

SKRIPSI

ANALISIS STABILITAS DAN SENSITIVITAS MODEL SITR



Indra Setiawan

NPM: 2014710028

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2021**

FINAL PROJECT

STABILITY AND SENSITIVITY ANALYSIS OF SITR MODEL



Indra Setiawan

NPM: 2014710028

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2021**

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS STABILITAS DAN SENSITIVITAS MODEL SITR

Indra Setiawan

NPM: 2014710028

Bandung, 10 Februari 2021

Menyetujui,

Pembimbing 1

Pembimbing 2

Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono

Iwan Sugiarto, M.Si.

Ketua Tim Penguji

Anggota Tim Penguji

Dr. Benny Yong

Dr. Andreas Parama Wijaya

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Dr. Erwinna Chendra

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

ANALISIS STABILITAS DAN SENSITIVITAS MODEL SITR

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 10 Februari 2021

Indra Setiawan
NPM: 2014710028

ABSTRAK

Pemodelan matematika banyak digunakan dan dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu fenomena yang membutuhkan adanya pemodelan matematika adalah penyakit serta penyebarannya. Model matematika *SIR* merupakan salah satu model dasar yang digunakan untuk mendeskripsikan suatu fenomena penyebaran penyakit dalam populasi. Pada model *SIR* terdapat tiga subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Infective*, *Recovered*. Terdapat bermacam penyakit serta penyebarannya yang ada di dunia khususnya di Indonesia, diantaranya adalah penyakit-penyakit yang berhubungan dengan sistem pernapasan seperti TBC, asma, dan yang sedang terjadi pada situasi sekarang adalah Covid-19. Penyakit-penyakit ini dapat terbagi menjadi penyakit menular dan tidak menular, dengan berbagai macam cara penularan, pencegahan dan pengobatannya pula. Salah satu cara yang dapat mengurangi tingkat penyebaran penyakit adalah pengobatan (*Treatment*). Pada skripsi ini akan dibahas suatu model matematika yaitu *SITR* (*Susceptible*, *Infective*, *Treatment*, *Recovered*) yang menunjukkan adanya pengobatan dalam suatu subpopulasi. Pada model *SITR* terdapat parameter-parameter yang berpengaruh dalam tingkat penyebaran pada populasi, parameter-parameter yang terdapat pada model adalah parameter kelahiran alami, kematian alami pada setiap subpopulasi, tingkat pemulihan, tingkat infeksi dan pengurangannya untuk pengobatan serta parameter tingkat kontak yang terjadi antara subpopulasi rentan (*S*) dan terinfeksi (*I*). Kemudian akan dicari titik kesetimbangan dari model *SITR* yang terbagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Selanjutnya akan dicari bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model *SITR* dengan menggunakan matriks generasi, dan hasil persamaan R_0 akan menjadi parameter batas terjadinya penyebaran penyakit. Lalu akan dicari kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model *SITR* dengan menggunakan Matriks *Jacobian* dan Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*. Kemudian akan dilakukan simulasi numerik untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model *SITR* serta simulasi numerik untuk setiap parameter yang ada pada model. Serta adanya analisis sensitivitas untuk menguji parameter yang paling berpengaruh dalam tingkat penyebaran penyakit pada model *SITR*.

Kata-kata kunci: Model Matematika *SITR*, Titik Kesetimbangan, Bilangan Reproduksi Dasar, Analisis Kestabilan, Simulasi Numerik, Analisis Sensitivitas

ABSTRACT

Mathematical modeling is widely used and needed in everyday life. One of the phenomena that requires mathematical modeling is disease and its spread. The *SIR* mathematical model is one of the basic models used to describe a phenomenon of disease spread in a population. In the *SIR* model there are three subpopulations, namely Susceptible, Infective, Recovered. There are various diseases and their spread in the world, especially in Indonesia, including diseases related to the respiratory system such as tuberculosis, asthma, and what is happening in the current situation is Covid-19. These diseases can be divided into infectious and non-communicable diseases, with various modes of transmission, prevention and treatment as well. One of the ways that can reduce the rate of disease spread is treatment (Treatment). In this final project, we will discuss a mathematical model that is *SITR* (Susceptible, Infective, Treatment, Recovered) which shows the existence of treatment in a subpopulation. In the *SITR* model, there are parameter that affect the rate of spread in the population, the parameter in the model are parameter of natural births, natural deaths in each subpopulation, rates of recovery, rates of infection and reduction for treatment and parameter of the level of contact that occurs between vulnerable (*S*) and infected (*I*) subpopulations. Then we will look for the equilibrium point of the *SITR* model which is divided into two, namely the disease-free and endemic equilibrium point. Next, we will look for the basic reproduction number (R_0) from the *SITR* model using a generation matrix, and the result of the equation R_0 will be the boundary parameter for disease spread. Then we will look for the stability of the disease-free and endemic equilibrium points of the *SITR* model using the Jacobian Matrix and the Stability Criteria Routh-Hurwitz. Then a numerical simulation will be performed for the disease-free and endemic equilibrium points from the *SITR* model and numerical simulations for each parameter in the model. There is also a sensitivity analysis to examine the parameter that have the most influence on the level of disease in the *SITR* model.

