

SKRIPSI

**DUA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DENGAN
VAKSINASI: ANALISIS KESTABILAN, SIMULASI NUMERIK,
DAN ANALISIS SENSITIVITASNYA**



Mutiara Permata Deis

NPM: 2016710017

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2021**

FINAL PROJECT

**TWO MODELS OF DISEASE SPREAD BY VACCINATION:
STABILITY ANALYSIS, NUMERICAL SIMULATION, AND
SENSITIVITY ANALYSIS**



Mutiara Permata Deis

NPM: 2016710017

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2021**

LEMBAR PENGESAHAN

DUA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DENGAN VAKSINASI: ANALISIS KESTABILAN, SIMULASI NUMERIK, DAN ANALISIS SENSITIVITASNYA

Mutiara Permata Deis

NPM: 2016710017

Bandung, 13 Februari 2021

Menyetujui,

Pembimbing 1

Pembimbing 2

Iwan Sugiarto, M.Si.

Dr. Andreas Parama Wijaya

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono

Jonathan Hoseana, Ph.D.

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

DUA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DENGAN VAKSINASI: ANALISIS KESTABILAN, SIMULASI NUMERIK, DAN ANALISIS SENSITIVITASNYA

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 13 Februari 2021

Mutiara Permata Deis
NPM: 2016710017

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas dua model penyebaran penyakit menular dengan melibatkan vaksinasi, yaitu model *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan vaksinasi secara acak dan model *SVIR* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered*) dengan vaksinasi pada saat lahir. Analisis model-model tersebut akan dilakukan untuk mengetahui titik kesetimbangan kestabilan titik tersebut dan bilangan reproduksi dasar. Terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan. Setelah itu akan dilakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh pada banyaknya individu terinfeksi untuk model *SIR* dan model *SVIR*.

Kata-kata kunci: model *SIR*, model *SVIR*, titik kesetimbangan, analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar, analisis sensitivitas

ABSTRACT

In this final project, two models of the spread of infectious diseases involving vaccination are discussed, namely the *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) model with random vaccination and the *SVIR* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered*) model with vaccination at birth. The analysis of these models will be used to determine equilibrium point and basic reproduction number. There are two equilibrium points, that is the point of disease free equilibrium and endemic equilibrium point. The basic reproduction number is used to analyze the stability of the equilibrium point. After that, a sensitivity analysis will be carried out to determine which parameter has the most influence of infected individuals number for the *SIR* and *SVIR* model.

Keywords: *SIR* model, *SVIR* model, equilibrium point, stability analysis, basic reproduction number, sensitivity analysis.

Thanks God

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas kehendaknya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dua Model Penyebaran Penyakit dengan Vaksinasi: Analisis Kestabilan, Simulasi Numerik, dan Analisis Sensitivitasnya", yang disusun sebagai salah satu syarat wajib untuk menyelesaikan studi Strata-1 Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan.

Semasa kuliah dan penyusunan skripsi, penulis mendapat bantuan dan pelajaran melalui beberapa pihak. Penulis sampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Almarhum Ayah, ibu, kakak dan keluarga lainnya yang selalu mendoakan dan menyemangati penulis.
2. Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. dan Bapak Dr. Andreas Parama Wijaya sebagai pembimbing yang sudah memberikan bantuan dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono dan Bapak Jonathan Hoseana, Ph.D. sebagai dosen penguji, serta Bapak Liem Chin, M.Si. sebagai dosen koordinator skripsi yang telah membantu untuk mengembangkan skripsi ini.
4. Bapak Agus Sukmana, MSc. sebagai dosen wali yang telah membantu penulis menyelesaikan studi.
5. Alvinda dan Raisa yang selalu ada.
6. Barkos Chang: Chang, Isa, Niko, Salomo, Deva, Janaka, Leo, Faza, Davyn, Nevan, Melia, Evelyne, Fifi yang telah memberikan pengalaman yang berkesan semasa kuliah.
7. Aretha, Suryani, Nitya, Jessica T, Fanny, Triny, Fenny, Salman, Irsyad, Febri, Farand yang telah memberikan ilmu dan keseruan semasa kuliah.
8. Teman-teman angkatan 2011-2019 yang telah memberikan banyak pelajaran semasa kuliah, khusus nya untuk angkatan 2016.

