50}$ berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Perempuan dan Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	25
4.12	Tingkat Mortalita Hampiran Asumsi Balducci dari $T_{50}$ untuk Laki-Laki . . . . .	25
4.13	Distribusi dari $T_{50}$ berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Laki-laki dan Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	26
4.14	Tingkat Mortalita Hampiran Asumsi Balducci dari $T_{50}$ untuk Perempuan . . . . .	26
4.15	Distribusi dari $T_{50}$ berdasarkan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Perempuan dan Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	27
4.16	Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Laki-laki dan Ketiga Hampirannya . . . . .	28
4.17	Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Perempuan dan Ketiga Hampirannya . . . . .	29



## DAFTAR TABEL

4.1	Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 . . . . .	21
D.1	Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	45
D.2	Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	46
F.1	Hampiran Asumsi Laju Kematian Konstan . . . . .	51
F.2	Hampiran Asumsi Balducci . . . . .	52



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Setiap orang pasti memiliki risiko dalam hidupnya, baik positif maupun negatif. Salah satu usaha yang dilakukan oleh seseorang dalam mencegah risiko negatif dalam hidupnya adalah dengan mengalihkan risiko tersebut kepada pihak lain, yaitu perusahaan asuransi. Perusahaan asuransi menyediakan produk untuk menanggung risiko keuangan ketika pencari nafkah dalam suatu keluarga tidak dapat memperoleh pemasukannya. Produk tersebut berupa kontrak yang memberikan manfaat kepada ahli waris pihak tertanggung setelah pemegang kontrak membayar premi kepada perusahaan asuransi pada setiap periode waktu yang telah disepakati sejak kontrak ditandatangani. Nilai premi maupun manfaat dapat dihitung dengan fungsi-fungsi aktuarial menggunakan tabel mortalita dan pendekatan hukum mortalita terhadap tabel mortalita.

Tabel mortalita menunjukkan peluang orang berusia  $x$  tahun akan meninggal sebelum usia  $x + 1$  tahun dengan  $x = 0, 1, \dots, 110$ . *World Health Organization* (WHO) mengharuskan setiap negara memiliki atau membangun tabel mortalita sendiri yang cocok untuk negaranya. Idealnya, tabel mortalita diperoleh melalui sistem pencatatan sipil dan registrasi vital penduduk yang antara lain mencatat dan melaporkan kejadian kematian menurut umur dan jenis kelamin.[6] Dengan tabel mortalita yang cocok untuk negaranya, tabel mortalita dapat menjadi dasar perencanaan dan evaluasi pembangunan di bidang kesehatan, ekonomi, penetapan usia pensiun, dan lainnya. Saat ini, Indonesia sudah memiliki tabel mortalita sendiri dan terus mengembangkannya. Tabel mortalita di Indonesia telah mengalami beberapa perkembangan mulai dari tabel mortalita tahun 1999, 2011, dan 2019. Selanjutnya, dalam skripsi ini dibahas lebih lanjut menggunakan data Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk laki-laki maupun perempuan.

Terdapat beberapa pendekatan hukum mortalita terhadap tabel mortalita yang sudah banyak digunakan, seperti hukum mortalita Gompertz dan Makeham. Perbedaan antara hukum mortalita Gompertz dan Makeham terletak pada parameter yang diestimasi atau diperhitungkan. Hukum mortalita Gompertz hanya memperhitungkan risiko karena faktor usia, sedangkan hukum mortalita Makeham memperhitungkan risiko karena faktor usia dan faktor lain yang tidak dipengaruhi oleh usia yang mungkin dialami oleh pihak tertanggung. Perbedaan nilai parameter tersebut akan mempengaruhi keakuratan dalam mengestimasi fungsi aktuarial. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas lebih lanjut menggunakan hukum mortalita Makeham karena dinilai lebih akurat dalam mengestimasi.

Terdapat tiga asumsi yang umum dipakai dalam perhitungan fungsi-fungsi aktuarial, yaitu asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci. Asumsi kematian seragam diasumsikan bahwa individu meninggal antara usia bulat  $k$  dan  $k + 1$  dengan terdistribusi secara seragam, sedangkan asumsi laju kematian konstan diasumsikan bahwa laju kematian konstan di antara usia bilangan bulat. Asumsi Balducci memiliki asumsi yang berbanding terbalik dengan asumsi kematian seragam karena asumsi Balducci merupakan invers dari fungsi *Survival* yang linear antara usia-usia bulat (untuk lebih jelasnya ketiga asumsi ini akan dipaparkan pada bab 3).

Pada kenyataannya, tingkat mortalita suatu populasi dapat meningkat, contohnya saat terjadi wabah penyakit. Dalam skripsi ini, akan dibahas lebih lanjut untuk tingkat mortalita yang monoton

naik dalam mencari hampiran untuk distribusi Makeham dan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 dengan ketiga asumsi tersebut. Dari hasil perhitungan, akan dibandingkan distribusi Makeham dengan hampirannya menggunakan ketiga asumsi tersebut. Demikian juga, akan dilakukan hal yang sama untuk Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011. Kemudian, dapat ditentukan batas bawah sisa masa hidup seseorang saat tingkat mortalita monoton naik. Dengan mengetahui batas bawah sisa masa hidup seseorang saat tingkat mortalita monoton naik, perusahaan asuransi dapat menentukan nilai premi terendah saat tingkat mortalita meningkat. Perhitungan tersebut dilakukan dengan tujuan agar perusahaan asuransi tidak mengalami kerugian jika tingkat mortalita meningkat.

## 1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah :

- Bagaimana menentukan hampiran asumsi kematian?
- Bagaimana perbandingan asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci dengan tingkat mortalita yang monoton naik?
- Bagaimana batas bawah sisa masa hidup seseorang dengan tingkat mortalita yang monoton naik?

## 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

- Menentukan hampiran asumsi kematian dengan asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci.
- Membuat perbandingan asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci untuk tingkat mortalita yang monoton naik.
- Menentukan batas bawah sisa masa hidup seseorang untuk tingkat mortalita yang monoton naik.

## 1.4 Batasan Masalah

Untuk menghindari perluasan dalam penulisan skripsi ini, maka batasan masalah pada skripsi ini adalah hanya memperhitungkan tingkat mortalita yang monoton naik.

## 1.5 Metodologi

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah distribusi Makeham dan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 untuk Laki-laki dan Perempuan. Untuk memudahkan perhitungan, perangkat lunak yang digunakan yaitu *Microsoft Excel* dan *MATLAB*.

## 1.6 Sistematika Pembahasan

Sistematika penulisan pada skripsi ini terdiri dari lima bab, yaitu:

### **BAB 1 : Pendahuluan**

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, metodologi, dan sistematika penulisan.

### **BAB 2 : Landasan Teori**

Bab ini berisi pembahasan mengenai teori-teori yang mendukung dalam pengerjaan makalah skripsi ini.



**BAB 3 : Distribusi Sisa Masa Hidup dan Hampirannya**

Bab ini berisi tentang perbandingan distribusi sisa masa hidup dengan hampirannya menggunakan asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci.

**BAB 4 : Simulasi Data**

Bab ini berisi tentang perhitungan distribusi Makeham dan Tabel Mortalita Indonesia Tahun 2011 dengan hampirannya menggunakan asumsi kematian seragam, asumsi laju kematian konstan, dan asumsi Balducci.

**BAB 5 : Kesimpulan dan Saran**

Bab ini berisi beberapa kesimpulan yang diambil dari pembahasan pada bab sebelumnya dan saran untuk pengembangan topik.