Keywords: SITR Mathematical Model, Equilibrium Points, Basic Reproduction Numbers, Stability Analysis, Numerical Simulation, Sensitivity Analysis

*Untuk Orang Tua, Keluarga, Sahabat dan semua yang telah
senantiasa mendukung dan mendoakan. Kupersembahkan karyaku*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan berkat yang telah diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Analisis Stabilitas dan Sensitivitas pada Model SITR", yang merupakan syarat wajib dalam menyelesaikan studi Strata-1 Program Studi Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains, Universitas Katolik Parahyangan. Penulis berharap skripsi ini dapat berguna untuk mahasiswa dan pembaca lainnya.

Selama kuliah serta penyusunan skripsi, Penulis mendapatkan bantuan, dukungan serta pengalaman dari beberapa pihak. Karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

- Mamah, Ayah, Almer, Ibu, Ayi, Akung, serta seluruh keluarga dan saudara yang selalu memberi dukungan, motivasi dan segala yang dibutuhkan penulis dalam berbagai keadaan dan kondisi.
- Bapak Iwan Sugiarto, M.Si. sebagai Dosen Wali dan Pembimbing yang telah memberikan bantuan, dukungan dan kepercayaan kepada penulis dalam menyelesaikan studi dan skripsi ini.
- Bapak Prof. Dr. Julius Dharma Lesmono sebagai Dosen Pembimbing yang telah memberikan bantuan, dukungan dan kepercayaan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
- Bapak Dr. Benny Yong dan Bapak Dr. Andreas Parama Wijaya sebagai Dosen Penguji, serta Bapak Liem Chin M.Si. sebagai Dosen Koordinator Skripsi yang telah memberi kesempatan, kritik dan saran untuk memperbaiki dan mengembangkan skripsi ini.
- Teman-teman seperjuangan 2014: Evan, Elwin, Samuel, Nita, Billy, Ivan F, Erlan, Azka, Boru, Adinandra, Alya, Citra, Kevin B, Adit, Nico, Neilshan, Yemima, Philip, Steven, Angel, Laras, Mario, Cindy, Meirene, Michael, Thasya, Yosua, Ivan S, Andry, Kevin L, Enrico, Ester, Grace, Aquila, Christian dan Vido yang telah berjuang bersama memberi pengalaman dan kisah selama berproses di UNPAR
- Sahabat-sahabat Algi, Ardian dan Bimo yang selalu percaya dan mendukung penulis dari awal hingga akhir masa perkuliahan.
- Teman-teman angkatan 2011-2019 lainnya untuk ilmu dan pengalaman selama proses belajar di UNPAR, juga untuk seluruh Dosen dan anggota TU serta seluruh keluarga FTIS.
- Seluruh keluarga Bengkel Almer Motor dan Motoracing, AHASS Tunas Jaya Motor dan TJM Racing, serta seluruh kolam crew, Tarka Kinagara dan seluruh orang yang selalu mendukung dan mendoakan penulis.