Bandung, Februari 2021

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	3
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	4
2.1 Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear	4
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	4
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear Orde Satu	5
2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan Trivial Sistem Planar	6
2.5 Model <i>SIR</i> (<i>Susceptible-Infected-Recovered</i>)	7
2.6 Model <i>SVIR</i> (<i>Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered</i>)	8
2.7 Bilangan Reproduksi Dasar	10
2.8 Matriks Generasi	10
2.9 Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi dasar	11
3 MODEL MATEMATIS PENYEBARAN PENYAKIT DENGAN VAKSINASI	12
3.1 Model Kompartemen <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak	12
3.2 Pembentukan Model <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak	12
3.3 Titik Kesetimbangan Model <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak	13
3.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan Model <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak	14
3.5 Bilangan Reproduksi Dasar untuk Model <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak	16
3.6 Model Kompartemen <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir	17
3.7 Pembentukan Model <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir	17
3.8 Titik Kesetimbangan Model <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir	19
3.9 Kestabilan Titik Kesetimbangan Model <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir	20
3.10 Bilangan Reproduksi Dasar untuk Model <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir	21
4 SIMULASI NUMERIK DAN ANALISIS SENSITIVITAS	23
4.1 Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan	23
4.1.1 Simulasi Numerik Model Kompartemen <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak untuk Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit	23
4.1.2 Simulasi Numerik Model Kompartemen <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak untuk Titik Kesetimbangan Endemik	24

4.1.3	Simulasi Numerik Model Kompartemen <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir untuk Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	26
4.1.4	Simulasi Numerik Model Kompartemen <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir untuk Titik Keseimbangan Endemik	27
4.2	Analisis Sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar	29
4.2.1	Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Kompartemen <i>SIR</i> dengan Vaksinasi secara Acak	29
4.2.2	Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Kompartemen <i>SVIR</i> dengan Vaksinasi pada Saat Lahir	30
5	KESIMPULAN DAN SARAN	33
5.1	Kesimpulan	33
5.2	Saran	33
	DAFTAR REFERENSI	35

DAFTAR GAMBAR

2.1	Diagram kompartemen model epidemik <i>SIR</i>	7
2.2	Diagram kompartemen model epidemik <i>SVIR</i>	9
3.1	Diagram kompartemen model epidemik <i>SIR</i> dengan vaksinasi secara acak.	13
3.2	Diagram kompartemen model epidemik <i>SVIR</i> dengan vaksinasi pada saat lahir.	18
4.1	Grafik subpopulasi individu yang rentan (<i>S</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.73$	24
4.2	Grafik subpopulasi individu yang terinfeksi (<i>I</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.73$	24
4.3	Grafik subpopulasi individu yang pulih (<i>R</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.73$	24
4.4	Grafik subpopulasi individu yang rentan (<i>S</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 5.6$	25
4.5	Grafik subpopulasi individu yang terinfeksi (<i>I</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 5.6$	25
4.6	Grafik subpopulasi individu yang pulih (<i>R</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 5.6$	25
4.7	Grafik subpopulasi individu yang rentan (<i>S</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.076$	26
4.8	Grafik subpopulasi individu yang tervaksinasi (<i>V</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.076$	26
4.9	Grafik subpopulasi individu yang terinfeksi (<i>I</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.076$	27
4.10	Grafik subpopulasi individu yang pulih (<i>R</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 0.076$	27
4.11	Grafik subpopulasi individu yang rentan (<i>S</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 1.52$	28
4.12	Grafik subpopulasi individu yang tervaksinasi (<i>V</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 1.52$	28
4.13	Grafik subpopulasi individu yang terinfeksi (<i>I</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 1.52$	28
4.14	Grafik subpopulasi individu yang pulih (<i>R</i>) untuk $\mathfrak{R}_0 = 1.52$	28

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit merupakan suatu keadaan abnormal dari tubuh atau pikiran orang yang mengakibatkan tidak berfungsinya organ tubuh sebagaimana mestinya. Dalam dunia kesehatan, penyakit terbagi menjadi dua, yakni penyakit menular dan tidak menular. Penyakit menular terjadi dari individu atau kelompok yang terinfeksi ke individu atau kelompok lainnya (baik yang sudah dan yang belum terinfeksi) [1]. Penyakit menular dapat muncul akibat interaksi antara tiga unsur, yaitu agen (virus, bakteri, fungi), inang (individu yang terinfeksi), dan lingkungan [2].

Virus adalah salah satu sumber dari penyakit menular. Flu atau influenza adalah salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh virus. Penyebaran penyakit ini dapat terjadi melalui udara, yaitu dari batuk, bersin, atau *droplet* dari seseorang yang terinfeksi. Selain itu, seseorang yang menyentuh barang yang sudah terkontaminasi oleh virus dan kemudian menyentuh mulutnya, mata atau hidungnya, juga dapat terinfeksi. Influenza mewabah ke seluruh dunia dalam epidemi musiman yang mengakibatkan kematian 250.000 sampai 500.000 orang setiap tahunnya, bahkan sampai jutaan orang. Umat manusia telah mengalami pandemi flu global berkali-kali. Salah satu contohnya adalah pandemi influenza tahun 1918 yang lebih dikenal dengan Flu Spanyol. Pandemi ini dikenal sebagai satu kasus yang paling mematikan dalam sejarah manusia. Pandemi Flu Spanyol ini berlangsung selama satu tahun dan menyebabkan sekitar 50 juta orang tewas di seluruh dunia, lebih banyak dari pandemi flu lainnya. Penyebab dari Flu Spanyol tidak diketahui secara pasti, tetapi beberapa sumber menyebutkan virus H1N1 atau flu babi dengan gen yang berasal dari burung yang menjadi penyebabnya. Berakhirnya pandemi Flu Spanyol ini, dikarenakan individu yang terinfeksi meninggal dan meningkatnya kekebalan manusia yang masih hidup. Contoh pandemi flu lainnya adalah Flu Asia pada tahun 1957, Flu Hongkong pada tahun 1968, dan yang terbaru adalah COVID-19 pada tahun 2019. COVID-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh jenis coronavirus yang baru ditemukan. Coronavirus merupakan suatu kelompok virus yang dapat menimbulkan penyakit pada hewan atau manusia. Kasus pertama dari COVID-19 ditemukan pertama kali di kota Wuhan, Tiongkok pada bulan Desember 2019. Pada 1 Mei 2020, kasus coronavirus di dunia tercatat sebanyak 3.335.366 kasus, kematian sebanyak 235.233 orang, dan individu pulih sebanyak 1.054.276. Penanganan pandemi COVID-19 yang dapat dilakukan adalah mengisolasi diri, karantina, menjaga kebersihan pribadi dengan baik, penggunaan disinfektan, dan batasan pertemuan publik.

Secara matematis penyebaran penyakit menular dapat digambarkan melalui suatu model, salah satunya adalah model *SIR* (*Susceptible-Infectious-Recovered*). Model *SIR* adalah salah satu model kompartemen yang paling sederhana, dan banyak model merupakan turunan dari bentuk dasar model *SIR*. Model *SIR* membagi populasinya menjadi tiga kelas (atau kompartemen) yang berbeda, yaitu individu rentan (*Susceptible individuals*), individu terinfeksi (*Infectious individuals*), dan individu pulih (*Recovered individuals*) yang kemudian disingkat menjadi *SIR*. Pemodelan matematis untuk epidemi penyakit menular sudah banyak digunakan untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit termasuk untuk menganalisis keberhasilan suatu intervensi kesehatan [3]. Salah satu intervensi kesehatan yang paling banyak digunakan adalah vaksinasi. Vaksinasi adalah cara yang paling efisien untuk mengurangi penyebaran suatu penyakit menular [3]. Periode vaksinasi