Bandung, Februari 2021

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Sistematika Pembahasan	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	4
2.3 Titik Kestimbangan dan Kestabilannya	4
2.4 Bilangan Reproduksi Dasar dan Matriks Generasi	6
2.5 Pelinearan Sistem PD Tak linear Menggunakan Matriks <i>Jacobian</i>	7
2.6 Model Matematika SIR	8
2.7 Kriteria Kestabilan <i>Routh-Hurwitz</i>	8
2.8 Analisis Sensitivitas	9
3 MODEL MATEMATIKA SIR DENGAN PENGOBATAN	11
3.1 Model Matematika SIR dengan Pengobatan	11
3.2 Titik Kestimbangan Model Matematika SITR	13
3.3 Bilangan Reproduksi Dasar	15
3.4 Analisis Kestabilan Titik Kestimbangan Bebas Penyakit dan Endemik	16
4 SIMULASI NUMERIK DAN ANALISIS SENSITIVITAS	19
4.1 Simulasi Numerik Titik Kestimbangan Bebas Penyakit Model SITR	19
4.2 Simulasi Numerik Titik Kestimbangan Endemik Model SITR	20
4.3 Simulasi Numerik Perubahan Nilai Parameter Tingkat Kontak	21
4.4 Simulasi Numerik Perubahan Nilai Parameter Tingkat Pemulihan	22
4.5 Simulasi Numerik Perubahan Nilai Parameter Tingkat Kematian Alami	23
4.6 Simulasi Numerik Perubahan Nilai Parameter Tingkat Kelahiran Alami	24
4.7 Simulasi Numerik Perubahan Nilai Parameter Tingkat Infeksi untuk Pengobatan	25
4.8 Simulasi Numerik Perubahan Nilai Parameter Banyaknya Pengurangan Infeksi dengan Pengobatan	26
4.9 Analisis Sensitivitas Parameter pada Model SITR	27
5 KESIMPULAN DAN SARAN	29

5.1 Kesimpulan	29
5.2 Saran	30
DAFTAR REFERENSI	31

DAFTAR GAMBAR

2.1	Skema Kompartemen Model Matematika SIR	8
3.1	Skema Kompartemen Penyebaran Penyakit Tuberkolosis	11
4.1	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit	20
4.2	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> Titik Kesetimbangan Endemik	21
4.3	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\beta = 0.5$	21
4.4	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\beta = 0.52$	22
4.5	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\mu = 0.05$	22
4.6	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\mu = 0.03$	23
4.7	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\alpha = 0.17$	23
4.8	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\alpha = 0.15$	24
4.9	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $B = 0.275$	24
4.10	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $B = 0.25$	25
4.11	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\rho = 0.3$	25
4.12	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\rho = 0.28$	26
4.13	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\delta = 0.275$	26
4.14	Simulasi Numerik Model <i>SITR</i> dengan nilai $\delta = 0.25$	27

DAFTAR TABEL

2.1	Jenis-jenis kestabilan	5
4.1	Nilai Awal Populasi dan Parameter dalam Model <i>SITR</i> Bebas Penyakit	19
4.2	Nilai Awal Populasi dan Parameter dalam Model <i>SITR</i> Titik Kesetimbangan Endemik	20
4.3	Analisis Sensitivitas Parameter pada Model <i>SITR</i> Titik Kesetimbangan Endemik	27

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan gambaran dari suatu fenomena dalam bentuk rumus sistematis sehingga dapat mempermudah untuk mempelajari, menganalisa, dan mencari solusi untuk mengatasi fenomena tersebut. Salah satu fenomena yang ada di dunia khususnya di Indonesia adalah penyakit. Pengertian penyakit pada umumnya merupakan kondisi yang mengganggu fungsi normal tubuh. Penyakit dapat dibagi menjadi penyakit menular dan tidak menular. Terdapat banyak penyakit menular di Indonesia dengan beragam faktor penyebab dan penyebarannya. Salah satu penyakit menular yang masih ada di Indonesia adalah TBC (Tuberculosis).

Penyakit TBC adalah salah satu penyakit pada sistem pernapasan manusia, yang menyebabkan penderitanya sulit untuk bernapas dengan normal. Penyakit TBC disebabkan oleh adanya infeksi pada bagian pernapasan, infeksi berasal dari bakteri yaitu *Mycobacterium tuberculosis*. Penyakit ini termasuk dalam jenis penyakit yang menular, proses penularan penyakit TBC adalah dari cairan yang dikeluarkan oleh penderita penyakit TBC. Penularan juga terjadi karena banyaknya interaksi dengan penderita TBC, sehingga semakin sering berinteraksi dengan penderita TBC maka akan semakin tinggi risiko untuk tertular penyakit tersebut. Penyakit TBC juga termasuk dalam kategori penyakit yang mematikan. Saat ini Indonesia menjadi negara dengan beban TBC yang besar, termasuk lima besar di dunia. Dr Anung Sugihantono, Direktur Jenderal Pengendalian dan Pencegahan Penyakit Kementerian Kesehatan RI mengatakan, "prevalensi penyakit TBC di Indonesia sekitar 391 per 100.000 penduduk". Namun kabar baiknya angka kesembuhan pasien dari penyakit TBC di Indonesia pada 2017 mencapai target sebesar 89% dan angka keberhasilan pengobatan pada 2018 mencapai target sebesar 90.3% [1]. TBC paling sering menyerang paru-paru dengan gejala klasik berupa batuk, berat badan turun, tidak nafsu makan, demam, keringat di malam hari, batuk berdarah, nyeri dada, dan lemah. Jenis batuk juga bisa berdahak yang berlangsung selama lebih dari 21 hari. Selain menyerang paru-paru TBC juga dapat menyerang organ tubuh lainnya seperti kelenjar getah bening, usus, ginjal, kandung, tulang bahkan ke otak.