berbeda untuk setiap jenis penyakit, sebagai contoh pemberian vaksin hepatitis B yakni pada usia 0, 1, dan 6 bulan. Secara umum, vaksin dapat dilakukan pada saat lahir atau pada saat periode tertentu (secara acak) setelah lahir. Beberapa penemuan vaksin yang menjadi pencapaian terbesar dalam sejarah dunia kesehatan adalah vaksin cacar pada tahun 1796 (Edward Jenner), vaksin rabies pada tahun 1885 (Louis Pasteur), vaksin difteri pada tahun 1890 (Emil von Behring), vaksin polio pada tahun 1954 (Jonas Salk), dan vaksin MMR (*Measles, Mumps, Rubella*) (Merck). Model *SIR* merupakan salah satu model yang telah dikembangkan dengan upaya vaksinasi. Kelebihan dari model *SIR* yaitu banyak digunakan dan dikembangkan dalam pemodelan penyakit menular atau sejenisnya.

Pada skripsi ini, akan dilakukan analisis model epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak. Kemudian dilakukan pula analisis model epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir yang melibatkan individu rentan (*Susceptible individuals*), individu tervaksinasi (*Vaccinated individuals*), individu terinfeksi (*Infectious individuals*), dan individu pulih (*Recovered individuals*). Setelah itu akan dilakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh pada banyaknya individu terinfeksi untuk model *SIR* dan *SVIR*. Hal yang diperlukan untuk menganalisis suatu model, salah satunya adalah titik kesetimbangan. Didapati dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan digunakan bilangan reproduksi dasar. Perbedaan skripsi dengan daftar pustaka [9] terdapat pada analisis kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasar pada latar belakang yang sudah dikemukakan, beberapa masalah yang dirumuskan dalam skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana pembentukan model epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak?
2. Bagaimana pembentukan model epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir?
3. Bagaimana titik kesetimbangan dari model epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak?
4. Bagaimana titik kesetimbangan dari model epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir?
5. Bagaimana mencari bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak?
6. Bagaimana mencari bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir?
7. Parameter-parameter manakah yang paling berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak?
8. Parameter-parameter manakah yang paling berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Menentukan model kompartemen untuk epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak dan model kompartemen untuk epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir.
2. Menentukan titik kesetimbangan dari model kompartemen untuk epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak dan model kompartemen epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar dari model kompartemen untuk epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak dan model kompartemen untuk epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir.
4. Mengetahui parameter-parameter manakah yang paling berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar dari model epidemik *SIR* dengan vaksinasi secara acak dan model epidemik *SVIR* dengan vaksinasi pada saat lahir.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang menjadi dasar pada skripsi ini yakni:

1. Besar populasi manusia konstan.
2. Manusia yang telah pulih tidak dapat kembali sabagai manusia yang rentan terhadap penyakit.

1.5 Sistematika Pembahasan

Pada skripsi ini, pembahasan terdiri dari lima bab. Berikut sistematika penulisan:

- Bab I: Pendahuluan
Bab ini menjelaskan mengenai hal-hal yang akan dibahas di dalam penulisan skripsi ini. Bab ini terdiri dari lima subbab yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan.
- Bab II: Landasan Teori
Bab ini menjelaskan tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam skripsi ini. Hal-hal yang dibahas berupa persamaan diferensial linear dan tak linear, sistem persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial tak linear orde satu, kestabilan titik kesetimbangan trivial sistem planar, model *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*), model *SVIR* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered*), bilangan reproduksi dasar, matriks generasi, dan analisis sensitivitas.
- BAB III
Bab ini berisi tentang model kompartemen, mencari titik kesetimbangan serta menganalisis kestabilannya, dan mencari bilangan reproduksi dasar untuk model epidemik *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan vaksinasi secara acak dan model epidemik *SVIR* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered*) dengan vaksinasi pada saat lahir.
- BAB IV
Pada bab ini dilakukan simulasi numerik dan analisis sensitivitas untuk model epidemik *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan vaksinasi secara acak dan model epidemik *SVIR* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered*) dengan vaksinasi pada saat lahir.
- BAB V
Bab ini berisi kesimpulan dari pemaparan pada bagian-bagian sebelumnya, serta terdapat saran untuk penelitian selanjutnya.