Pada skripsi ini akan dibahas mengenai penyebaran penyakit menular dengan menggunakan model matematika yaitu SIR (*Susceptible Infective Recovered*) dengan adanya *Treatment*. Tujuannya untuk menganalisa suatu penyebaran penyakit dan hasil analisa tersebut diharapkan dapat mengurangi laju penyebaran atau bahkan menghentikannya. Suatu model yang masing-masing di dalamnya sudah ditentukan populasi dengan tiga kompartemen *Susceptible* $S(t)$, *Infective* $I(t)$, dan *Recovered* $R(t)$ [2]. $S(t)$ digunakan untuk mewakili banyaknya individu yang belum terinfeksi oleh penyakit pada waktu t . $I(t)$ menunjukkan banyaknya individu yang sudah terinfeksi oleh penyakit dan dapat menularkan penyakit tersebut kepada individu yang rentan. $R(t)$ adalah kompartemen yang digunakan untuk individu-individu yang sudah terinfeksi dan kemudian pulih atau sembuh dari penyakit. Salah satu cara untuk menghilangkan penyakit atau mengurangi banyaknya individu terinfeksi pada suatu populasi adalah dengan pengobatan. Maka dari itu pada skripsi ini ada penambahan kompartemen yaitu $T(t)$ yang menunjukkan banyaknya individu yang sedang menjalani masa *treatment* atau pengobatan. Pada kategori ini individunya tidak akan terinfeksi kembali. Sehingga pada skripsi ini model matematika dari penyebaran penyakit yang akan dibahas adalah

model *SITR* (*Susceptible Infective Treatment Recovered*), dimana model matematika ini dapat menjadi pedoman dalam menggambarkan penyebaran penyakit saat ini dan juga di masa yang akan datang. Selanjutnya pada skripsi ini juga dibahas mengenai titik kesetimbangan serta kestabilan dari model *SITR* serta adanya simulasi numerik dan analisis sensitivitas yang dilakukan untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh dalam menghambat penyebaran penyakit pada model *SITR*.

1.2 Rumusan Masalah

Beberapa masalah akan ditinjau dalam skripsi ini dan dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dari model *SITR*?
2. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan dari model *SITR*?
3. Bagaimana simulasi numerik untuk titik kesetimbangan dari model *SITR*?
4. Bagaimana analisis sensitivitas untuk parameter dari model *SITR*?

1.3 Tujuan

Tujuan penyusunan skripsi ini ialah:

1. Mencari titik kesetimbangan model *SITR*.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model *SITR*.
3. Melakukan simulasi numerik dan analisis sensitivitas untuk parameter pada model *SITR*.

1.4 Batasan Masalah

Model yang digunakan dalam skripsi ini untuk model *SITR* dan jumlah populasi manusia bernilai konstan.

1.5 Sistematika Pembahasan

Berikut diuraikan sistematika pembahasan ini:

Bab 1 : Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah dan sistematika pembahasan.

Bab 2 : Landasan Teori

Bab ini membahas teori pendukung yang dipakai yaitu persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik kesetimbangan dan kestabilannya, bilangan reproduksi dasar, pelinearan sistem persamaan diferensial tak linear menggunakan matriks *Jacobian*, kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* dan analisis sensitivitas

Bab 3 : Model Matematika *SIR* dengan Pengobatan

Bab ini membahas formulasi model *SIR* dengan pengobatan (*SITR*), titik kesetimbangan model, bilangan reproduksi dasar dan kestabilan titik kesetimbangan.

Bab 4 : Simulasi Numerik dan Analisis Sensitivitas

Bab ini membahas simulasi numerik dan analisis sensitivitas dari model *SITR*.

Bab 5 : Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi kesimpulan dari seluruh pembahasan pada bab sebelumnya serta saran bagi pembaca yang ingin mengembangkan skripsi ini.